Математический факультет

Кафедра функционального анализа

ЛОГИКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ И.ЛАКАТОСА «ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ОПРОВЕРЖЕНИЯ»

Учебно-методические указания по теме
«Математическая логика.
Логика роста и развития математического знания»

Для студентов старших курсов
университетов и аспирантов

Составитель: Моисеев В.И.

В спецкурсе по математической логике, который автор читал на протяжении ряда лет на 4-м и 5-м курсах математического факультета ВГУ, одной из важных тем является тема «Логика роста и развития математического знания», в рамках которой рассматриваются различные современные модели развития научного знания. Одним из влиятельнеших направлений в этой области является подход ученика К.Поппера, создателя понятия «научно-исследовательская программа», Имре Лакатоса. Однако, как правило, имя и направление исследований этого видного представителя современной логики и философии науки преимущественно и ограничивается изучением указанного выше понятия. В то же время на русском языке имеется замечательная работа И.Лакатоса «Доказательства и опровержения», в которой автор, как мне представляется, постарался во многом подняться над различными враждующими школами в современной философии науки и логики, представив в сжатом виде реконструкцию развития рационального знания, его логику и динамику. С этой точки зрения работа Лакатоса представляет собой пример редкого сочетания глубокого логико-методологического анализа и удачной популяризации. Такого рода особенность этой работы ставит, по моему мнению, задачу активного ее использования в учебном процессе. Однако следует отметить, что даже несмотря на большую работу в направлении популяризации, проделанную Лакатосом, материал книги опирается на множество понятий и не всегда может быть охвачен в своем единстве студентами. В связи с этим существует насущная проблема своего рода концентрации и систематизации основных идей этой работы. В предлагаемых ниже материалах как раз и проводится подобная систематизация. Как надеется автор, такого рода представление основных идей И.Лакатоса в книге «Доказательства и опровержения» позволит студенту, аспиранту или преподавателю быстро войти в проблематику книги и постоянно иметь перед собою своего рода конспект этой замечательной работы. В конце сжатого изложения основных идей Лакатоса я делаю ряд выводов и обобщений, позволяющих говорить о некотором едином методе развития рационального знания. Такого рода обобщение, с моей точки зрения, может помочь студенту охватить логику развития знания и не потонуть в разного рода частностях.

Книга И.Лакатоса «Доказательства и опровержения» (1) построена в форме полилога множества учеников и учителя в некотором воображаемом классе. Ученики обозначаются названиями греческих букв: «Альфа», «Дельта», «Сигма», и т.д. Обсуждается теорема Эйлера «Для любого многогранника верно, что V-E+F=2», где V – число вершин, E – число ребер, F – число граней многогранника. После выдвижения этой догадки учитель предлагает доказательство, затем начинается критика как доказательства, так и самой догадки в форме выдвижения разными учениками тех или иных контрпримеров. В дискуссии учеников и учителя Лакатос в сжатой, концетрированной форме реконструирует действительное развитие математики, что подтверждается постоянными ссылками на исторические факты в подстрочных примечаниях. Лакатос выделяет три вида контрпримеров: 1)локальные, но не глобальные – контрпримеры для доказательства (леммы), но не для основной догадки, 2)локальные и глобальные контрпримеры – контрпримеры и для доказательства и для основной догадки, 3)глобальные и не локальные контрпримеры – против основной догадки, но не доказательства. Множество приводимых контрпримеров разного вида проблематизируют первоначальную догадку и доказательство, в результате происходит постоянное уточнение и переформулировка системы знания, знание находится в постоянном процессе трансформации, и Лакатос подробнейшим образом отслеживает все нюансы этой трансформации, выдвигает различные возникающие по ходу методы трансформации знания, постепенно двигаясь ко все более сложному образу растущего знания.

Приведу вначале сжатую сводку основного хода изложения в "Доказательствах и опровержениях" (названия частей и методов не всегда соответствуют таковым у Лакатоса).

1. Задача и догадка. Возникает основная догадка.

2. Доказательство. Учитель предлагает доказательство для основной догадки (идея этого доказательства, как пишет Лакатос, восходит к О.Коши). Предполагается, что многогранник можно представить как бы сделанным из резины. Из него можно вырезать одну грань и растянуть оставшуюся часть на доске, как плоскую сеть. Тогда для сети соотношение V-E+F уменьшится на 1 (удалена одна грань) по сравнению с V-E+F для многогранника. Затем проводятся диагонали в гранях, пока не будут получены треугольные грани (триангуляция граней). Наконец, треугольные грани начинают удаляться, пока не останется последняя треугольная грань. Утверждается, что при отбрасывании треугольников соотношение V-E+F не изменяется относительно такого для плоской сети. Для последнего треугольника V-E+F=1. Следовательно, для всей сети V-E+F=1. Следовательно, для многогранника V-E+F=2. Это доказательство опирается на следующие три леммы: Лемма 1. Любой многогранник после устранения одной грани может быть растянут плоско на доске. Лемма 2. При триангуляции сети всегда получается новая грань при проведении новой диагонали. Лемма 3. При любом отбрасывании треугольников из триангулированной сети каждый раз возникают только две альтернативы: 1)либо E уменьшается до E-1 и F уменьшается до F-1, 2)либо V уменьшается до V-1 и E уменьшается до E-2 и F уменьшается до F-1. В любом случае общее соотношение V-E+F не меняется.

3. Критика доказательства при помощи контрпримеров, являющихся локальными, но не глобальными. Начинается выдвижение контрпримеров.

Ученик “Гамма” выдвигает контрпример против третьей леммы – это такой порядок вынимания треугольников из триангулированной сети для куба, когда вначале вынимается внутренняя грань. Учитель уточняет формулировку третьей леммы, требуя каждый раз вынимать только граничные треугольники. Так Лемма 3 заменяется Леммой 3*. Затем “Гамма” выдвигает новый контрпример теперь уже для Леммы 3*, предлагая специальный порядок вынимания граничных треугольников из триангулированной сети для куба, при котором в конце остаются два несвязных треугольника, для которых V-E+F=2, т.е. нарушается соотношение V-E+F. Учитель вынужден вновь уточнить теперь уже Лемму 3* до Леммы 3**, вводя условие связности сети при вынимании треугольников. Но возникает вопрос, а можно ли обеспечить такой порядок вынимания треугольников для любой сети любого многогранника, и тогда учитель предпочитает принять не более проблематичное, но более существенное условие (обобщающее и условие вынимания граничных треугольников и условие связности сети) такого порядка вынимания треугольников из сети, при котором не меняется соотношение V-E+F на каждом этапе. Можно считать, что в качестве Леммы 3** принята теперь Лемма 3 именно с этим дополнительным обобщенным условием.

4. Критика догадки при помощи глобальных контрпримеров. Ученик “Альфа” предлагает глобальный контрпример “вложенный куб” (куб в кубе, Cb^2). Это контрпример для основной догадки, т.к. здесь V-E+F=4. И это контрпример для Леммы 1, т.к. в Cb^2 есть грани (например, грани внутреннего куба), после удаления которых оставшуюся поверхность нельзя будет растянуть на плоскости.

а) Метод сдачи (Met_1). Возможна такая точка зрения, при которой можно посчитать, что на основании глобального контрпримера следует отбросить основную догадку. Такая позиция выражает некоторую методологию, обозначаемую Лакатосом как «метод сдачи».

б) Отбрасывание контрпримера. Метод устранения монстров (Met_2). Однако возможна и другая методологическая позиция по отношению к глобальному контрпримеру, обозначаемая Лакатосом «методом устранения монстров». Ее в данном случае выражает ученик «Дельта», утверждающий, что Cb^2 – это не настоящий многогранник, это «монстр», не имеющий отношения к многогранникам и потому не способный опровергнуть основную догадку. Здесь начинается спор об определениях. «Дельта» говорит, что многогранник (М) – это всегда поверхность как система многоугольников (определение-1 многогранника, $Df_1(M)$). «Гамма» утверждает, что многогранник – это тело, или, точнее: поверхность тела (определение-2, $Df_2(M)$). По первому определению Cb^2 не является многогранником, по второму определению – является. Затем «Альфа» выдвигает глобальные и локальные контрпримеры и для определения-1 – это «тетраэдры-близнецы», склеенные по одному ребру ($Td^2{}_1$) и по одной вершине ($Td^2{}_2$). «Дельта» продолжает отстаивать честь настоящих многогранников, дополняя определение-1 двумя новыми условиями (первое условие (C_1) – чтобы на каждом ребре многогранника встречались только два многоугольника, второе условие (C_2) – чтобы было возможно изнутри одного многоугольника пройти во внутрь другого любым путем, который никогда не пересекает ребра в вершине) – так получается определение-3 многогранника ($Df_3(M)$). Но и пыл опровергателей не остывает: «Гамма» выдвигает новый контрпример – «морской еж» (Echino feci, EF), или «малый звездчатый додекаэдр» с 12 вершинами, 30 ребрами и 12 пятиугольными звездчатыми гранями. «Дельта» вновь отказывается принимать этот объект как многогранник, отвергая возможность пересечения ребер без образования вершины, как это предполагается звездчатым пятиугольником. Дискуссия обращается к определению многоугольника (Mn), и «Дельта» определяет многоугольник как систему ребер, расположенных т.о., что (1) в каждой вершине встречаются только два ребра, (2) ребра не имеют общих точек, кроме вершин (определение-1 многоугольника, $Df_1(Mn)$). Так как определение многогранника зависит от определения многоугольника, то изменение второго приводит и к изменению первого. Определение-3 многогранника, строящееся на основе определения-1 многоугольника, обозначим как $Df_3(Df_1)(M)$, или определение-4 многогранника ($Df_4(M)$). Но и по отношению к этому определению «Альфа» выдвигает новый контрпример – «картинную раму» (КР) (см. 1, С.30, рис.9). «Дельта» вновь вводит некоторое уточняющее условие, исключающее КР как многогранник и добавляемое к определению-4 многогранника, - так возникает новое определение, которое я обозначу как определение-5 многогранника ($Df_5(M)$). Наконец, «Гамма» предлагает рассмотреть в качестве многогранника цилиндр (Cyl), т.е. как контрпример даже по отношению к определению-5. Анализируя этот контрпример, «Дельта» указывает на присутствие в этом объекте безвершинных ребер, в то время как настоящий многоугольник всегда имеет ребра с двумя вершинами – так новым условием уточняется определение-1 многоугольника до определения-2 ($Df_2(Mn)$), в связи с чем происходит и изменение определения-5 многогранника до определения-6 ($Df_6(M)$). Так все новые атаки опровергателей основной догадки успешно отражаются устранителями монстров наложением все более ограничивающих условий на определения. Причем, устранители монстров считают, что они не изменяют определений, а только уточняют их, явно проговаривая, в связи с тем или иным контрпримером, то, что с самого начала подразумевалось ими неявно и казалось очевидным. Поэтому и основная догадка не отбрасывается. Отсюда и их отношение к контрпримерам как к «монстрам». Опровергатели, наоборот, с самого начала предполагают возможность распространения определения на контрпримеры, и с их точки зрения устранители монстров меняют определения, хотя и не хотят признаться в этом. Следовательно, и основная догадка каждый раз отбрасывается, заменяясь новой, в которой фигурирует новое определение.

в) Улучшение догадки методом устранения исключений (Met_3). Недостаток метода устранения монстров состоит в методологии ad hoc, т.е. в необходимости каждый раз вносить некоторые уточняющие условия в определения при появлении каждого нового контрпримера. Ученик «Бета» предлагает преодолеть этот недостаток в «методе устранения исключений», когда составляется список контрпримеров и находится такое ограничивающее условие на определение многогранника, которое заведомо исключит все эти контрпримеры и обеспечит своего рода «безопасную область» для основной догадки. В качестве такого условия он предлагает рассмотреть свойство «выпуклости» многогранника, сформулировав основную догадку не для многогранников вообще, но только для выпуклых многогранников. В методе устранения исключений предполагается уже более уважительное отношение к контрпримерам, не как к «монстрам», а как к «исключениям». Признается, что происходит отказ от первоначальной догадки, чем учитывается метод сдачи, и допускается более радикальное ограничение на многогранник, что в некоторой более смягченной форме учитывает и метод устранения монстров. Т.о. Met_3 включает в себя моменты и Met_1 и Met_2, выступая выражением более полной методологической позиции. Метод устранения исключений – это выражение стремления к безопасности, своего рода «стратегическое отступление в область, которая, как думают, для данной догадки будет твердыней» (1, С.42). Однако и в этом случае мы никогда до конца не можем быть уверены в том, что очерченная нами безопасная область в самом деле оказалась таковой, и не сможет возникнуть контрпример и для нее. Кроме того, возможен и «перелет», когда мы слишком радикально отступим, оставив за собой еще много многогранников, для которых основная догадка была бы еще верна.

г) Метод исправления монстров (Met_4). Ученик «Ро» выражает еще одну возможную установку по отношению к контрпримерам, которую Лакатос называет «методом исправления монстров». Контрпример «морской еж» (EF) можно переинтерпретировать как пример для основной догадки. Именно, «морского ежа» можно трактовать не как малый звездчатый додекаэдр с пятиугольными звездчатыми гранями, но как треугольный гексаконтаэдр, состоящий из треугольных граней. В этом случае для него выполняется формула Эйлера V-E+F=2. Этот метод выступает как своего рода метод «лечения от ошибок», утверждающий, что «существуют не монстры, а только монстрообразные толкования. Нужно очистить свой ум от извращенных иллюзий, надо научиться видеть и правильно определять, что видишь» (1, С.46). В этом случае мы видим возможность различных интерпретаций одного объекта – и как контрпримера, и как примера – для основной догадки. Метод исправления монстров предполагает в этом случае неравноправность всех этих толкований, на тех или иных основаниях выделяя ту из них, которая соответствует основной догадке. Наоборот, для опровергателей достаточно уже возможности толкования объекта как контрпримера, чтобы допустить и реальность этой возможности. Замечу, что для методов 1-4 важна только глобальность контрпримера, т.к. в этих методах речь идет только о влиянии контрпримера на основную догадку. Поэтому здесь могут рассматриваться и только глобальные, и глобальные и локальные контрпримеры.

д) Метод включения (инкорпорации) лемм (Met_5). Здесь важны глобальные и локальные контрпримеры. Учитель предлагает новый метод – «метод включения лемм», позволяющий подключить анализ доказательства при формировании ограничивающего условия на определение многогранника, и вызванного необходимостью исключить глобальный и локальный контрпример. Учитель рассматривает контрпример «картинная рама» (КР). Этот контрпример является и глобальным и локальным. Как локальный контрпример, КР – это контрпример для Леммы 1 «Любой многогранник после устранения одной грани может быть растянут плоско на доске» (это условие эквивалентно условию гомеоморфности многогранника сфере, в то время как КР гомеоморфна тору). Далее в опровергаемой лемме выделяется то условие, которое не выполняется для контрпримера, и оно добавляется – как ограничивающее условие – к определению многогранника. Заметим, однако, что, в отличие от метода устранения монстров, в методе инкорпорации лемм (как, впрочем, и в методе устранения исключений) ограничивающее условие рассматривается не как составляющая часть определения многогранника, а как некоторое условие, ограничивающее понятие многогранника до некоторого вида многогранников. Правда, и в этом случае не исключена возможность трактовки ограничивающего условия и как составляющей определения многогранника вообще. В нашем примере в качестве условия учитель берет выполнимость всей первой леммы, называя его свойством «быть простым» для многогранника. Тогда первоначальная основная догадка «Для любого многогранника верно, что V-E+F=2» (гипотеза-0, H_0) отбрасывается и заменяется на ограниченную догадку «Для любого простого многогранника верно, что V-E+F=2» (H_1). В этом случае доказательство мы можем сохранить неизменным, меняя только догадку. Так лемма включается в уточненную догадку. Далее ученик «Альфа» выдвигает новый глобальный и локальный контрпример и для уточненной догадки – «увенчанный куб» (Cb^{Cb}), т.е. малый куб, припаянный сверху к большому кубу (припаянная грань малого куба удалена). Как локальный контрпример, увенчанный куб опровергает Лемму 2 «При триангуляции сети всегда получается новая грань при проведении новой диагонали». Анализ основания ложности этой леммы для данного контрпримера приводит к выявлению наличия в увенчанном кубе кольцевых граней, т.е. таких граней, для которых проведение диагонали не приводит к появлению новой грани. Такие грани еще называют многосвязными. Отсюда становится ясным и то условие (основание неложности), при котором Лемма 2 остается верной для многогранника, - это наличие в многограннике только односвязных граней. Так новое свойство «иметь только односвязные грани» вновь добавляется к числу условий на многогранники в основной догадке, в связи с чем возникает новая уточненная догадка «Для любого простого многогранника с односвязными гранями верно, что V-E+F=2» (H_3). Как и в методе устранения исключений, в методе инкорпорации лемм достигается объединение средств методов сдачи и устранения монстров. Однако преимущество метода включения лемм, в отличие от метода устранения исключений, состоит в том. что здесь «производят тщательный анализ доказательства и на этом основании дают очень тонкое ограничение запрещенной площади» (1, С.53). Кроме того, в Met_5 достигается взаимоопределение «логики открытия» (движение от анализа доказательства к исправлению догадки) и «логики оправдания» (движение от основной догадки к ее доказательству). Однако и метод включения лемм не может быть полностью гарантированным от недостатков методологии ad hoc, будучи вынужденным каждый раз инкорпорировать лемму для контрпримера, хотя, по-видимому, он обладает более гарантирующей и точной способностью ограничения области истинности основной догадки, чем метод устранения исключений.

5. Критика глобальными, но не локальными контрпримерами.

а) Метод экспликации неявных лемм ($Met_{5.1}$). Этот метод имеет дело с глобальными и нелокальными контрпримерами, для которых не был определен метод инкорпорации лемм. Такие контрпримеры, опровергая основную догадку, не опровергают какую-либо лемму. Однако подобную ситуацию всегда можно представить как случай глобального и локального контрпримера, предполагая экспликацию некоторой леммы в доказательстве, которая ранее была дана неявно. В остальном $Met_{5.1}$ не отличается от Met_5. Таким образом, специфика метода экспликации лемм сравнительно с методом включения лемм состоит лишь в том, что инкорпорируемая лемма одновременно эксплицируется, делается явной, контрпримером. Для уточненной догадки H_3 ученик «Гамма» вновь выдвигает свой контрпример цилиндр (Cyl). «Гамма» считает, что цилиндр – это простой многогранник с односвязными гранями, но для него V-E+F=1. Здесь предполагается, что для простых многогранников можно доказать выполнение Леммы 3**, в связи с чем третья лемма для доказательства H_3 специально не нужна. Т.о. цилиндр, не опровергая первую и вторую леммы, не опровергает ни одной явной леммы, и не является локальным контрпримером. Однако здесь возражает ученик «Альфа», пытаясь утверждать, что цилиндр опровергает Лемму 1, не являясь простым. Можно вынуть боковую грань из цилиндра, и тогда оставшаяся часть распадется на два несвязных куска. Это не будет, по мнению «Альфы», растягиванием на плоскости, т.к. «растягивать» - означает в том числе «быть одним куском», «<u>быть связным</u>». «Гамма» же замечает, что «Альфа» добавляет новое условие «связности» к сетке, эксплицируя тем самым это условие. Это тот же ход, что и в методе устранения монстров, но применяемый не к определению многогранника, а к некоторому определению (в данном случае определению «растягивания») из леммы, доказательства. То же самое происходит и для случая, когда «Альфа» пытается утверждать, что цилиндр опровергает и вторую лемму, не обладая односвязными гранями. Свойство «односвязности», по мнению «Альфа», - это не просто увеличение числа граней при проведении диагонали, но это еще и утверждение о существовании диагоналей у грани, в то время как для граней цилиндра понятие диагонали не может быть определено. Но это вновь экспликация дополнительного условия «<u>существования диагоналей у грани</u>», которое ранее лишь неявно предполагалось. Итак, тот же самый процесс экспликации неявных допущений, который ранее мы могли видеть в методе устранения монстров для определения многогранников, теперь возникает для определений из доказательства основной догадки. Эксплицированные определения из доказательства всегда могут быть сформулированы в виде некоторых новых лемм, опровергаемых контрпримером, что обеспечивает превращение $Met_{5.1}$ в Met_5.

б) Метод доказательств и опровержений (Met_6). Этот метод объединяет в себе методы инкорпорации лемм (Met_5) и метод экспликации лемм ($Met_{5.1}$). Однако пока здесь Лакатос представляет ситуацию таким образом, что все контрпримеры (в том числе локальные и не глобальные) могут быть сведены к глобальным и локальным контрпримерам, для которых уже определен метод включения лемм. Кроме того, методом доказательств и опровержений предполагается более тесное взаимоопределение доказательств и опровержений (контрпримеров). Доказательство, леммы начинают рассматриваться не только как средства обоснования основной догадки, но и как средства генерации локальных контрпримеров, которые затем необходимо пытаться сделать и глобальными. Та же методология попытки опровержения предлагается и для основной догадки – нужно пытаться не только выдвигать, но и опровергать основную догадку через поиск глобальных контрпримеров, которые затем опять необходимо представить и как локальные контрпримеры. Однако и метод доказательств и опровержений в представленном выше варианте оказывается не избавленным от недостатков методологии ad hoc, будучи вынужденным каждый раз переформулировать основную догадку или доказательство при появлении контрпримеров. Кроме того, коль скоро подобная атака контрпримеров может продолжаться бесконечно, то исчезает вообще возможность достичь когда-либо окончательного доказательства и окончательных формулировок теоремы. Можно ли остановить этот регресс в бесконечность? Предлагаемые основания остановки – религиозный скептицизм и отказ от познания вообще (истина только для Бога), отказ от строгости (введение «более-менее строгих» суждений), прагматизм (истина – средство практики), историзм (истина – средство «духа времени»), как кажется, отвергаются Лакатосом. Проблема в том, чтобы выразить основание остановки рациональными средствами, в рамках некоторой новой эпистемологии. Подводя некоторый итог методу доказательств и опровержений, Лакатос касается краткого анализа истории математики в 19-20 вв. с точки зрения соотношения доказательства (математики) и анализа доказательства (логики). От наивной веры в абсолютность математического доказательства как некоторого мысленного эксперимента в начале 19 в. (Эйлер, Кант) происходит постепенный переход к осознанию важности анализа доказательства под давлением разного рода контрпримеров. Здесь Лакатос выделяет три революции строгости. Первая была связана с именем Коши и выразила себя в состоянии метода анализа доказательства на уровне метода устранения исключений. Вторая революция строгости связана с именем Вейерштрасса, развив метод анализа доказательства до уровня метода доказательств и опровержений. Строгость анализа доказательства стала ставиться выше строгости самого доказательства. Новый урожай контрпримеров в начале 20 века, связанный с теорией множеств Кантора, привел к осознанию регресса в бесконечность в анализе доказательства и поставил проблему основания остановки этого регресса. Третья революция строгости – это интуиционистская контрреволюция, решившая отбросить разрушающий логико-лингвистический педантизм анализа доказательства и разработать новые экстремистские стандарты строгости для доказательства. Логика и математика вновь были разведены. В качестве основания остановки Гильбертом было выдвинуто требование «кристально ясной совместимости доказательств с интуиционистской метатеорией» (1, С.80).

При каждой революции строгости происходит все более глубокое проникновение критицизма, позволяющего подвергать критике контрпримерами все более глубокие слои знания, ранее считавшиеся неприкосновенными. При последней революции строгости интуиционизм сделал попытку остановить критику у самого порога мысленных экспериментов математики как «обосновательного слоя» (foundational layer) «хорошо знакомого основного знания» (familiar background knowledge). Позиция Лакатоса, как это видно из всей книги, состоит, по-видимому, в том, что дальнейшее развитие критицизма в 20 в. приводит к атаке и на этот последний оплот догматизма, впервые распространяя критицизм на сферу всего математического знания в целом.

6. <u>Метод трансформации лемм (Met_0)</u>. Дискуссия вновь возвращается к локальным и не глобальным контрпримерам, и возникающий здесь метод я условно обозначу как «метод трансформации лемм». Ограничение лемм в этом случае (см. выше) при анализе основания их ложности (например, ограничение Леммы 3 до Леммы 3*) приводит к включению в объем теоремы контрпримеров как примеров. Таким образом, если в методе доказательств и опровержений ограничения на доказательство и основную догадку сужают область примеров, то в методе трансформации лемм ограничения доказательства приводят к расширению области примеров. Далее Лакатос предполагает два варианта метода трансформации лемм, которые я буду условно обозначать как «слабый» ($Met^0{}_0$) и «сильный» ($Met^1{}_0$) варианты. В слабом варианте метода трансформации лемм предполагается такая трансформация леммы, при которой на нее накладывается лишь некоторое ограничивающее условие. В сильном варианте одна лемма может заменяться принципиально другой леммой, и даже одно доказательство – другим доказательством, лишь бы только расширялась область примеров теоремы. В качестве иллюстрации сильного варианта метода трансформации лемм Лакатос приводит пример

перехода от доказательства Жергонна к доказательству Коши для догадки Эйлера. В доказательстве Жергонна выполнение свойства V-E+F=2 (свойства эйлеровости) доказывается для «квазивыпуклых» многогранников, где «быть квазивыпуклым» для многогранника означает, «иметь грань, с которой можно увидеть всю внутренность многогранника». Свойство «квазивыпуклости», как затем оказалось, является несущественным для эйлеровости, в связи с чем для перехода к более существенному доказательству Коши необходимо было произвести радикальный пересмотр доказательства, отказавшись вообще от старого варианта доказательства (причем, в этом случае новое доказательство будет одновременно и новой основной догадкой). На основе предложенной выше версии метода доказательств и опровержений такого перехода никогда нельзя было бы совершить, т.к. этот метод может только суживать область примеров, но не расширять ее. Ученик «Омега», пропагандирующий метод трансформации лемм, призывает так развивать теорему, чтобы не только исключать из нее глобальные контрпримеры, но и включать в нее примеры как локальные контрпримеры, стремясь вообще к выявлению необходимого и достаточного (а не только достаточного) условия для свойства эйлеровости. Метод доказательств и опровержений позволяет двигаться к некоторой предельной <u>области анализа доказательства</u> (термин Лакатоса) сверху вниз, сужая область примеров. Слабый вариант метода трансформации лемм, наоборот, позволяет двигаться к некоторой предельной <u>области доказательства</u> (термин Лакатоса) снизу вверх, расширяя область примеров. Сильный вариант метода трансформации лемм, образуя расширяющие области примеров последовательности доказательств, образует и последовательность областей доказательств для каждого из них. Возможно, что эта последовательность областей доказательств в свою очередь стремится к некоторой предельной области – <u>области наивной догадки</u> (термин

Лакатоса). В идеале область наивной догадки – это одновременно и область анализа доказательства, приближаемая таким образом и сверху методом доказательств и опровержений, и снизу - методом трансформации лемм. Замечу, что, хотя Лакатос не формулирует этого явно, но, по-видимому, подобные же слабый и сильный варианты возможны и в методе доказательств и опровержений, когда мы можем не просто ограничивать основную догадку (вид многогранников, обладающий свойством эйлеровости), но и более-менее радикально трансформировать достаточное условие эйлеровости, некоторый пример чего мы могли видеть в методе устранения исключений.

7. Методы анализа (Met_A) и синтеза (Met_S). Все рассмотренные выше методы относились к методу анализа, поскольку ими предполагалось основное движение анализа в доказательстве от уровня основного объекта, многогранника, к уровню его элементов – многоугольников, ребер, вершин. Само доказательство в этом случае строится аналитически - как переход от многогранника к триангулированной сети, далее к треугольникам. Кроме того, само свойство эйлеровости никогда ни одним аналитическим методом не подвергалось сомнению. Ученик «Дзета» предлагает поставить более общую проблему – исследовать общее соотношение f(V,E,F)=0 количества вершин, ребер и граней многогранников, используя метод синтеза. Этот последний заключается в том, что мы начинаем с установления некоторого соотношения f(V,E,F)=0, как V-E=0, для многоугольников (для многоугольника число вершин равно чилсу ребер), и затем, выстраивая (синтезируя) из многоугольников по определенным правилам системы многоугольников и контролируя соотношение f(V, E, F)=0 для каждого этапа такого конструирования, мы затем можем перейти к многогранникам как некоторому частному случаю систем многоугольников, получая некоторое соотношение f(V, E, F)=0 и для этого последнего этапа. В этом случае соотношение f(V, E, F)=0 для

многогранника получается не как <u>наивная догадка</u>, результат озарения, но как <u>дедуктивная догадка</u>, полученная в методе синтеза. Но и наивная догадка, считает Лакатос, - это не результат индукции. Она получена на основе выдвижения и опровержения еще более ранних наивных догадок (так что с этой точки зрения существуют, по-видимоу, более и менее наивные догадки). Можно двигаться от догадки к догадке без выдвижения доказательств и их анализа. Лакатос призывает минимизировать такого рода участки, по-видимому, слишком произвольные, и поскорее переходить к методу доказательств и опровержений вместе с методом трансформации лемм, а затем и к методу синтеза, порождающему дедуктивную догадку. По-видимому, Лакатос также полагает, что метод синтеза обладает большей достоверностью и надежностью, чем методы анализа, хотя и метод синтеза в конечном итоге не может гарантировать от дальнейшей критики контрпримерами. Постепенно Лакатос начинает трактовать метод доказательств и опровержений как наиболее полную методологию, вбирающую в себя отдельные методы – как методы анализа, так и синтеза. В этой тенденции можно отметить стремление описать некоторый наиболее полный инвариант познавательной деятельности, всегда демонстрирующий себя в познании в разнообразии своих сторон как более частных деятельностных регулятивов. Далее я буду именно в этом смысле использовать понятие “метод доказательств и опровержений”, выделяя в нем методы анализа и метод синтеза. Метод синтеза может быть продолжен на системы многогранников, приводя к обобщению соотношения $f(V,E,F)=0$ на разного рода классы многогранников, выходящие за рамки эйлеровых многогранников и включающий в эти более широкие классы наработанные на этапах методов анализа разного рода контрпримеры. Здесь возникают следующие последовательные этапы метода синтеза, если его начинать вообще с выяснения соотношения $f(V,E,F)=0$ для вершины:

1) V=1 для одной вершины

2) V=E для всех совершенных многоугольников

3) V-E+F=1 для всех нормальных открытых систем многоугольников

4) V-E+F=2 для всех нормальных закрытых систем многоугольников (для (закрытых) нормальных многогранников)

5) V-E+F=2 – 2(n-1) для нормальных n-связных многогранников

6) V-E+F=2 – 2(n-1) + $\sum_{K=1}^{F} l_K$ для нормальных n-связных с F l_K-связными гранями многогранников

7) V-E+F=$\sum_{j=1}^{P}$ {2 – 2(n-1) + $\sum_{K=1}^{F} l_K$} для нормальных n-связных с F l_K-связными гранями многогранников и P полостями

Здесь:

Совершенный многоугольник – многоугольник с n ребрами (n-угольник), который может быть построен, исходя из одной вершины, прикладыванием к ней сначала (n-1) ребер без изменения V-E (ясно, что в этом случае V-E=1) и, наконец, последнего закрывающего ребра, которое уменьшает V-E на единицу.

Нормальный (закрытый) многогранник – многогранник с n гранями (n-гранник), который может быть построен, исходя из совершенного многоугольника, прикладыванием к нему (а) первых F-2 граней без изменения V-E+F (это будет открытый нормальный многогранник, и в этом случае V-E+F=1) и (б) наконец, закрывающую грань, которая увеличивает V-E+F на единицу (и превращает открытый многогранник в закрытый).

n-связный многогранник – многогранник, который распадается на два нормальных многогранника минимум после n рассечений. n-связная грань – грань, дающая новую грань после проведения минимум n диагоналей (такова кольцевая грань в «увенчанном кубе»). Многогранник с полостью – нормальный многогранник, внутри которого находится другой многогранник (таков «куб в кубе»).

8. Образование понятий. Суммируя описанные выше методы, Лакатос отмечает, что в основе процесса трансформации знания лежит процесс расширения понятий. В аналитических методах критика контрпримерами каждый раз заставляет пересмотреть то или иное понятие - понятие многогранника или его частей, понятия из доказательств (например, «растягивание сетки», «односвязность грани»), и т.д. Здесь можно стать на любую из двух возможных точек зрения: 1) опровергатели считают, что они не расширяют понятия, но понятия изначально даны в расширительном толковании, способном распространяться на контрпримеры, и с их точки зрения устранители монстров сужают понятия. Контрпримеры в этом случае понимаются как логические контрпримеры, т.е. способные опровергнуть по modus tollens то или иное суждение, содержащее соответствующее понятие. 2) наоборот, устранители монстров считают, что это не они сужают понятия, а, наоборот, опровергатели недопустимо расширяют их. В этом случае контрпримеры заставляют только уточнить изначальное понимание понятия, которое не распространяется на контрпример и не может быть опровергнуто им в составе того или иного суждения. В связи с возможностью и, по большому счету, равноправностью этих альтернативных подходов, ни один контрпример не может уже безусловно считаться логическим, выступая скорее как эвристический контрпример, допускающий свою трактовку и как контрпримера, и как исключения. Так находит свое оправдание и метод устранения монстров. Я приму теперь более общий термин «обогащение понятия», который включает в себя как возможность ограничения, так и расширения понятия. И ограничение, и расширение – это формы обогащения понятия. Обогащаться, по-видимому,

могут и уже ранее обогащенные понятия. Так постепенно в результате критики контрпримерами наивная система понятий все более замещается обогащенной системой понятий. Такой рост знания сопровождается, по мнению Лакатоса, постоянной сменой языков. Например, он пишет: «Обычно при появлении контрпримера вы можете выбирать: или вы отказываетесь заниматься им, так как на вашем *данном* языке L_1 он совсем не контрпример, или вы согласитесь изменить ваш язык при помощи расширения понятия и принять этот контрпример на вашем новом языке L_2» (1, С.129). И далее: «По мере роста знания меняются языки. «Каждый творческий период является одновременно периодом изменения языка» (ссылка на Felix. L'aspect moderne des mathematiques. Paris. P.10. – В.М.). Рост знания нельзя промоделировать на любом заданном языке… Лингвистика занимается динамикой языка, а логика его статикой» (1, С.129-130). Т.о. здесь у Лакатоса явно выражена позиция отождествления логики и статики знания. Наконец, метод синтеза предлагает третью альтернативу обогащения понятия – создание нового, более интегрального, понятия, способного объединить в себе и примеры и контрпримеры (таково, например, понятие n-связного многогранника). Лакатос отмечает, что интегральные понятия могут отличаться разной «глубиной синтеза», ослабление которой проявляет себя в довольно поверхностных обобщениях соотношения f(V, E, F)=0 для 6-го и 7-го этапов метода синтеза. В лице ученика "Каппы" формулируется позиция некоторого методологического анархизма, утверждающего ничем не ограниченную возможность расширения любых понятий, в том числе и понятий метаязыка, таких, например, как понятие "контрпример", "расширение понятий", и т.д. Такого рода неограниченное обогащение понятий представляется "Каппой" как несовместимое с идеями "доказательство" и "истина". Здесь Лакатос формулирует своего рода дополнительность точности (достоверности) и осмысленности понятия: "Если вы хотите, -

говорит он устами “Каппы”, - чтобы математика имела смысл, то вы должны отказаться от достоверности. Если вы хотите достоверности, избавьтесь от смысла. Вы не можете иметь и то и другое. *Тарабарщина безопасна от опровержений, имеющие смысл предложения могут быть опровергнуты расширением понятий*” (1, С.142). Противясь такой позиции, ученик “Гамма” пытается сформулировать ряд методологических правил для некоторого варианта “смягченного расширения” понятий. Здесь предлагаются следующие ограничения на расширение: 1)расширение должно быть “небольшим, чтобы мы не могли его заметить; если бы его действительная – расширяющая – природа была увидена, то оно могло не быть принято как законная критика” (1, С.142), 2) расширение должно сосредоточиваться “на одном частном понятии”, не затрагивая до поры остальных понятий, 3) предполагается наличие неопровергаемых составных частей у понятия, например, логическая форма понятия. Однако учитель считает, что математика приняла и более радикальную форму расширения понятий: “*Эта революция в математическом критицизме изменила понятие о математической истине, изменила стандарты математического доказательства, изменила характер математического роста*” (1, С.145). Однако совместима ли эта новая система критицизма с понятиями истины, доказательства, и т.д., и, если да, то в какой форме, - все эти вопросы остаются Лакатосом неразрешенными.

Переходя теперь к попытке обобщения описанного процесса обогащения понятий, введем некоторые предварительные определения.

1. <u>Ментальная онтология</u>.

Во-первых, мы видим, что процесс мышления и обогащения понятий протекает в некотором «пространстве мысли», включающем в себя:

- объекты: основные (многогранник), объекты-целые (системы многогранников), объекты-части (многоугольник, ребро, вершина),
- преобразования объектов, например, вырезание грани, растяжение.

- Предикаты объектов, преобразований, например, «быть многосвязным», «быть эйлеровым».
- Гипотезы: основная (основная догадка), вспомогательные (формулировки лемм).
- Доказательство, леммы.
- Определения объектов, преобразований, предикатов.
- Контрпримеры для гипотез: глобальные или локальные.

Все подобного рода концепты пока могут быть вполне выражены в рамках той или иной формальной теории T в обычном ее понимании (например, как теории первого порядка или формальной теории, использующей теорию типов).

2. Процесс обогащения знания на основе контрпримеров.

Далее, неоднократно наблюдая выше, каким образом происходит обогащение того или иного понятия в результате атаки контрпримерами, можно отметить во всех подобных случаях некоторый типичный механизм, который я буду называть процессом обогащения знания на основе контрпримеров. Этапы этого процесса следующие:

1. Есть некоторое суждение p и контрпример k для него, т.е. k – это такая сущность, что для k неверно p. Суждение p может быть основной догадкой (тогда k – глобальный контрпример) или формулировкой какой-либо леммы (тогда k – локальный контрпример).
2. Осуществляется анализ основания неложности суждения p для контрпримера k, т.е. выявляется то основание, благодаря которому p перестает быть ложным для k. Введем вначале процедуру выделения частного основания ложности p для k, обозначив ее через «$bas_L(p,k)$». Предполагается, что результатом этой процедуры является некоторое понятие n, которое может быть представлено и как предикат P «быть n». Например, пытаясь выяснить, почему увенчанный куб является

контрпримером для Леммы 2, мы можем понять, что увенчанный куб содержит кольцевую грань. Понятие «кольцевая грань увенчанного куба» – это и есть частное основание ложности для Леммы 2 в данном случае как результат процедуры $bas_L(p,k)$. Далее частное основание ложности обычно обобщается до <u>общего основания ложности</u>. Например, кольцевая грань обобщается до идеи многосвязной грани вообще. Процедуру обобщения обозначим через «gen», т.е. от $bas_L(p,k)$ переходят к $gen(bas_L(p,k)) = Bas_L(p,k)$, и, наконец, от общего основания ложности, $Bas_L(p,k)$, переходят к некоторому его условному отрицанию, т.е. отрицанию в рамках некоторого универсума U (отрицание понятия n понимается как такое понятие $\neg n$, которое может быть выражено предикатом $\neg P$ - отрицанием предиката P «быть n». Далее, говоря о понятиях n, я буду понимать их как предикаты P. В том числе универсум U – это также некоторый предикат). В нашем примере таким универсумом будет пространство «односвязность - многосвязность», в связи с чем условным отрицанием многосвязности окажется понятие «односвязности». Если условное отрицание в рамках универсума U обозначить через $\neg_U$, где $\neg_U P = (\neg P) \wedge U$, где $\wedge$ - конъюнкция, то окончательно процедуру анализа основания неложности суждения p для контрпримера k, ($Bas_T(p,k)$), можно записать в виде: $Bas_T(p,k) = \neg_U gen(bas_L(p,k)) = C$. Результатом анализа основания неложности контрпримера k для суждения p будет <u>основание неложности</u> C суждения p для контрпримера k, т.е. некоторое ограничивающее понятие (предикат) (в нашем примере C – «быть односвязным»), добавление которого к некоторому понятию в суждении p приведет к такому ограничению этого понятия, что p уже перестанет относиться к контрпримеру k. В нашем примере таким понятием в Лемме 2 будет понятие «грань». Обозначим понятие, критикуемое контрпримером k в суждении p, через N (N также понимается как некоторый предикат). Тогда суждение p, содержащее понятие N, можно обозначить как p[N].

В итоге для устранителей монстров понятие N ограничивается основанием неложности C – так обогащение понятия выражается в данном случае в его ограничении. Посмотрим теперь более пристально на отношение понятий N и C. Для нашего примера N – это «быть гранью», C – «быть односвязной гранью». Основание неложности C и общее основание ложности $\neg_U C$ («быть многосвязной гранью» в нашем примере) образуют вместе универсум $U = C \vee \neg_U C$, где $\vee$ - дизъюнкция. Понятие N может приобретать дальнейшую дифференцировку в рамках универсума U, принимая либо свойство C, либо свойство $\neg_U C$. Таким образом, появление контрпримера k заставляет открывать некоторый универсум U возможной дальнейшей дифференциации критикуемого понятия N. В этом универсуме понятие N может принять на себя различные составляющие: устранители монстров полагают, что понятие N изначально несет в себе основание неложности C, в то время как опровергатели, наоборот, предполагая возможность применимости понятия N к контрпримеру k, для которого верно как частное, так и общее основание ложности $\neg_U C$, тем самым допускают, что понятие N изначально расширено в своем определении до обоих альтернативных определений универсума $U= C \vee \neg_U C$. Эти ситуации можно выразить специальной символикой. Обозначим понятие N, рассматриваемое в связи с тем или иным своим определением из универсума U, в виде пары (N, X), где X – это та или иная составляющая универсума U. Например, для устранителей монстров понятие N дано как пара (N, C), для опровергателей – как пара (N, U). Т.к. C – часть универсума U, то с точки зрения устранителей монстров опровергатели «растягивают» (от C до U) понятия; с точки зрения опровергателей, наоборот, устранители монстров «сжимают» (от U до C) понятия. Для опровергателей в явном виде обогащение знания выразится в переходе от N к (N, U) – это будет обогащение как расширение понятия (сравнительно с позицией устранителей монстров, которые переходят от N к (N, C)).

Рассмотрим с этой точки все основные методы анализа, описанные Лакатосом.

1. Метод трансформации лемм (Met_0). Здесь мы имеем дело с локальным и неглобальным контрпримером k, т.е. контрпримером для некоторой леммы L в рамках некоторой теории T. В процедурах $Bas_L(L,k) = \urcorner_U C$ и $Bas_T(L,k) = C$ выясняются основания ложности ($\urcorner_U C$) и неложности (C) данной леммы для контрпримера. В результате этого анализа лемма L ограничивается основанием неложности C, что можно обозначить как $L{\downarrow}C$ – «лемма L при условии C». Если N – ограничиваемое понятие в лемме L, то можно записать: $L[N]{\downarrow}C = L[N{\downarrow}C]$, т.е. ограничение леммы L, в которую входит понятие N, - это то же самое, что вхождение в лемму L и связанных с этим вхождений в теорию T ограниченного понятия N, т.е. понятия $N{\downarrow}C$ – «N при условии C». Объект $N{\downarrow}C$ я буду понимать как пару (N,C) (см. выше). Во всем остальном теория T не изменяется. Теорию T, в которой произошли описанные процедуры, обозначим также через $T{\downarrow}C$, понимая под этим только описанное выше изменение леммы (ниже в методе инкорпорации лемм теория $T{\downarrow}C$ понимается аналогично). Построение теории $T{\downarrow}C$ приводит к включению контрпримера k для теории T как примера теории $T{\downarrow}C$.
2. Метод сдачи (Met_1). В этом случае мы имеем дело с глобальным контрпримером k, т.е. контрпримером для основной догадки H в некоторой теории T. В процедурах $Bas_L(H,k) = \urcorner_U C$ и $Bas_T(H,k) = C$ могут быть выяснены основания ложности ($\urcorner_U C$) и неложности (C)

основной догадки для контрпримера (хотя сами «опровергатели» в этом не заинтересованы). Опровергаемое контрпримером k понятие N, входящее в основную догадку, трактуется как пара (N,U), где $U = \rceil_U C \vee C$, что делает опровержимой контрпримером и основную догадку. Основную догадку H, содержащую понятие N как пару (N,U), я обозначу через $H[(N,U)] = H[N]\downarrow U$. Если быть точным, то мы должны говорить все-таки о новой теории $T\downarrow U$ и в этом случае, отличной от первоначальной теории T (под теорией $T\downarrow U$ я понимаю здесь ту же теорию T, в которой только вхождение понятия N в основную догадку и связанные с этим вхождения понятия N в теории T заменены на вхождение $N\downarrow U$). Поэтому опровергается контрпримером k именно теория $T\downarrow U$.

3. <u>Метод устранения монстров</u> (Met_2). В этом случае мы также имеем дело с глобальным контрпримером k, т.е. контрпримером для основной догадки H в некоторой теории T. В процедурах $Bas_L(H,k) = \rceil_U C$ и $Bas_T(H,k) = C$ выясняются основания ложности ($\rceil_U C$) и неложности (C) основной догадки для контрпримера. Опровергаемое контрпримером k понятие N, входящее в основную догадку, трактуется устранителями монстров как пара (N,C), что делает неопровержимой контрпримером основную догадку. Кроме того, ограничение понятия N до (N,C) рассматривается в данном методе как ограничение в рамках определения понятия N, т.е. множество объектов, ранее обозначаемых понятием N, теперь считаются охватываемым понятием (N,C). Основную догадку H, содержащую понятие N как пару (N,C), я обозначу через $H[(N,C)] = H[N]\downarrow C$. Т.о. теория T ограничивается устранителями до теории $T\downarrow C$, где $T\downarrow C$ – это та же теория T, за исключением того, что вхождения понятия N в основную догадку H и связанные с этим вхождения этого понятия в

теории T меняются на (N,C) (аналогично понимаются теории $T\downarrow C$ или $T\downarrow C^*$ в методах устранения исключений и исправления монстров – см. ниже). В результате такого рода процедуры контрпример k для теории $T\downarrow U$ оказывается исключением для теории $T\downarrow C$.

4. <u>Метод устранения исключений</u> (Met_3). Дан некоторый набор глобальных контрпримеров $k_1, k_2,\ldots,k_n$, т.е. контрпримеров для основной догадки H. Будем считать, что всеми этими контрпримерами опровергается одно понятие N, входящее в догадку H. Проводятся процедуры выяснения оснований ложности и неложности, $Bas_L(H,k_i) = \rceil_{Ui}C_i$ и $Bas_T(H,k_i) = C_i$, основной догадки для каждого из контрпримеров k_i, i = 1,2,…, n. Затем ищется такое понятие C*, что C* влечет каждое из найденных оснований неложности C_i. Понятие C* выражает своего рода «безопасную область», позволяющую, по мнению устранителей исключений, избавить догадку H от контрпримеров. По крайней мере, ограничение понятия N до (N,C*) позволяет сделать основную догадку H неопровержимой для каждого из контрпримеров k_i. Кроме того, ограничивающее условие C*, в отличие от метода устранения монстров, рассматривается в данном случае не как элемент определения понятия N, но как видовой признак, накладываемый извне на понятие N. В остальном этот метод не отличается от метода устранения монстров: теория T ограничивается до теории $T\downarrow C^*$, и контрпримеры $k_1, k_2,\ldots,k_n$ становятся исключениями из теории $T\downarrow C^*$.
5. <u>Метод исправления монстров</u> (Met_4). Начальные условия здесь те же, что и в методе устранения монстров. Дан глобальный контрпример k, т.е. контрпример для основной догадки H (т.е. некоторого понятия N, входящего в H) в некоторой теории T. В процедурах $Bas_L(H,k) = \rceil_U C$ и $Bas_T(H,k) = C$ выясняются основания ложности ($\rceil_U C$) и неложности

(C) основной догадки для контрпримера. Однако затем оказывается, что сущность k может трактоваться двояко – как $I_1(k)$ и $I_2(k)$. Причем, одна интерпретация, например, $I_1(k)$, связана с основанием ложности $\rceil_U C$, а другая, $I_2(k)$, - с основанием неложности C. Интерпретация сущности k как контрпримера для теории $T\downarrow U$ – это именно $I_1(k)$. Вторая интерпретация, $I_2(k)$, - это интерпретация сущности k как примера теории $T\downarrow C$. Т.о. здесь ограничение теории T до теории $T\downarrow C$ так же, как и в методе трансформации лемм, приводит к принятию k в качестве примера теории $T\downarrow C$. Причем, как и в методе устранения монстров, ограничивающее условие C рассматривается как элемент определения понятия N.

6. <u>Метод инкорпорации лемм</u> (Met_5). Здесь мы имеем дело с глобальным и локальным контрпримером k, т.е. контрпримером и для основной догадки H и для некоторой леммы L. Далее проводится анализ основания ложности $Bas_L(L,k) = \rceil_U C$ и неложности $Bas_T(L,k) = C$ леммы L для контрпримера k. Выясняемое условие неложности C леммы L для контрпримера k ограничивает далее некоторое понятие N, входящее в основную догадку H и опровергаемое контрпримером k как глобальным контрпримером. В результате понятие N ограничивается до (N,C). Соответственно, теория T ограничивается до теории $T\downarrow C$, и контрпример k оказывается исключением для теории $T\downarrow C$. Причем, как и в методе устранения исключений, ограничивающее условие C рассматривается как видовое ограничение, накладываемое извне на понятие N.
7. <u>Метод экспликации лемм</u> ($Met_{5.1}$). Этот метод отличен от предыдущего только одним – тем, что контрпример k одновременно с анализом оснований ложности и неложности приводит к эспликации некоторой ранее неявной леммы L.

Итак, в любом из описанных методов мы можем видеть, что первоначальная теория T заменяется некоторой теорией T*, где T* имеет вид T↓X для некоторого ограничивающего понятия X. Сущность k в этом случае является контрпримером только для теории T↓U и исключением для теории T↓C или T↓C*. Поэтому, если быть точным, то следует заметить, что сущность k вообще не определена как контрпример или исключение для теории T. То или иное ее определение уже тем самым предполагает рассмотрение не теории T, но T↓X. В переходе же от T к T↓X нет логической необходимости, по крайней мере, в обычном смысле формальной логики. Поэтому Лакатос и утверждает, что все контрпримеры являются эвристическими, всегда предполагая внелогическую предпосылку замены теории T на теорию T↓X. Отсюда же вытекает и постоянная смена языков в процессе познания, т.к. новая теория T↓X – это всегда и новый язык по отношению к языку теории T.

Теория T может обогащаться по многим понятиям P_i, неоднократно обогащаясь в рамках одного понятия с образованием все новых понятий P^j_i, $j=\overline{1,n_i}$. В связи с очередным принятием понятия P^j_i образуется и соответствующая теория T^j из предшествующей теории T^{j-1}.

В результате описанных выше неоднократных обогащений теория T трансформируется в теорию T^j, и возникает множество исключений для этой теории, бывших ранее глобальными контрпримерами для более ранних версий теории T^j. Одновременно теория T^j и включает в себя локальные и неглобальные контрпримеры своих более ранних версий. Таков итог действия метода анализа.

Далее, начиная с некоторого момента, может возникнуть некоторая новая теория T*, которая на основе метода синтеза включит в себя как примеры теории T^j, так и ее исключения. Затем, теперь уже по отношению к теории T*, вновь может повториться вся описанная процедура. Метод синтеза дает надежду на преодоление этого диссонанса, стремясь включить в теорию Т* по возможности максимальное число универсумов обогащений понятий. Например, в приводимом выше примере метода синтеза для многогранников, понятие “n-связности” оказывается включенным в теорию через конструирование нового основного объекта “нормальный n-связный многогранник”, способного содержать как односвязные, так и многосвязные грани.

Итак, в развитии знания теперь можно было бы говорить о следующих основных этапах:

1. Этап анализа, когда преобладает метод анализа и происходит неоднократное обогащение на основе контрпримеров первоначальной теории Т до некоторой теории T^j.
2. Этап синтеза, на котором методом синтеза создается некоторая теория Т*, включающая, как свои примеры, примеры и исключения теории T^j.

Далее логика развития знания может воспроизводить себя уже на более высоком уровне теории Т*.

Развитие знания в этой модели предполагает рассмотрение понятий не как законченных образований, но как *цепей*, возможно бесконечных, универсумов последующей дифференциации первоначального понятия. Такие цепи тянутся из любого понятия. Теория включает в себя всегда только некоторые отрезки понятийных цепей. Причем, такое включение может быть двояким: теория может включать в себя либо только части универсумов последующей дифференциации (продолжая исключать контрпримеры), либо универсумы в целом (включая в себя и бывшие контрпримеры). Образно теоретическое знание можно представить в виде своего рода ежа, в качестве иголок которого выступают понятийные цепи, а сама теория дана как тот сгусток ментальной плоти, на меру которой удается погрузить внутрь себя, в состав теоретических синтезов, отрезки понятийных цепей. По мере развития знания, по-видимому, растет как число иголок (экспликация лемм в $Met_{5.1}$), так и объем теоретического тела, все полнее погружающего в себя эти иглы. Классическая формальная модель научной теории оказывается в этом случае результатом фиксации определенного этапа развития научного знания, выражаемого в обрезании понятийных цепей до некоторых проявленных контрпримерами отрезков этих цепей и представлении научной теории в меру достигнутого ею синтеза на таких понятийных отрезках.

Замечу, наконец, что процесс развития знания протекает как комплексная деятельность множества субъектов. Отдельные более частные методологии метода анализа – это одновременно выражения деятельностей тех или иных субъектов. Можно, таким образом, говорить о таких субъектах, как «трансформатор лемм» (Met_0), «опровергатель» (Met_1) и «устранитель монстров» (Met_2), «устранитель исключений» (Met_3) и «исправитель монстров» (Met_4), «инкорпоратор лемм» (Met_5) и «экспликатор лемм» ($Met_{5.1}$). Все эти субъекты – подсубъекты субъекта «аналитика» (Met_A), который дополняется субъектом «синтетиком» (Met_S). Наконец, все указанные субъекты – подсубъекты некоторого интегрального субъекта научного познания, выражающего свою деятельность в комплексном «методе доказательств и опровержений». Основная задача, которую ставил перед собой Лакатос, - это, по-видимому, стремление по возможности максимально приблизиться к образу наиболее интегрального субъекта познания, продолжающему быть самим собой, но во все новых образах научной методологии. Наконец, интегральный субъект реализует себя на множестве эмпирических субъектов, роль которых играли ученики и учитель воображаемого класса. Хотя некоторые из учеников приближались к выражению того или иного чистого субъекта, например, ученик «Альфа» во многом выступает как «опровергатель», ученик «Дельта» - как «устранитель монстров», и т.д., но рано или поздно каждый из них обнаруживает зависимость приверженности своей методологии от некоторой системы условий, и за границами этих условий они одинаково оказываются склонными к обращению в «устранителей монстров» (еще более изменчивой оказывается здесь реальная история математики, прослеживаемая Лакатосом в подстрочных примечаниях). Просто у кого-то система условий оказывается более просторной, у кого-то – менее. Наиболее инвариантным выступает в этом случае учитель и сам автор. Замечу, что подобного рода метаметодология, идущая сквозь все произведение Лакатоса, очень напоминает метод «критики отвлеченных начал» в русской философии всеединства (см. напр. (2, 3)), когда для каждого из относительных начал рано или поздно обнаруживаются его границы, и все более устойчивым к этой релятивизации оказывается лишь синтез («всеединство») всех ранее выявленных начал.

Литература

1. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. -М.: Наука, 1967. - 152 с.
2. Моисеев В.И. Феномен “сильной” синергетики: ментальное моделирование “ктойности” и саморазвития // Синергетическая парадигма. Многообразие поисков и подходов. – М.: Прогресс-Традиция, 2000. – С.382 – 399.
3. Моисеев В.И. Логико-философская реконструкция концептуальных оснований русской философии всеединства. – Воронеж: Изд-во Вор. ГУ, 2000. – 106 с.

Составитель - Моисеев Вячеслав Иванович

Редактор Бунина Т.Д.