

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени Н.Г.Чернышевского  
Механико-математический факультет

А.В. Ершов

## Элементы теории категорий

Методическое пособие  
для студентов механико-математического факультета

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{f} & X \times Y & \xrightarrow{g} & Y \\ & \swarrow v & \uparrow h & \searrow u & \\ & & Z & & \end{array}$$

Саратов 2003

# Содержание

<b>1</b>	<b>Простейшие категорные конструкции</b>	<b>5</b>
1.1	Определение и первые примеры категорий . . . . .	5
1.2	Сумма и произведение в категории . . . . .	11
1.3	Универсальные объекты . . . . .	16
1.4	Двойственная категория . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Функторы</b>	<b>20</b>
2.1	Определение и простейшие примеры функторов . . . . .	20
2.2	Эквивалентность категорий . . . . .	29
2.3	Представимые функторы . . . . .	33
2.4	Группы в категориях . . . . .	45
2.5	Сопряженные функторы . . . . .	54

## Введение

Язык теории категорий используется во многих областях современной математики. Очень точно о его специфике сказано в следующей фразе, взятой из Добавления “Язык категорий” к запискам лекций Ю.И. Манина по алгебраической геометрии [12]: “Язык категорий воплощает “социологический” подход к математическому объекту: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных”.

Методы теории категорий нашли серьезное применение в алгебраической топологии, алгебраической геометрии, алгебраической  $K$ -теории и даже в теории узлов. Кроме того, язык категорий играет огромную унифицирующую роль в современной математике, выявляя общекатегорную природу многих конструкций в различных областях математики и тем самым демонстрируя ее единство. Можно сказать, что основные понятия и конструкции теории категорий (как например понятия универсального объекта, представимого функтора) включают в себе общематематические паттерны. Поэтому многие современные математические монографии рассчитаны на читателей, знакомых с основными понятиями теории категорий и владеющих основами “категорного мышления”. Это показывает необходимость для будущего математика-профессионала знания основ этой теории.

Данное пособие преследует скромную цель научить читателя основам языка теории категорий и на примерах продемонстрировать категорную природу таких хорошо известных конструкций, как тензорное произведение векторных пространств, прямое произведение множеств, поле частных целостного кольца и т.д. Этот подход очень полезен при изучении математики, так как, с одной стороны, приучает к определенной математической культуре (например, давая определение категории не забывая о морфизмах), с другой стороны, облегчает запоминание многих конструкций. Например, все основные свойства тензорного произведения векторных пространств закодированы в том, что это – универсальный объект определенной категории, основные свойства свободного произведения групп – что это – сумма в категории всех групп, основное свойство свободной группы  $F(X)$ , порожденной множеством  $X$  – в том, что функтор  $X \mapsto F(X)$  является левым сопряженным к функтору забывания групповой структуры и т.д.

При подборе большинства примеров автор стремился к тому, чтобы с используемыми в них понятиями было знакомо возможно большее число студентов. Те примеры, которые при первом чтении можно пропустить, мы помечили звездочкой \*. Ряд примеров (как то пространство петель  $(\Omega X, \omega_0)$ , аффинная схема  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$  и т.д.) приведены для того, чтобы стимулировать

читателя обратиться к специальной литературе, в которой они разобраны подробнее и, тем самым, воспользоваться удобным случаем познакомиться с различными разделами современной математики.

Мы хотим предупредить читателя о том, что некоторые фундаментальные категорные конструкции оказались вне рамок данного пособия. Прежде всего это касается прямых и обратных (или индуктивных и проективных) пределов. Отметим также, что многие важные приложения теории категорий связаны со специальным классом категорий – т.н. абелевыми категориями, с которыми читатель может познакомиться по специальной литературе (см. [4], [3], а также книги по гомологической алгебре; с идеей производного функтора можно познакомиться, прочитав §21 книги [18]).

Из различных книг, в которых есть материал по теории категорий, автор рекомендует прежде всего § 20 в [18], а также § 13, 14 в [8]; более систематичное изложение читатель может найти в книгах [3], [17], особенно можно рекомендовать главу II из книги [4]. С тензорными категориями и их применением к построению полиномиальных инвариантов узлов можно познакомиться по части 3 книги [6]. Среди монографий, не переведенных на русский язык, но пользующихся известностью в среде математиков, отметим книгу [10]. Много информации можно также почерпнуть из Интернета, в частности, с сайта <http://arxiv.org/>. Например, там опубликована очень неформальная (“Friday-afternoonish”) лекция Тома Лейнстера (Tom Leinster) “Topology and Higher-Dimensional Category Theory: the Rough Idea”, math.CT/0106240, посвященная очень перспективному обобщению понятия категории – так называемым  $n$ -категориям.

В заключении автор выражает искреннюю благодарность профессору М.В. Лосику, прочитавшему предварительный вариант текста и сделавшему ряд ценных замечаний, профессору В.В. Розену, дополнившему список литературы по теории категорий и доценту П.А. Терехину, заметившему несогласованность в тексте первой редакции пособия и указавшему на один общий факт о сопряженных функторах.

# 1 Простейшие категорные конструкции

## 1.1 Определение и первые примеры категорий

**Определение 1.** Категория  $\mathcal{C}$  состоит из следующего набора данных:

- (i) класса (или множества)  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , элементы которого называются *объектами* категории  $\mathcal{C}$ ,
- (ii) набора множеств  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , по одному для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , элементы которых называются *морфизмами* из  $X$  в  $Y$  и обозначаются  $f: X \rightarrow Y$  или  $X \xrightarrow{f} Y$ ,
- (iii) набора отображений

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

по одному для каждой упорядоченной тройки объектов  $X, Y, Z$ . Паре морфизмов  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$  такое отображение ставит в соответствие морфизм из  $X$  в  $Z$ , обозначаемый  $g \circ f$  и называемый *композицией* морфизмов  $f$  и  $g$ .

Эти данные должны удовлетворять следующим аксиомам:

- (a) по каждому морфизму  $f$  однозначно определяются такие  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , что  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , иными словами, множества  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  не пересекаются;
- (b) для каждого объекта  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  существует *тождественный морфизм*  $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ , удовлетворяющий условию: для любых  $Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$  имеют место равенства  $\text{id}_X \circ f = f$ ,  $g \circ \text{id}_X = g$ ;
- (c) композиция морфизмов ассоциативна, т.е. для любых четырех объектов  $W, X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и морфизмов  $f: W \rightarrow X$ ,  $g: X \rightarrow Y$ ,  $h: Y \rightarrow Z$  композиции  $(h \circ g) \circ f$  и  $h \circ (g \circ f)$  суть один и тот же морфизм из  $W$  в  $Z$ .

**Замечания.** 1) Как следует из п. (i) приведенного определения, объекты категории в общем случае не образуют множества, а только *класс* (категория, объекты которой образуют множество, называется *малой*). Во многих смыслах основным примером категории является категория  $\mathcal{S}ets$  “всех” множеств и “всех” отображений между ними (см. пример а) ниже). Следующий парадокс теории множеств, открытый Б. Расселом, показывает, что применяя стандартные операции теории множеств к множеству всех множеств, можно получить

противоречие. А именно, определим  $U$  как множество всех таких множеств  $X$ , что  $X$  не есть элемент  $X$ . В таком случае  $U$  есть элемент  $U$  тогда и только тогда, когда  $U$  не есть элемент  $U$ . С открытием парадокса Рассела математикам стало ясно, что придется как-то ограничить использование тех способов рассуждений, посредством которых он был получен. Для того, чтобы избежать противоречий, было введено понятие класса, более общее, чем понятие множества. Например, все множества образуют класс, не являющийся множеством, и ряд обычных операций над множествами с ним запрещены. Поэтому такое наивное определение категории *Sets* сделало бы невозможными ряд категорных конструкций, о которых будет идти речь далее. Выход из этой ситуации – ввести “универсум”, большое множество множеств, стабильное относительно всех операций, какие могут понадобиться, после чего рассматривать лишь категории, принадлежащие этому универсуму. Впредь мы будем считать, что необходимое обоснование может быть проведено, отсылая заинтересованного читателя за подробностями к книге [3]. В оправдание нашего подхода приведем выдержку из уже цитировавшейся книжки Ю.И. Манина [12]: “... при современном состоянии оснований математики и вопроса о непротиворечивости автору вся проблема представляется несколько академической. Наша позиция близка к точке зрения физика-экспериментатора, не склонного ни фетишизировать, ни ломать свои приборы, пока они приносят результаты.”

2) Для каждого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  тождественный морфизм  $\text{id}_X$  определен однозначно. Действительно, если  $\text{id}_X, \text{id}'_X$  – два морфизма удовлетворяющих равенствам пункта (b), то  $\text{id}_X = \text{id}_X \circ \text{id}'_X = \text{id}'_X$ .

3) Из (c) легко вытекает, что композиция произвольного конечного числа морфизмов, если она определена, не зависит от расстановки скобок.

**Определение 2.** а) Морфизм  $f: X \rightarrow Y$  в категории  $\mathcal{C}$  называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм  $g: Y \rightarrow X$ , что  $f \circ g = \text{id}_Y$ ,  $g \circ f = \text{id}_X$ .

б) Объекты  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , между которыми существует хотя бы один изоморфизм, называются *изоморфными*.

Легко видеть, что отношение “быть изоморфным” есть отношение эквивалентности на  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ . Морфизмы  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow X$  со свойствами, указанными в п. а) определения выше, называются *взаимно обратными*. Каждый изоморфизм  $f: X \rightarrow Y$  однозначно определяет обратный к нему изоморфизм: пусть  $g, g'$  – два таких изоморфизма, тогда  $g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_X \circ g' = g'$ .

**Примеры.** а) Важнейшим примером категории является категория “всех” (точнее, принадлежащих “универсуму”, см. Замечание 1) выше) множеств

и “всех” отображений между ними, обозначаемая  $\mathcal{S}ets$ . Таким образом, элементами  $\text{Ob}(\mathcal{S}ets)$  являются произвольные множества, а множество морфизмов  $\text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(X, Y)$  из объекта  $X$  в объект  $Y$  состоит из произвольных отображений множеств  $f: X \rightarrow Y$ . Композиция морфизмов в данном случае – это обычная композиция отображений множеств, которая, как хорошо известно, ассоциативна, т.е. выполнено условие (с) Определения 1. Морфизм  $\text{id}_X$  – это тождественное отображение  $X \rightarrow X$ , при котором каждый элемент  $x \in X$  переходит в себя. Ясно, что изоморфизмы в рассматриваемой категории – это в точности биекции множеств.

б) Фиксируем множество  $S$ . Рассмотрим категорию  $\mathcal{P}(S)$ , объектами которой являются подмножества  $S$ , а морфизмами – вложения подмножеств. Эта категория интересна тем, что в ней единственными изоморфизмами являются тождественные отображения.

Следующую группу примеров (с), d), e) и f)) образуют категории, объектами которых являются множества с дополнительными структурами, а морфизмами – отображения множеств, согласованные с этими структурами.

с) Через  $\mathcal{T}op$  обозначим категорию, чьими объектами являются все топологические пространства, а морфизмами – *непрерывные* отображения. Изоморфизмы в категории  $\mathcal{T}op$  – гомеоморфизмы топологических пространств.

d) Через  $\mathcal{D}iff$  обозначим категорию, чьими объектами являются бесконечно дифференцируемые многообразия, а морфизмами – *гладкие* отображения. Изоморфизмы в  $\mathcal{D}iff$  называются *диффеоморфизмами*.

e) Пусть  $\mathcal{R}$  есть категория, чьими объектами являются все кольца, а в качестве морфизмов рассматриваются *гомоморфизмы колец*. Изоморфизмы в этой категории – в точности изоморфизмы колец. Аналогично определяются также *категория абелевых групп*  $\mathcal{A}b$  и *категория всех групп*  $\mathcal{G}r$  (морфизмами в двух последних категориях являются *гомоморфизмы групп*).

В дальнейшем в примерах мы будем рассматривать также различные категории алгебр. *Если не оговорено противное, все рассматриваемые ниже алгебры предполагаются ассоциативными и с единицей*. Например, мы будем рассматривать категорию ассоциативных алгебр с единицей над фиксированным полем  $k$ , категорию коммутативных ассоциативных алгебр с единицей над полем  $k$  (заметим, что в качестве морфизмов  $k$ -алгебр с единицей 1 рассматриваются такие гомоморфизмы  $k$ -алгебр, которые отображают 1 в 1). Чтобы не вводить сложных обозначений, все эти категории мы будем обозначать  $\mathcal{A}lg_k$ , каждый раз указывая, какая конкретно категория алгебр имеется в виду (при этом часто опуская термин “ассоциативный”). Также будет рассматриваться категория коммутативных алгебр с единицей над (коммутативным) кольцом  $R$ . В частности, категория коммутативных  $\mathbb{Z}$ -алгебр с единицей будет обозначаться просто  $\mathcal{A}lg$

(заметим, что она совпадает с категорией коммутативных колец с единицей).

f) Фиксируем произвольное поле  $k$  и через  $\mathcal{Vect}_k$  обозначим категорию, чьими объектами являются векторные пространства над  $k$ , а морфизмами – *линейные отображения*. Более общим образом, пусть  $R$  – кольцо с единицей. Тогда можно определить категорию  ${}_R\mathcal{Mod}$ , объектами которой являются унитарные левые  $R$ -модули (напомним, что  $R$ -модуль  $M$  называется *унитарным*, если  $1_R x = x \forall x \in M$ , здесь  $1_R$  – единица кольца  $R$ ), а морфизмами – гомоморфизмы  $R$ -модулей. (Заметим, что категория  ${}_Z\mathcal{Mod}$  совпадает с категорией  $\mathcal{Ab}$ .) Аналогично определяется *категория правых  $R$ -модулей  $\mathcal{Mod}_R$* .

Очень важную роль в математике играет следующая т.н. *гомотопическая категория  $\mathcal{Top}'$* :

g) Объекты категории  $\mathcal{Top}'$  – это произвольные топологические пространства, т.е.  $\text{Ob}(\mathcal{Top}') = \text{Ob}(\mathcal{Top})$  (см. пример c)), морфизмы же определяются по-другому:

$$\text{Hom}_{\mathcal{Top}'}(X, Y) = \{ \text{множество гомотопических классов} \\ \text{непрерывных отображений из } X \text{ в } Y \}$$

(напомним, что гомотопический класс отображения  $f: X \rightarrow Y$  – это класс эквивалентности отношения гомотопности:  $f \sim g \Leftrightarrow$  существует непрерывное отображение  $\Phi: X \times I \rightarrow Y$  (здесь  $I$  – интервал  $[0, 1]$  со стандартной топологией, а на  $X \times I$  рассматривается топология произведения), такое что  $\Phi|_{X \times \{0\}} = f$ ,  $\Phi|_{X \times \{1\}} = g$ , где через  $\Phi|_{X \times \{0\}}$  (соотв.  $\Phi|_{X \times \{1\}}$ ) обозначено ограничение  $\Phi$  на  $X \times \{0\} \subset X \times I$  (соотв. на  $X \times \{1\}$ )).

Следующая группа примеров категорий (примеры h) – l)) должна продемонстрировать читателю, насколько разный исходный материал (моноиды, действия групп, матрицы) может быть использован при конструировании категорий.

h) (Категория  $\mathbb{N}$ ) Категория  $\mathbb{N}$  состоит из одного объекта, обозначаемого  $N$  и морфизмов  $N \rightarrow N$ , соответствующих числам  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Композиция морфизмов определяется по следующему правилу:  $m \circ n = m + n \forall m, n \geq 0$ . Тот факт, что морфизмы  $m \circ n$  и  $m + n$  совпадают, можно наглядно выразить как совпадение двух возможных путей вдоль стрелок в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{n} & N \\ & \searrow & \downarrow m \\ & & N. \\ & \nearrow m+n & \\ N & & \end{array}$$

Такая диаграмма называется *коммутативной*. Тожественным морфизмом  $\text{id}_N$



является, очевидно, 0: т.к.  $0 + m = m$ ,  $n + 0 = n$ , диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{m} & N \\ & \searrow m & \downarrow 0 \\ & & N \xrightarrow{n} N \end{array}$$

коммутативна для любых  $m, n$  (т.е. любые два пути вдоль стрелок диаграммы с общими началом и концом совпадают; в рассматриваемом случае коммутативность всей диаграммы равносильна коммутативности двух треугольников, из которых она состоит). Заметим, что вместо  $\mathbb{N}$  можно взять любую другую полугруппу с единицей (моноид) и определить соответствующую категорию с одним объектом и морфизмами, отвечающими элементам полугруппы: ассоциативность операции в полугруппе обеспечит выполнение условия (с) в Определении 1, а существование единицы – существование тождественного морфизма (т.е. выполнение условия (b) там же). Если моноид является группой, то мы получим категорию, в которой любой морфизм является изоморфизмом (единственного объекта на себя), такие категории называются *группоидами*. Обратно, легко показать, что категория с одним объектом отвечает некоторому моноиду.

i)\* Вот еще пример категории, в которой каждый морфизм является изоморфизмом. Пусть  $X$  – непустое множество, на котором действует группа  $G$ . Напомним (см., например, учебник *Введение в алгебру* А.И. Кострикина), что последнее означает, что каждой паре  $(g, x) \in G \times X$  сопоставлен элемент  $gx \in X$ , причем предполагаются выполненными следующие условия: (1)  $(g_2g_1)x = g_2(g_1x) \forall g_1, g_2 \in G, x \in X$  и (2)  $ex = x \forall x \in X$ , где  $e$  – единичный элемент группы  $G$ .

Чтобы читатель освоился с понятием коммутативной диаграммы, приведем эквивалентное определение действия группы. Для этого заметим, что сопоставление  $(g, x) \mapsto gx$  можно рассматривать как отображение  $\phi: G \times X \rightarrow X$ ,  $\phi(g, x) = gx$ . Пусть  $\mu: G \times G \rightarrow G$  – умножение в группе  $G$  (т.е.  $\mu(g_1, g_2) = g_1g_2 \forall g_1, g_2 \in G$ ). Обозначим через  $E$  группу, состоящую из одного элемента. Пусть  $e: E \rightarrow G$  – вложение единичного элемента (иными словами,  $e$  – гомоморфизм, а следовательно, отображает единственный элемент группы  $E$  в единичный элемент  $e$  группы  $G$ ). Тогда условия (1) и (2) эквивалентны коммутативности следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_X} & G \times X \\ \text{id}_G \times \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ G \times X & \xrightarrow{\phi} & X, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \simeq E \times X & \xrightarrow{e \times \text{id}_X} & G \times X \\ & \searrow \text{id}_X & \downarrow \phi \\ & & X. \end{array}$$

Определим теперь категорию  $\mathcal{C}$  следующим образом:  $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{x \mid x \in X\}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x') = \{g \in G \mid gx = x'\}$ . Другими словами, объектами  $\mathcal{C}$  являются элементы множества  $X$ , а морфизмами – пары  $(g, x)$ ,  $g \in G, x \in X$ , причем  $(g, x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, gx)$ . Композиция  $(g, x)$  и  $(g', x')$  определена только в том случае, когда  $gx = x'$ , причем при выполнении этого условия  $(g', x') \circ (g, x) := (g'g, x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, g'x')$  (посмотрите на  $x \xrightarrow{g} x' \xrightarrow{g'} x''$ ). Тожественный морфизм  $\text{id}_x$  определяется как пара  $(e, x)$ . Читатель легко проверит, что аксиомы категории вытекают из аксиом группы и условий (1), (2) в определении действия, а обратимость произвольного морфизма  $(g, x)$  – из соотношений  $g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$ ,  $g(g^{-1}(gx)) = (gg^{-1})(gx) = e(gx) = gx$ .

j)\* (Категория отношений) Определим категорию  $\mathcal{R}el$  следующим образом. Объекты  $\mathcal{R}el$  – это множества (в данном “универсуме” – см. Замечание 1) на стр. 5), морфизмы  $\text{Hom}_{\mathcal{R}el}(X, Y)$  – подмножества прямого произведения  $X \times Y$ . (Чтобы связать введенные определения с обычным понятием отношения на множестве, заметим что существует взаимно однозначное соответствие между подмножествами  $S \subset X \times X$  и отношениями  $R$  на множестве  $X$ : по подмножеству  $S \subset X \times X$  определяется отношение  $R_S$  следующим образом:  $xR_Sy \Leftrightarrow (x, y) \in S$  и обратно, по отношению определяется соответствующее подмножество.) Композиция  $\varphi: X \rightarrow Y$  и  $\psi: Y \rightarrow Z$  определяется так:

$$\psi \circ \varphi = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ такое что } (x, y) \in \varphi, (y, z) \in \psi\}.$$

Тожественный морфизм  $\text{id}_X$  задается диагональю в прямом произведении:  $\text{id}_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ .

k)\* (Категория гомоморфизмов групп) Определим категорию  $\mathcal{C}$  следующим образом. Объекты  $\mathcal{C}$  – это тройки вида  $(A, B, \varphi)$ , где  $A, B$  – группы, а  $\varphi: A \rightarrow B$  – гомоморфизм групп. Морфизм из объекта  $(A, B, \varphi)$  в объект  $(A', B', \varphi')$  – это пара  $(\alpha, \beta)$  гомоморфизмов групп  $\alpha: A \rightarrow A'$ ,  $\beta: B \rightarrow B'$  такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' \end{array}$$

коммутативна, т.е.  $\varphi' \circ \alpha = \beta \circ \varphi: A \rightarrow B'$ . Если  $(\alpha', \beta') \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}((A', B', \varphi'), (A'', B'', \varphi''))$ , то композиция  $(\alpha', \beta') \circ (\alpha, \beta)$  – это морфизм  $(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}((A, B, \varphi), (A'', B'', \varphi''))$ .

1) (Категория  $\text{Matr}(K)$ ) Пусть  $K$  – произвольное коммутативное кольцо. Рассмотрим категорию  $\text{Matr}(K)$ , чьими объектами являются числа  $1, 2, 3, \dots$ , а морфизмы  $m \rightarrow n$  – матрицы размера  $n \times m$  с элементами из  $K$ . Определим композицию морфизмов  $m \xrightarrow{B} n$  и  $n \xrightarrow{A} p$  как морфизм, отвечающий произведению

матриц  $AB$  (оно является матрицей размера  $p \times m$ ). Из правила умножения матриц вытекает, что композиция  $m \xrightarrow{B} n \xrightarrow{A} p$  всегда определена. Условие ассоциативности (с) в Определении 1 вытекает из ассоциативности умножения матриц, а тождественным морфизмом  $\text{id}_m$  является, очевидно, единичная матрица порядка  $m$ .

И в заключение два примера конструирования новых категорий из заданных.

м) Пусть  $\mathcal{C}$  – некоторая категория. Построим по ней некоторую новую категорию  $\bar{\mathcal{C}}$ . Объектами  $\bar{\mathcal{C}}$  по определению считаются классы изоморфизма объектов категории  $\mathcal{C}$ , морфизмы определяются как “морфизмы по модулю изоморфизмов”, т.е. как классы следующей эквивалентности: если  $f: A \rightarrow B$  и  $f': A' \rightarrow B'$  – морфизмы в  $\mathcal{C}$  и  $\bar{A} = \bar{A}'$ ,  $\bar{B} = \bar{B}'$  как объекты в  $\bar{\mathcal{C}}$ , то  $f \sim f'$  если существуют изоморфизмы  $\alpha: A \rightarrow A'$ ,  $\beta': B' \rightarrow B$  такие что  $f = \beta' \circ f' \circ \alpha$ .

п) Пусть снова  $\mathcal{C}$  – некоторая категория. Фиксируем некоторый объект  $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и построим новую категорию  $\mathcal{C}_S$  “объектов над  $S$ ” следующим образом. Объекты  $\mathcal{C}_S$  – это всевозможные пары  $(X, \varphi)$ , где  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$ . Морфизм из  $(X, \varphi) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_S)$  в  $(Y, \psi) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_S)$  – это морфизм  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  такой что  $\varphi = \psi \circ f$ , т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & \searrow \psi & \\ S & & \end{array}$$

коммутативна. С этой конструкцией мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем. Имеется также “дуальная” версия  $\mathcal{C}^S$  этой конструкции, когда вместо объектов  $(X, \varphi)$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$  рассматриваются объекты  $(X, \varphi)$ ,  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X)$ .

## 1.2 Сумма и произведение в категории

Приведенные в первой части определения и рассмотренные примеры показывают, что теорию категорий можно рассматривать как некоторый математический язык, который призван описывать не структуру объектов (как это делает язык теории множеств), а их связи (выражаемые посредством морфизмов) с другими объектами той же категории. Простейшее конкретное высказывание на этом языке состоит в том, что некоторая композиция морфизмов равна некоторой другой композиции, скажем  $g \circ f = f' \circ g'$ . Такое тождество удобно представлять как совпадение двух возможных путей из  $X$  в  $Z$  вдоль стрелок в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ U & \xrightarrow{f'} & Z. \end{array}$$

Про такую диаграмму говорят, что она коммутативна (мы уже пользовались этой терминологией в примерах h), i), k), n) предыдущего пункта).

Ниже в этой части мы рассматриваем определения суммы и произведения объектов произвольной категории (на простейшем примере двух объектов). Это даст нам первые примеры категорных конструкций.

В теории множеств известна операция *несвязного объединения*  $X \amalg Y$  двух произвольных множеств  $X$  и  $Y$  (которые не предполагаются содержащимися в едином множестве). По некоторым соображениям, смысл которых будет ясен из дальнейшего, обозначим  $X \amalg Y$  через  $X + Y$  и будем называть *суммой* множеств  $X$  и  $Y$ . Для  $X + Y$  определены *канонические вложения*  $i_X: X \rightarrow X + Y$  и  $i_Y: Y \rightarrow X + Y$ . Пусть теперь  $Z$  – произвольное множество, в которое задана пара отображений  $u: X \rightarrow Z$ ,  $v: Y \rightarrow Z$ . Тогда *существует и единственно такое отображение*  $h: X + Y \rightarrow Z$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & X + Y & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ & \searrow u & \downarrow h & \swarrow v & \\ & & Z & & \end{array} \quad (1)$$

*коммутативна* (т.е.  $h \circ i_X = u$ ,  $h \circ i_Y = v$ ). Очевидно, что такое  $h$  задается следующим образом: для произвольного  $t \in X \amalg Y$   $h(t) = u(t)$ , если  $t \in X$  и  $h(t) = v(t)$ , если  $t \in Y$ .

Над множествами есть также операция *прямого произведения*, сопоставляющая паре множеств  $X, Y$  множество  $X \times Y$  (состоящее из пар  $(x, y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ). Для прямого произведения  $X \times Y$  определены *канонические проекции*  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto x$ ,  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ ,  $(x, y) \mapsto y$ . Прямое произведение множеств  $X \times Y$  обладает следующим свойством: *для любого множества  $Z$  и отображений  $u: Z \rightarrow X$ ,  $v: Z \rightarrow Y$  существует и притом только одно отображение  $h: Z \rightarrow X \times Y$ , делающее диаграмму*

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xleftarrow{\pi_X} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ & & \swarrow u & & \uparrow h & & \searrow v \\ & & & & Z & & \end{array} \quad (2)$$

*коммутативной* (т.е.  $\pi_X \circ h = u$ ,  $\pi_Y \circ h = v$ ). Очевидно, что на элементах отображение  $h$  задается следующей формулой:  $h(z) = (u(z), v(z)) \forall z \in Z$ .

Мы видим, что определения суммы и произведения множеств могут быть даны в чисто категорных терминах с помощью диаграмм (1) и (2), и поэтому определения *суммы* и *произведения* двух объектов обобщаются на произвольную категорию  $\mathcal{C}$  (заметим, что диаграммами (1) и (2) сумма и произведение определяются не однозначно, а только с точностью до канонического изоморфизма – см. конец этого пункта). Например, *суммой* объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  называется

объект в  $\mathcal{C}$ , обозначаемый  $X + Y$ , заданный вместе с парой морфизмов  $i_X: X \rightarrow X + Y$ ,  $i_Y: Y \rightarrow X + Y$ , для которого выполнено следующее условие: для любой тройки, состоящей из объекта  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и пары морфизмов  $u: X \rightarrow Z$ ,  $v: Y \rightarrow Z$  существует и притом единственный морфизм  $h: X + Y \rightarrow Z$ , делающий диаграмму (1) коммутативной (сразу отметим, что сумма и произведение в произвольной категории могут не существовать). Таким образом, в категории  $\mathcal{S}ets$  сумма и произведение произвольных двух объектов существуют и совпадают соответственно с несвязным объединением и прямым произведением множеств.

**Примеры.** а) Покажем, что в категории  $\mathcal{T}op$  топологических пространств и непрерывных отображений категорным произведением является обычное произведение топологических пространств. Итак, пусть  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$  – топологические пространства с топологиями  $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$  соответственно. Напомним, что их произведение есть множество  $X \times Y$  с топологией произведения  $\mathcal{O}_{X \times Y}$  (ее базу образуют все подмножества вида  $U \times V$ ,  $U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y$ ). Во-первых, покажем что отображения  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ ,  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  непрерывны. Действительно, для открытого  $U \subset X$  прообраз  $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$  открыт в топологии произведения на  $X \times Y$ , аналогично для  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ . Для того, чтобы доказать, что топологическое пространство  $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$  действительно является категорным произведением пространств  $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ , достаточно проверить, что для произвольного топологического пространства  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  и пары непрерывных отображений  $u: Z \rightarrow X, v: Z \rightarrow Y$ , отображение  $h: Z \rightarrow X \times Y$ ,  $h(z) = (u(z), v(z))$  является непрерывным (единственность  $h$  с требуемыми свойствами вытекает из того, что  $h$  – единственное отображение множеств  $Z \rightarrow X \times Y$  такое что  $\pi_X \circ h = u, \pi_Y \circ h = v$ ). Легко проверить, что  $h^{-1}(U \times V) = u^{-1}(U) \cap v^{-1}(V)$ , т.е. открыто в  $Z$  для открытых  $U \subset X, V \subset Y$ . Отсюда следует, что прообраз любого открытого множества, принадлежащего базе топологии на  $X \times Y$ , открыт в  $Z$ , т.е.  $h$  действительно непрерывно.

Суммой в категории  $\mathcal{T}op$  является т.н. *несвязная сумма* топологических пространств.

а') Это пример – небольшая модификация предыдущего. Рассмотрим следующий вариант  $\mathcal{PT}op$  категории  $\mathcal{T}op$ : объекты категории  $\mathcal{PT}op$  – это топологические пространства с отмеченной точкой, т.е. пары  $(X, x_0)$ , где  $x_0 \in X$ . Морфизмы  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{PT}op}((X, x_0), (Y, y_0))$  – это такие непрерывные отображения  $f: X \rightarrow Y$ , что  $f(x_0) = y_0$  (т.е. отображают отмеченную точку в отмеченную точку). Легко проверить, что в этой категории произведение объектов  $(X, x_0) \times (Y, y_0)$  – это пара  $(X \times Y, (x_0, y_0))$ , а сумма  $(X, x_0) + (Y, y_0)$  – это т.н. букет  $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ , т.е. обычное несвязное объединение с отождествленными отмеченными точками (формально, факторпространство пространства  $X \amalg Y$  по отношению эквивалентности  $z \sim w \Leftrightarrow$  либо  $z = w$  либо  $z = x_0, w = y_0$ ). Например, букет

двух окружностей – это “восьмерка”  $\infty$ .

б) В категории абелевых групп  $\mathcal{A}b$  (и даже модулей над заданным кольцом) прямая сумма  $A \oplus B$  обладает и вложениями  $A \xrightarrow{i_A} A \oplus B$ ,  $a \mapsto (a, 0)$ ,  $B \xrightarrow{i_B} A \oplus B$ ,  $b \mapsto (0, b)$ , и каноническими проекциями  $A \oplus B \xrightarrow{\pi_A} A$ ,  $(a, b) \mapsto a$ ,  $A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B$ ,  $(a, b) \mapsto b$ , причем выполнены условия, описываемые как диаграммой (1), так и диаграммой (2) (конечно,  $u$ ,  $v$  и  $h$  теперь являются гомоморфизмами групп, а не произвольными отображениями). Таким образом, в категории  $\mathcal{A}b$  сумма и произведение объектов совпадают. В случае же категории “всех” групп  $\mathcal{G}r$  дело обстоит по-другому. Для прямого произведения  $G \times H$  определены канонические гомоморфизмы  $G \times H \rightarrow G$  и  $G \times H \rightarrow H$ , причем выполнены условия, изображенные диаграммой (2). Но хотя вложения  $f: G \rightarrow G \times H$  и  $g: H \rightarrow G \times H$  и определены, свойство, описываемое диаграммой (1), не имеет места. Чтобы показать это, достаточно взять в качестве  $K$  группу, имеющую подгруппы, изоморфные  $G$  и  $H$ , но такие, что их элементы попарно не коммутируют (можно показать, что такая группа существует при  $G \neq \{e\}$ ,  $H \neq \{e\}$  – см. ниже), а за  $u$  и  $v$  – изоморфизмы  $G$  и  $H$  с этими подгруппами. Так как в  $G \times H$  элементы вида  $f(\alpha)$ ,  $\alpha \in G$  коммутируют с элементами вида  $g(\beta)$ ,  $\beta \in H$ , то ни при каком гомоморфизме  $h$  диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{f} & G \times H & \xleftarrow{g} & H \\ & \searrow u & \downarrow h & \swarrow v & \\ & & K & & \end{array}$$

не будет коммутативной. (Действительно, по условию существуют  $\alpha \in G$ ,  $\beta \in H$  такие что  $u(\alpha)v(\beta)u(\alpha)^{-1}v(\beta)^{-1} \neq e$ . Однако  $f(\alpha)g(\beta)f(\alpha)^{-1}g(\beta)^{-1} = e$  в  $G \times H$ , поэтому если бы существовал гомоморфизм  $h$  с требуемыми свойствами, то мы бы имели  $e = h(e) = h(f(\alpha)g(\beta)f(\alpha)^{-1}g(\beta)^{-1}) = h(f(\alpha))h(g(\beta))h(f(\alpha))^{-1}h(g(\beta))^{-1} = u(\alpha)v(\beta)u(\alpha)^{-1}v(\beta)^{-1} \neq e$  – противоречие.)

Однако в категории  $\mathcal{G}r$  сумма все же существует и ее конструкция называется *свободным произведением групп*  $G$  и  $H$  и обозначается  $G \star H$ . Это группа, порожденная двумя подгруппами  $G'$  и  $H'$ , изоморфными  $G$  и  $H$ , в которой их элементы не связаны никакими соотношениями, кроме выполняющихся в  $G'$  и  $H'$  по отдельности (морфизмы  $i_G$  и  $i_H$  – изоморфные вложения  $G \rightarrow G \star H$ ,  $H \rightarrow G \star H$ , чьи образы суть  $G'$  и  $H'$  соответственно). В частности, свободное произведение двух свободных циклических групп  $\mathbb{Z}$  – это свободная группа  $S_2$  с двумя образующими (т.е. это группа приведенных слов в алфавите из двух букв  $s_1, s_2$  относительно операции произведения слов. *Словом* в алфавите  $s_1, \dots, s_n$  называется последовательность символов  $s_i$  и  $s_j^{-1}$ , написанная в произвольном порядке, например  $s_1s_2s_2s_1^{-1}s_3$ . Допускается и *пустое слово*  $e$ , в которое не входит ни один символ. Слово называется *приведенным*, если в нем нигде рядом не

стоят символы  $s_i$  и  $s_i^{-1}$ . Произведением слов  $A$  и  $B$  называется слово, которое получается, если написать  $B$  за  $A$  и затем выбрасывать все стоящие рядом пары  $s_i$  и  $s_i^{-1}$ , пока не получится приведенное слово (может быть, пустое). Множество приведенных слов с этой операцией умножения образует группу, например, обратным к выписанному выше слову будет  $s_3^{-1}s_1s_2^{-1}s_2^{-1}s_1^{-1}$ . Эта группа называется *свободной группой с  $n$  образующими* и обозначается  $S_n$ . Для читателей, знакомых с понятием фундаментальной группы, отметим, что  $S_n$  может быть реализована как фундаментальная группа плоскости с  $n$  выколотыми точками). Т.к. группы  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = S_2$  не изоморфны друг другу (например, последняя группа даже не является абелевой), мы видим, что произведение двух абелевых групп зависит от того, рассматриваем ли мы их как объекты категории абелевых групп  $\mathcal{Ab}$  или всех групп  $\mathcal{Gr}$ .

с) Разберем еще один пример. Рассмотрим категорию коммутативных алгебр с единицей над заданным кольцом  $R$ , морфизмами в которой являются гомоморфизмы алгебр над  $R$ , переводящие единицу в единицу. Прямая сумма  $A \oplus B$  и ее канонические проекции  $\pi_A: A \oplus B \rightarrow A$  и  $\pi_B: A \oplus B \rightarrow B$  обладают свойствами, описываемыми диаграммой (2). Хотя имеются естественные вложения  $f: A \rightarrow A \oplus B$  и  $g: B \rightarrow A \oplus B$ , но аналог диаграммы (1) места не имеет: дело в том, что для элементов  $a \in A$  и  $b \in B$  в  $A \oplus B$  всегда  $ab = 0$ , но может существовать кольцо  $C$ , содержащее кольца  $A'$  и  $B'$ , изоморфные  $A$  и  $B$ , для которых такое соотношение не выполнено, и тогда гомоморфизма  $h: A \oplus B \rightarrow C$  с нужными свойствами нет. В качестве конкретного примера можно взять  $R = \mathbb{Z}$ ,  $A = B = \mathbb{Z}[t]$ ,  $C = \mathbb{Z}[x, y]$  и гомоморфизмы  $u: A \rightarrow C$ ,  $v: B \rightarrow C$ , определенные условиями  $u(t) = x$ ,  $v(t) = y$  соответственно. Легко видеть, что в рассматриваемой категории роль суммы играет *тензорное произведение  $A \otimes_R B$  алгебр над  $R$*  вместе с морфизмами  $i_A: A \rightarrow A \otimes_R B$ ,  $a \mapsto a \otimes 1_B$ ,  $i_B: B \rightarrow A \otimes_R B$ ,  $b \mapsto 1_A \otimes b$  (здесь  $1_A$  и  $1_B$  – единицы соответственно в кольцах  $A$  и  $B$ ).

d) И, наконец, рассмотрим сумму и произведение в категории  $\mathcal{P}(S)$ , которая рассматривалась в примере b) на странице 7. Оказывается, в этой категории произведение двух объектов, т.е. подмножеств  $X, Y \subset S$ , есть пересечение  $X \cap Y$ .  $X$  и  $Y$  как подмножеств в  $S$ , а роль канонических проекций играют вложения  $\pi_X: X \cap Y \rightarrow X$ ,  $\pi_Y: X \cap Y \rightarrow Y$  пересечения в качестве подмножества в  $X$  и в  $Y$ . Далее, сумма  $X$  и  $Y$  – это просто объединение  $X \cup Y$ .  $X$  и  $Y$  как подмножеств в  $S$ , а  $i_X: X \rightarrow X \cup Y$ ,  $i_Y: Y \rightarrow X \cup Y$  – канонические вложения. Читателю предлагается проверить справедливость этих утверждений самостоятельно.

Проверим, что для любых двух объектов  $X, Y$  произвольной категории  $\mathcal{C}$  их сумма  $X+Y$ ,  $i_X$ ,  $i_Y$  и произведение  $X \times Y$ ,  $\pi_X$ ,  $\pi_Y$  (если, конечно, они существуют), определены однозначно с точностью до канонического изоморфизма. Пусть, например,  $R, i_X, i_Y$  и  $S, i'_X, i'_Y$  – суммы объектов  $X$  и  $Y$ . Тогда существуют

единственные морфизмы  $h: S \rightarrow R$ ,  $k: R \rightarrow S$ , делающие коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & R & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ & \searrow i'_X & \uparrow h & \downarrow k & \swarrow i'_Y \\ & & S & & \end{array}$$

Отсюда  $i_X = h \circ i'_X$ ,  $i'_X = k \circ i_X$ , т.е.  $i_X = (h \circ k) \circ i_X$ , и аналогично  $i_Y = (h \circ k) \circ i_Y$ . Мы видим, что  $h \circ k$  делает следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & R & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ & \searrow i_X & \downarrow h \circ k & \swarrow i_Y & \\ & & R & & \end{array}$$

коммутативной. Эта диаграмма остается коммутативной, если в ней заменить  $h \circ k$  на  $\text{id}_R$ . Теперь по свойству единственности отображения  $h$  в диаграмме (1), мы получаем что  $h \circ k = \text{id}_R$ . Аналогично доказывается, что  $k \circ h = \text{id}_S$ . Мы получили, что для двух сумм  $R, i_X, i_Y$  и  $S, i'_X, i'_Y$  объектов  $X$  и  $Y$  существуют такие единственные изоморфизмы объектов  $h: S \rightarrow R$  и  $k: R \rightarrow S$ , что  $i_X = h \circ i'_X$ ,  $i_Y = h \circ i'_Y$  и  $i'_X = k \circ i_X$ ,  $i'_Y = k \circ i_Y$ . Фраза “сумма объектов категории определена однозначно с точностью до канонического изоморфизма” как раз это и означает.

### 1.3 Универсальные объекты

**Определение 3.** Объект  $X$  категории  $\mathcal{C}$  называется *начальным* (или *инициальным*), если для всякого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  множество  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  состоит ровно из одного элемента. Объект  $X$  категории  $\mathcal{C}$  называется *конечным* (или *финальным*), если для всякого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  множество  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  состоит ровно из одного элемента. Начальный или конечный объект мы будем также называть общим термином *универсальный объект*.

Неформально говоря, из начального объекта в любой объект категории исходит ровно одна стрелка (т.е. морфизм), аналогично, из любого объекта категории в конечный ведет ровно одна стрелка.

Из определения легко следует, что если в категории есть несколько начальных (конечных) объектов, то все они канонически изоморфны.

**Примеры.** В категории  $\mathcal{S}ets$  начальный и конечный объекты существуют и являются соответственно пустым множеством  $\emptyset$  и множеством  $*$  (“точкой”), состоящим из одного элемента. В категории групп начальный и конечный объекты совпадают с группой, состоящей из одного элемента. В категории  $\mathcal{P}(S)$  (см. пример b) на стр. 7) начальным является  $\emptyset \subset S$ , а конечным – само множество  $S$ .



Категория  $\mathcal{C}_S$ , рассмотренная в примере п) на стр. 11, имеет конечный объект  $(S, \text{id}_S)$ , а категория  $\mathcal{C}^S$  (определенная там же) – начальный объект  $(S, \text{id}_S)$ .

Понятие универсального объекта позволяет с единой точки зрения рассмотреть многие конструкции, изучаемые в математике. В качестве первого примера мы приведем определения суммы и произведения объектов произвольной категории (заодно обобщив их со случая двух объектов на случай произвольных семейств), использующие понятие универсального объекта.

Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  – семейство объектов категории  $\mathcal{C}$ . Рассмотрим новую категорию  $\mathcal{C}_A$ , определяемую следующим образом. Объектами  $\mathcal{C}_A$  являются наборы  $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$ , где  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , а  $f_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, Y) \forall \alpha \in A$ . Морфизмом в  $\mathcal{C}_A$  из объекта  $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$  в объект  $(Z, \{g_\alpha\}_{\alpha \in A})$  по определению является такой морфизм  $h: Y \rightarrow Z$  в категории  $\mathcal{C}$ , что для любого  $\alpha \in A$  коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X_\alpha & \\ f_\alpha \swarrow & & \searrow g_\alpha \\ Y & \xrightarrow{h} & Z. \end{array}$$

Предположим, что в категории  $\mathcal{C}_A$  существует начальный объект  $(X, \{i_\alpha\}_{\alpha \in A})$  (как уже отмечалось, все такие объекты канонически эквивалентны). Тогда объект  $X$  назовем *суммой* семейства  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , а морфизм  $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$  – *каноническим вложением* слагаемого  $X_\alpha$  в сумму.

Определение *произведения*  $P$  семейства  $X_\alpha$  и *канонических проекций*  $\pi_\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X_\alpha)$  получается из определения суммы с помощью обращения стрелок.

Определение *тензорного произведения модулей* над коммутативным кольцом (в частности, тензорное произведение векторных пространств над полем) также можно дать, используя понятие универсального объекта. Пусть  $R$  – коммутативное кольцо и  $M_1, \dots, M_n$  – набор  $R$ -модулей (в частности, если  $R = k$  – поле, то  $M_1, \dots, M_n$  – набор векторных пространств над  $k$ ). Рассмотрим категорию, объектами которой являются всевозможные полилинейные отображения  $\varphi: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow M$  в некоторый  $R$ -модуль  $M$  (свой для каждого объекта). Морфизм из объекта  $\varphi: M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow M$  в объект  $\varphi': M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow M'$  – это такой гомоморфизм  $R$ -модулей  $\psi: M \rightarrow M'$ , для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \dots \times M_n & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \varphi' \downarrow & & \swarrow \psi \\ M' & & \end{array}$$

коммутативна. Начальный объект в этой категории называется *тензорным произведением над  $R$  модулей  $M_1, \dots, M_n$* .

Напомним, что *фактормножеством* множества  $X$ , на котором задано отношение эквивалентности  $\alpha$ , называется множество  $X/\alpha$  классов

эквивалентности указанного отношения. Заметим, что мы имеем также *каноническую проекцию*  $\pi_\alpha: X \rightarrow X/\alpha$ , сопоставляющую каждому элементу  $x \in X$  его класс эквивалентности. Рассмотрим следующую категорию  $\mathcal{C}$ , построенную по множеству  $X$  и отношению  $\alpha$ . Объектом  $\mathcal{C}$  будем считать отображение  $\varphi: X \rightarrow Y$  в какое-нибудь множество  $Y$  (свое для каждого объекта), обладающее свойством  $x\alpha y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$  (т.е. постоянное на классах эквивалентности отношения  $\alpha$ ). Морфизмом в категории  $\mathcal{C}$  из объекта  $\varphi: X \rightarrow Y$  в объект  $\psi: X \rightarrow Z$  назовем такое отображение  $\chi: Y \rightarrow Z$ , для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \psi \downarrow & & \swarrow \chi \\ & & Z \end{array} \quad (3)$$

коммутативна. Тогда легко проверяется, что каноническая проекция  $\pi_\alpha: X \rightarrow X/\alpha$  – начальный объект в категории  $\mathcal{C}$ .

Имеется также модификация последнего примера на случай, когда  $X$  – топологическое пространство. А именно, введем на  $X/\alpha$  *фактортопологию относительно проекции*  $\pi_\alpha: X \rightarrow X/\alpha$ , т.е. сильнейшую топологию, в которой каноническая проекция  $\pi_\alpha$  непрерывна. Определим категорию  $\mathcal{C}_{top}$  следующим образом. Объектом  $\mathcal{C}_{top}$  будем считать *непрерывное* отображение  $\varphi: X \rightarrow Y$  в какие-нибудь *топологическое пространство*  $Y$  (свое для каждого объекта), обладающее свойством  $x\alpha y \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$ . Морфизмом в категории  $\mathcal{C}_{top}$  из объекта  $\varphi: X \rightarrow Y$  в объект  $\psi: X \rightarrow Z$  назовем такое *непрерывное* отображение  $\chi: Y \rightarrow Z$ , для которого диаграмма (3) коммутативна. Тогда легко проверяется, что каноническая проекция  $\pi_\alpha: X \rightarrow X/\alpha$  – начальный объект в категории  $\mathcal{C}_{top}$ .

Примеры универсальных объектов доставляют нам также *кольца частных*. Соответствующую конструкцию мы разберем в очень частном случае. А именно, пусть  $A$  – *целостное кольцо* (напомним, что целостное кольцо – это коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля). Напомним, что для целостного кольца определено *поле частных*  $\text{Quot}(A)$  (иначе называемое *полем рациональных дробей*). Оно состоит из классов эквивалентности выражений  $a/b$ , где  $a, b \in A, b \neq 0$  относительно следующего отношения эквивалентности:

$$(a/b \sim a'/b') \Leftrightarrow (b'a - ba' = 0).$$

Сложение и умножение в  $\text{Quot}(A)$  определяются по обычным формулам для дробей:

$$a/b + a'/b' = (b'a + ba')/bb', \quad (a/b) \cdot (a'/b') = (aa'/bb').$$

Заметим, что поле частных  $\text{Quot}(A)$  определено вместе с *каноническим вложением*  $j_A: A \rightarrow \text{Quot}(A), a \mapsto a/1$ . Рассмотрим теперь категорию, объектами которой являются пары  $(K, f)$ , где  $K$  – некоторое поле, а  $f: A \rightarrow K$  – *вложение*

$A$  в  $K$  в качестве подкольца. Морфизм из  $(K, f)$  в  $(L, g)$  – это такой гомоморфизм (т.е. вложение) полей  $\varphi: K \rightarrow L$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & K \\ g \downarrow & \searrow \varphi & \\ L & & \end{array}$$

коммутативна. Тогда пара  $(\text{Quot}(A), j_A)$  является начальным объектом в данной категории.

Рассмотрим в качестве еще одного примера тензорную алгебру линейного пространства. Пусть  $k$  – фиксированное поле,  $V$  – векторное пространство над  $k$ . Пусть  $T(V)$  – тензорная алгебра пространства  $V$ , а  $i_V: V \rightarrow T(V)$  – каноническое линейное отображение (вложение  $V$  в качестве  $T^1(V) \subset T(V)$  в естественной градуировке тензорной алгебры). Рассмотрим категорию  $\mathcal{C}$ , объектами которой являются линейные отображения  $\varphi: V \rightarrow A$ , где  $A$  – произвольная ассоциативная алгебра с единицей над полем  $k$  (своя для каждого объекта). Морфизм из объекта  $\varphi: V \rightarrow A$  в объект  $\psi: V \rightarrow B$  – это гомоморфизм  $k$ -алгебр с единицей  $\chi: A \rightarrow B$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \psi \downarrow & \searrow \chi & \\ B & & \end{array}$$

коммутативной. Тогда легко проверить, что каноническое вложение  $i_V: V \rightarrow T(V)$  – начальный объект в только что определенной категории.

Вариант последнего примера: в качестве объектов категории  $\mathcal{C}$  рассматриваются линейные отображения фиксированного пространства  $V$  не в произвольные ассоциативные, а только в коммутативные алгебры  $A$ . Тогда в соответствующей категории начальным объектом будет  $\bar{i}_V: V \rightarrow S(V)$ , где  $S(V)$  – симметрическая алгебра линейного пространства  $V$ , а  $\bar{i}_V$  – каноническое линейное отображение.

Другие примеры универсальных объектов – *пополнение метрического пространства* (см., например, [7], с. 12-17), *симметризация* коммутативного моноида (см. [5], с. 74-75 или пример j) на с. 59 этого пособия), *алгебра Клиффорда квадратичного функционала* (см., например, [5], с. 153-155 или [13], лекция 13), *универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли* (см., например, [13], лекция 5) и т.д. Читателю предлагается разобрать эти примеры универсальных объектов самостоятельно.

## 1.4 Двойственная категория

**Определение 4.** Пусть  $\mathcal{C}$  – произвольная категория. Определим *двойственную* или, как еще говорят, *дуальную* категорию  $\mathcal{C}^0$  следующим образом:  $\text{Ob}(\mathcal{C}^0) = \text{Ob}(\mathcal{C})$

(но для объекта  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  тот же самый объект в двойственной категории будем обозначать через  $X^0$ );  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^0}(X^0, Y^0) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  (морфизму  $\varphi: Y \rightarrow X$  в категории  $\mathcal{C}$  отвечает морфизм  $\varphi^0: X^0 \rightarrow Y^0$  в категории  $\mathcal{C}^0$ ). Кроме того, предполагаются выполненными следующие условия:

- 1)  $\psi^0 \circ \varphi^0 = (\varphi \circ \psi)^0$ , т.е. коммутативному треугольнику

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \varphi \circ \psi \downarrow & \searrow \varphi & \\ X & & \end{array}$$

в категории  $\mathcal{C}$  отвечает коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} & Z & \xleftarrow{\psi^0} Y \\ \psi^0 \circ \varphi^0 = (\varphi \circ \psi)^0 \uparrow & \nearrow \varphi^0 & \\ X & & \end{array}$$

в категории  $\mathcal{C}^0$ ;

- 2)  $\text{id}_{X^0} = (\text{id}_X)^0$ .

Неформально говоря, двойственная категория  $\mathcal{C}^0$  получается из  $\mathcal{C}$  заменой направления всех стрелок на противоположное. Очевидно,  $(\mathcal{C}^0)^0 = \mathcal{C}$ .

Любое общекатегорное понятие или утверждение, если его применить к категории  $\mathcal{C}$ , дает в категории  $\mathcal{C}^0$  “двойственное” понятие или утверждение, получающееся из исходного “обращением стрелок”. Например, легко видеть, что если  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  – начальный (конечный) объект в категории  $\mathcal{C}$ , то  $X^0 \in \text{Ob}(\mathcal{C}^0)$  – конечный (соотв. начальный) объект в категории  $\mathcal{C}^0$ . В частности, если  $X + Y$  – сумма объектов  $X, Y$  в категории  $\mathcal{C}$ , то  $(X + Y)^0$  – произведение объектов  $X^0, Y^0$  в категории  $\mathcal{C}^0$ , и наоборот. Последнее легко следует из того, что обращение стрелок в диаграмме для суммы (1) дает диаграмму для произведения (2), и наоборот.

## 2 Функторы

### 2.1 Определение и простейшие примеры функторов

**Определение 5.** *Функтор* из категории  $\mathcal{C}$  со значениями в категории  $\mathcal{D}$  (обозначение:  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ) состоит из следующих данных:

- а) отображение  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ ,  $X \mapsto F(X)$ ;
- б) для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  отображение  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ ,  $\{f: X \rightarrow Y\} \mapsto \{F(f): F(X) \rightarrow F(Y)\}$ ,

причем для любых  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z)$  имеет место равенство  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ . В частности,  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ .

Заметим, что теоретико-множественная композиция функторов  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$  есть функтор  $\mathcal{C} \xrightarrow{GF} \mathcal{E}$ . Имеется также очевидный *тождественный функтор*  $\text{id}_{\mathcal{C}}$ . Это позволяет рассматривать любое множество категорий как категорию с функторами в качестве морфизмов.

**Примеры.** а) (Функторы забывания). Большой класс тривиальных примеров функторов получается так: нужно перестать учитывать одну или несколько структур, имеющихся на объектах исходной категории. Так получаются функторы “множество элементов”:

$$\mathcal{T}op, \mathcal{D}iff, \mathcal{A}b, \mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{S}ets,$$

а также функторы

$$\mathcal{D}iff \rightarrow \mathcal{T}op, \mathcal{P}\mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{T}op, {}_R\mathcal{M}od \rightarrow \mathcal{A}b.$$

В первом из последних трех примеров мы забываем дифференцируемую структуру, т.е. рассматриваем дифференцируемое многообразие просто как топологическое пространство (заметим, что гладкое отображение непрерывно!), во втором – забываем отмеченную точку, в третьем – забываем про умножение элементов модуля  $M \in \text{Ob}({}_R\mathcal{M}od)$  на элементы кольца, кроме умножения на кратные единичного элемента  $n1_R$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , что дает на множестве элементов  $M$  структуру  $\mathbb{Z}$ -модуля, т.е. абелевой группы.

Аналогично рассмотренным примерам, можно определить функтор  $\mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{T}op'$ , который тождествен на объектах и произвольному непрерывному отображению  $f: X \rightarrow Y$  сопоставляет его гомотопический класс (см. пример g) на стр. 8).

б) Совершенно особую роль играет функтор  $h'_X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}ets$ , определяемый для любой категории  $\mathcal{C}$  и объекта  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  следующим образом:

$$h'_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

$$h'_X(f)(\varphi) = f \circ \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y'), \quad \text{где } \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad f: Y \rightarrow Y'.$$

Иными словами, объекту  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  он сопоставляет множество  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{S}ets)$ , а морфизму  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$  – отображение множеств  $h'_X(f): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$ , которое ставит в соответствие морфизму  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  композицию  $f \circ \varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y')$ .

Несложная проверка того, что  $h'_X$  – действительно функтор, оставляется читателю.

с) Пусть  $\mathcal{C}$  – категория, объектами которой являются целостные кольца, а морфизмами – кольцевые *мономорфизмы* (напомним, что гомоморфизм называется *мономорфизмом*, если он инъективен). Пусть  $\mathcal{D}$  – категория всех полей и кольцевых гомоморфизмов (напомним, что произвольный гомоморфизм полей является *вложением*). Можно показать, что сопоставление произвольному целостному кольцу  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  его поля частных  $\text{Quot}(A) \in \mathcal{D}$  может быть продолжено до функтора  $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Действительно, это легко вытекает из того, что для любого мономорфизма  $\phi: A \rightarrow B$  целостных колец существует и единствен гомоморфизм полей  $Q(\phi): \text{Quot}(A) \rightarrow \text{Quot}(B)$ , ограничение которого на подкольцо  $A \subset \text{Quot}(A)$  совпадает с  $\phi$ .

d) В категории  $\mathcal{Vect}_k$  векторных пространств над полем  $k$  сопоставление  $V \mapsto T^r(V)$  векторному пространству его  $r$ -й тензорной степени согласовано с линейными отображениями: если  $f: V \rightarrow W$  – линейное отображение, то  $f(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_r)$  определяет линейное отображение  $T^r(f): T^r(V) \rightarrow T^r(W)$ . Легко проверить, что  $T^r$  – функтор из  $\mathcal{Vect}_k$  в себя. Можно также показать, что сопоставление  $V \mapsto T(V)$  векторному пространству его тензорной алгебры определяет функтор  $\mathcal{Vect}_k \rightarrow \mathcal{Alg}_k$  в категорию ассоциативных алгебр с единицей над полем  $k$ .

e) Пусть  $X$  – топологическое пространство. Рассмотрим на  $X$  следующее отношение  $\sim$ , полагая, что  $x \sim y$  в том и только том случае, когда существует непрерывное отображение  $w: I \rightarrow X$  интервала  $I = [0, 1]$  в пространство  $X$  такое что  $w(0) = x$ ,  $w(1) = y$ . Очевидно, что  $\sim$  является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначим через  $\pi_0(X)$ . Элементы множества  $\pi_0(X)$  называются *компонентами линейной связности* или *0-компонентами* пространства  $X$ . Пусть  $f: X \rightarrow Y$  – произвольное непрерывное отображение. Тогда  $f$  переводит 0-компоненты пространства  $X$  в 0-компоненты пространства  $Y$  и, следовательно, определяет отображение  $\pi_0(f): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ . Немедленно проверяется, что  $\pi_0(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_0(X)}$  и что  $\pi_0(f \circ g) = \pi_0(f) \circ \pi_0(g)$ . Таким образом,  $\pi_0$  представляет собой функтор  $\mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Sets}$ .

Можно предложить и другое описание функтора  $\pi_0(X)$ . Обозначим через  $*$  любое пространство, состоящее ровно из одной точки.

Мы утверждаем, что *существует естественная биекция*  $\text{Hom}_{\mathcal{Top}'}(*, X) \leftrightarrow \pi_0(X)$ , задаваемая правилом  $[f] \mapsto \{0\text{-компонента точки } f(*)\}$ , где  $[f] \in \text{Hom}_{\mathcal{Top}'}(*, X)$  – *гомотопический класс* отображения  $f$  (напомним, что морфизмы в гомотопической категории  $\mathcal{Top}'$  – гомотопические классы непрерывных отображений). Для доказательства заметим, что существует взаимно однозначное соответствие между отображениями  $f: * \rightarrow X$  и точками пространства  $X$ , задаваемое формулой  $f \mapsto f(*)$ . Отображения  $f$  и  $g$  гомотопны тогда и только тогда, когда  $f(*)$  и  $g(*)$  лежат в одной и той же компоненте линейной связности

пространства  $X$ .

Из вышесказанного легко вытекает, что *гомотопные отображения*  $X \rightarrow Y$  индуцируют одинаковые отображения множеств  $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ , т.е.  $\pi_0$  определяет также функтор  $\mathcal{T}op' \rightarrow \mathcal{S}ets$ . У этого функтора есть важные обобщения – *фундаментальная группа*  $\pi_1(X)$  и *гомотопические группы*  $\pi_n(X)$ ,  $n \geq 2$ , которые являются функторами  $\mathcal{T}op' \rightarrow \mathcal{G}r$  и  $\mathcal{T}op' \rightarrow \mathcal{A}b$  соответственно. С ними можно познакомиться по книге [15].

f) Рассмотрим *пространство путей*  $PX$  топологического пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0 \in X$ . Это – множество всех непрерывных отображений  $\varphi: I \rightarrow X$  интервала  $I = [0, 1]$  в  $X$  таких, что  $\varphi(0) = x_0$  (т.е. путь – это морфизм  $(I, 0) \rightarrow (X, x_0)$  в категории  $\mathcal{P}\mathcal{T}op$ , где  $0 \in I$  рассматривается в качестве отмеченной точки), наделяемое *компактно-открытой* топологией. Компактно-открытая топология на  $PX$  определяется следующим образом: ее предбазой открытых множеств являются множества вида  $\{\varphi \in PX \mid \varphi(K) \subset U\}$ , где  $K \subset I$  – *компактное*, а  $U \subset X$  – *открытое* множество. В качестве отмеченной точки в  $PX$  рассмотрим “постоянный” путь  $\omega_0: I \rightarrow X$ , отображающий весь отрезок  $I$  в отмеченную точку  $x_0$ . Так как любое отображение  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{P}\mathcal{T}op}((X, x_0), (Y, y_0))$  вместе с любым путем  $\varphi: (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$  определяют путь  $f \circ \varphi: (I, 0) \rightarrow (Y, y_0)$ , то легко проверяется, что  $P: (X, x_0) \mapsto (PX, \omega_0)$  – функтор из категории  $\mathcal{P}\mathcal{T}op$  в себя.

Определим также подпространство  $\Omega X$  в  $PX$ , состоящее из таких отображений  $\varphi: I \rightarrow X$ , что  $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$  (или, эквивалентно, пространство отображений  $\varphi: (S^1, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  в категории  $\mathcal{P}\mathcal{T}op$ , где  $(S^1, s_0)$  – окружность с отмеченной точкой, наделенное компактно-открытой топологией). Это пространство называется *пространством петель* и определяет функтор  $\Omega: (X, x_0) \mapsto (\Omega X, \omega_0)$  из категории  $\mathcal{P}\mathcal{T}op$  в себя.

Функторы  $P$  и  $\Omega$  естественно переносятся и в гомотопическую категорию  $\mathcal{T}op'$ . О последних двух примерах e), f) а также о композициях функторов вида  $\pi_0 \circ \Omega \circ \dots \circ \Omega$  можно почитать в книге [15].

g) Напомним, что в примере m) на стр. 11 по данной категории  $\mathcal{C}$  была построена новая категория  $\bar{\mathcal{C}}$ . Существует канонический функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ , сопоставляющий объекту из  $\mathcal{C}$  класс изоморфизма этого объекта, а морфизму – класс его эквивалентности “по модулю изоморфизмов”.

Функторы  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , которые мы рассматривали до сих пор, называются *ковариантными функторами*. Определяются также *контравариантные функторы*, “обращающие стрелки”.

**Определение 6.** *Контравариантный функтор* из категории  $\mathcal{C}$  со значениями в категории  $\mathcal{D}$  (обозначение:  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ) состоит из следующих данных:

а) отображение  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}), X \mapsto F(X)$ ;

б) для каждой упорядоченной пары объектов  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  отображение  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X)), \{f: X \rightarrow Y\} \mapsto \{F(f): F(Y) \rightarrow F(X)\}$ ,

причем для любых  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Z)$  имеет место равенство  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ . В частности,  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ .

Т.е. морфизму  $f: X \rightarrow Y$  в категории  $\mathcal{C}$  контравариантный функтор  $F$  сопоставляет морфизм  $F(f): F(Y) \rightarrow F(X)$  в категории  $\mathcal{D}$  и соответственно композиции  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  в  $\mathcal{C}$  – композицию  $F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y) \xleftarrow{F(g)} F(Z)$  в  $\mathcal{D}$ .

С помощью понятия двойственной категории определение контравариантного функтора можно свести к определению обычного (ковариантного). Более точно, рассмотрим “обращающий” функтор  $Rev: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}$ , который тождествен на объектах и обращает направление морфизмов. Тогда контравариантный функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  определяет ковариантный функтор  $G = F \circ Rev: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{D}$  (здесь  $F \circ Rev$  – композиция функторов).

**Примеры** (продолжение). h) Пусть  $k$  – поле,  $\mathcal{Vect}_k$  – категория векторных пространств над  $k$ . Пусть  $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  – произвольное множество,  $F(S)$  – (пока) множество функций на  $S$  со значениями в  $k$ , или, что то же самое, отображений из  $S$  в  $k$ . Как обычно, если  $f: S \rightarrow k$  – такая функция, через  $f(s)$  обозначается значение  $f$  на элементе  $s \in S$ . Сложение и умножение функций на скаляр определяется поточечно:

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s) \quad \text{для всех } s \in S,$$

$$(af)(s) = a(f(s)) \quad \text{для всех } a \in k, s \in S.$$

Легко проверить, что  $F(S)$  с введенными операциями сложения и умножения на скаляр есть векторное пространство над  $k$ . Если  $S = \{1, \dots, n\}$ , то  $F(S)$  можно отождествить с  $k^n$ : функции  $f$  ставится в соответствие вектор всех ее значений  $\{f(1), \dots, f(n)\}$ . Оказывается, что сопоставление  $S \mapsto F(S)$  может быть продолжено до функтора  $F: \mathcal{Sets} \rightarrow \mathcal{Vect}_k$  (т.е. существует функтор, совпадающий с  $S \mapsto F(S)$  на объектах; на морфизмах он определяется в следующем предложении). Этот функтор является контравариантным: морфизму  $\varphi: S \rightarrow T$  в  $\mathcal{Sets}$  он ставит в соответствие линейное отображение  $F(\varphi): F(T) \rightarrow F(S)$ , чаще обозначаемое  $\varphi^*$ , и называемое *обратным образом* на функциях:

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad \text{где } \varphi: S \rightarrow T, f: T \rightarrow k.$$

Хорошее упражнение для читателя – проверить что мы действительно построили функтор. Далее, можно заметить, что функции со значением в поле можно не только поточечно складывать, но и перемножать:  $(fg)(s) = f(s)g(s)$ . При



этом  $F(S)$  становится коммутативной ассоциативной  $k$ -алгеброй с единицей (роль которой играет постоянная функция, в каждой точке принимающая значение, равное  $1 \in k$ ) и  $S \mapsto F(S)$  продолжается до контравариантного функтора  $Sets \rightarrow Alg_k$ .

Некоторый вариант последнего примера получится, если  $S = T$  есть топологическое пространство, а  $k$  – топологическое поле (т.е. поле, на множестве элементов которого задана топология, относительно которой операции сложения и умножения непрерывны, например,  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ), и в качестве  $F(T)$  рассматривается пространство *непрерывных* функций  $f: T \rightarrow k$ . Действие функтора  $F$  на морфизм  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(T', T)$  определяется по той же формуле, как и в случае множеств:

$$F(\varphi)(f) = \varphi^*(f) = f \circ \varphi \quad \forall f \in F(T)$$

(так как  $\varphi: T' \rightarrow T$  – непрерывное отображение, то обратный образ на функциях  $\varphi^*$  переводит непрерывные функции на  $T$  в непрерывные функции на  $T'$ ).

i) Функтор двойственности:  $Vect_k \rightarrow Vect_k$ , на объектах задаваемый формулой  $V \mapsto V^* = \mathcal{L}(V, k)$ , где  $\mathcal{L}(V, k)$  – пространство линейных функционалов (форм) на  $V$  (называемое также *сопряженным* с  $V$  пространством), на морфизмах  $\varphi: V \rightarrow W$  – формулой  $\varphi \mapsto \varphi^*$ , где  $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$  – двойственное к  $\varphi$  отображение (напомним, двойственное к  $\varphi$  отображение произвольному  $f \in W^*$  сопоставляет функционал  $\varphi^*(f) \in V^*$ , однозначно определяемый формулой  $\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v)) \forall v \in V$ ).

j) Определим некоторый аналог  $\mathcal{T}op(T)$  категории  $\mathcal{P}(S)$ , рассматриваемой в примере b) на стр. 7 в случае, когда  $S = T$  – топологическое пространство. А именно, объекты  $\mathcal{T}op(T)$  – произвольные *открытые* подмножества  $U \subset T$ , а морфизмы – *вложения* открытых подмножеств  $V \subset U$ . Тогда контравариантный функтор  $F: \mathcal{T}op(T) \rightarrow \mathcal{A}b$  (или  $\mathcal{R}$  или  $\mathcal{G}r, \dots$ ) называется *предпучком абелевых групп* на  $T$  (или колец, или групп,  $\dots$ ). Из определения функтора следует, что данному вложению  $V \subset U$  (т.е. морфизму в  $\mathcal{T}op(T)$ ) предпучок  $F$  сопоставляет гомоморфизм  $F(V \subset U): F(U) \rightarrow F(V)$ , который называется *гомоморфизмом ограничения*. Он часто обозначается  $\rho_{U,V}^F$ . Заметим, что из определения функтора легко вытекает, что тождественному морфизму  $U \subset U$  в категории  $\mathcal{T}op(T)$  отвечает тождественный морфизм  $\rho_{U,U}^F = \text{id}_{F(U)}$  в категории  $\mathcal{A}b$ , а для открытых множеств  $W \subset V \subset U$  имеем:  $\rho_{U,W}^F = \rho_{V,W}^F \circ \rho_{U,V}^F$ .

Рассмотрим следующий пример предпучка колец. Фиксируем топологическое поле  $k$  (например,  $k = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ) и определим предпучок  $F$  следующим образом:  $F(U)$  есть кольцо непрерывных функций  $f: U \rightarrow k$ , где  $U$  рассматривается с топологией, индуцированной вложением  $U \subset T$ , а гомоморфизмы ограничения  $\rho_{U,V}^F$  – настоящие ограничения функций с  $U$  на  $V$ .

Заметим, что этот пример предпучка обладает рядом дополнительных хороших

свойств, которым удовлетворяют т.н. пучки.

к) Напомним, что выше в примере б) мы определили функтор  $h'_X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}ets$  как “функцию”  $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  от второго аргумента. Аналогично,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  как функция от первого аргумента есть контравариантный функтор  $h_X: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}ets$ , который объекту  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ставит в соответствие множество  $h_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ , и морфизму  $f: Y' \rightarrow Y$  в  $\mathcal{C}$  – морфизм

$$h_X(f): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X)$$

в категории  $\mathcal{S}ets$ , отображающий произвольный морфизм  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  в композицию  $h_X(f)(\varphi) = \varphi \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X)$ .

л) Функтор  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$  естественно рассматривать как зависящий одновременно от двух аргументов (такие функторы называются *бифункторами*). Вместо этого воспользуемся понятием *прямого произведения категорий*. А именно, пусть  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  – две категории. Положим

$$\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') = \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}'),$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}'}((X, X'), (Y, Y')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y'),$$

$$(\varphi, \varphi') \circ (\psi, \psi') = (\varphi \circ \psi, \varphi' \circ \psi'), \quad \text{id}_{(X, X')} = (\text{id}_X, \text{id}_{X'}).$$

Нетрудно проверить, что  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$  является категорией. Функтор от двух аргументов есть обычный функтор на соответствующем произведении категорий. Пример:  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^0 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}ets$ .

**Определение 7.** Пусть  $F, G$  – два функтора из  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{D}$ . *Функторный морфизм*  $F$  в  $G$  (запись  $f: F \rightarrow G$ ) состоит из семейства морфизмов в категории  $\mathcal{D}$

$$f(X): F(X) \rightarrow G(X),$$

по одному для каждого объекта  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , которое удовлетворяет следующему условию: для всякого морфизма  $\varphi: X \rightarrow Y$  в категории  $\mathcal{C}$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f(X)} & G(X) \\ F(\varphi) \downarrow & & \downarrow G(\varphi) \\ F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \end{array} \quad (4)$$

коммутативна.

**Примеры.** а) Напомним, что в примере ж) на стр. 25 мы определили понятие предпучка. Пусть  $F, G$  – предпучки колец на топологическом пространстве  $T$ . Тогда функторный морфизм из  $F$  в  $G$  – это набор гомоморфизмов  $f(U): F(U) \rightarrow G(U)$ , которые “коммутируют с ограничениями”, т.е.  $\rho_{U,V}^G \circ f(U) = f(V) \circ \rho_{U,V}^F$ . Вот

более конкретный пример. Пусть  $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$  – кольцевой гомоморфизм. Если  $F$  есть предпучок функций из  $T$  в  $R_1$ , а  $G$  – из  $T$  в  $R_2$ , то мы получаем морфизм функторов  $f: F \rightarrow G$ , задаваемый формулой  $f(s) = \varphi \circ s: U \rightarrow R_2$  для любой функции  $s: U \rightarrow R_1$ .

б) Пусть  $** : \mathcal{Vect}_k \rightarrow \mathcal{Vect}_k$  есть функтор “двойного сопряжения”:  $V \mapsto V^{**}, \varphi \mapsto \varphi^{**}$  (см. пример i) на стр. 25). Напомним, что для каждого векторного пространства  $V$  определено каноническое линейное отображение  $\varepsilon_V: V \rightarrow V^{**}$ , сопоставляющее вектору  $v \in V$  функционал  $v^{**}$  на пространстве линейных функционалов  $V^*$ , принимающий на  $f \in V^*$  значение, равное значению  $f$  на векторе  $v$ , т.е.  $v^{**}(f) = f(v)$ . Мы утверждаем, что набор  $\{\varepsilon_V\}_V$  определяет морфизм функторов  $\varepsilon: \text{id}_{\mathcal{Vect}_k} \rightarrow **$ , где  $\text{id}_{\mathcal{Vect}_k}$  – тождественный функтор на категории  $\mathcal{Vect}_k$  (ставящий в соответствие каждому векторному пространству само это пространство, а каждому линейному отображению – само это отображение). Для доказательства этого нужно проверить коммутативность всевозможных квадратов вида

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varepsilon_V} & V^{**} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^{**} \\ W & \xrightarrow{\varepsilon_W} & W^{**}, \end{array}$$

что мы оставляем читателю.

Композиция функторных морфизмов определяется очевидным образом, так же как и тождественный функторный морфизм. В результате функторы  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  становятся объектами категории, которая обозначается  $\mathcal{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ . Категория контравариантных функторов  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  тогда есть  $\mathcal{Funct}(\mathcal{C}^0, \mathcal{D})$ .

Согласно общему определению изоморфизма в категории, *изоморфизм между функторами*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  и  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  – это морфизм функторов  $f: F \rightarrow G$ , для которого есть обратный морфизм  $g: G \rightarrow F$ ,  $gf = \text{id}_F$ ,  $fg = \text{id}_G$ .

**Лемма 8.** Морфизм функторов  $f: F \rightarrow G$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для каждого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  морфизм  $f(X): F(X) \rightarrow G(X)$  является изоморфизмом в категории  $\mathcal{D}$ .

*Доказательство. Достаточность.* Заметим, что условие коммутативности диаграммы (4) может быть записано в виде тождества

$$G(\varphi) \circ f(X) = f(Y) \circ F(\varphi). \quad (5)$$

Предположим что для каждого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  морфизм  $f(X): F(X) \rightarrow G(X)$  является изоморфизмом. Тогда беря композицию обеих частей (5) справа с  $f(X)^{-1}$  и слева с  $f(Y)^{-1}$ , получаем тождество  $f(Y)^{-1} \circ G(\varphi) = F(\varphi) \circ f(X)^{-1}$ , т.е.

коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xleftarrow{f(X)^{-1}} & G(X) \\ F(\varphi) \downarrow & & \downarrow G(\varphi) \\ F(Y) & \xleftarrow{f(Y)^{-1}} & G(Y). \end{array}$$

Поэтому семейство  $g = \{g(X)\}$ , где  $g(X) = f(X)^{-1}$ , является функторным морфизмом. Легко проверяется, что  $gf = \text{id}_F$ ,  $fg = \text{id}_G$ .

Доказательство *необходимости* тривиально.  $\square$

**Определение 9.** Категория  $\mathcal{C}$  называется *подкатегорией* категории  $\mathcal{D}$ , если

- (a)  $\text{Ob}(\mathcal{C}) \subset \text{Ob}(\mathcal{D})$ ;
- (b) для произвольных  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  имеет место включение множеств морфизмов  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ ;
- (c) композиция морфизмов в  $\mathcal{C}$  совпадает с их композицией как морфизмов в  $\mathcal{D}$ ; для  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  тождественный морфизм  $\text{id}_X$  в категории  $\mathcal{C}$  совпадает с тождественным морфизмом  $\text{id}_X$  в категории  $\mathcal{D}$ .

**Определение 10.** Подкатегория  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  называется *полной*, если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  имеем

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y).$$

Функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  называется *строгим*, если для любых  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  отображение

$$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

является вложением множеств, и *полным*, если оно является сюръективным.

Например, вложение полной подкатегории  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  является строгим и полным функтором. Обратно, можно показать, что всякий строгий и полный функтор получается таким образом.

Примером полной подкатегории является категория абелевых групп  $\mathcal{A}b$ , рассматриваемая как подкатегория в категории всех групп  $\mathcal{G}r$ . С другой стороны, забывающий функтор  $F$  из категории  $\mathcal{A}b$  в категорию  $\mathcal{S}ets$  является строгим но не полным. Строгим он является потому, что два гомоморфизма групп равны, если они совпадают как отображения множеств. Неполнота функтора  $F$  вытекает из того, что не всякое отображение множеств элементов групп происходит из некоторого гомоморфизма. Например, если  $\mathbb{Z}_2$  есть группа из двух элементов, то пусть  $F(\mathbb{Z}_2) = \{0, 1\}$  – множество из двух элементов, и отображение из  $\{0, 1\}$  в себя, отображающее 0 в 1, а 1 в 0, не принадлежит образу  $F$ , поскольку

любой гомоморфизм групп сохраняет единицу. То же верно и для забывающих функторов из категорий топологических пространств  $\mathcal{Top}$ , всех групп  $\mathcal{Gr}$ , колец  $\mathcal{R}$  в категорию  $\mathcal{Sets}$ .

Функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ , определенный в примере g) на стр. 23 всегда является полным, и является строгим, если и только если единственными изоморфизмами в категории  $\mathcal{C}$  являются тождественные морфизмы, в последнем случае он является эквивалентностью категорий (см. следующий пункт).

## 2.2 Эквивалентность категорий

**Определение 11.** а) Функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  называется *эквивалентностью категорий*, если существует такой функтор  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , что функтор  $GF$  изоморфен  $\text{id}_{\mathcal{C}}$ , а  $FG$  изоморфен  $\text{id}_{\mathcal{D}}$ .

б) Категории  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  называются *эквивалентными*, если существует функтор, осуществляющий их эквивалентность.

Функтор  $G$  из а) иногда называется *квазиобратным* к функтору  $F$ .

**Пример.** Выше в примере b) на стр. 27 мы рассматривали функтор “двойного сопряжения”  $** : \mathcal{Vect}_k \rightarrow \mathcal{Vect}_k$ . Там же был определен морфизм функторов  $\varepsilon : \text{id}_{\mathcal{Vect}_k} \rightarrow **$ . Хорошо известно [8], что после ограничения на подкатегорию *конечномерных* пространств  $\mathcal{Vect}_k^f \subset \mathcal{Vect}_k$  это – изоморфизм функторов (однако это не так на всей категории  $\mathcal{Vect}_k$ ).

Формально при установлении того, что некоторый заданный функтор является эквивалентностью категорий, бывает удобно пользоваться следующим простым результатом.

**Теорема 12.** *Функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  является эквивалентностью категорий тогда и только тогда когда выполнены следующие два условия:*

- а)  $F$  – строгий и полный функтор;
- б) каждый  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  изоморфен объекту вида  $F(X)$  для некоторого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $F$  – эквивалентность категорий и  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  – квазиобратный функтор. Пусть

$$f(X): GF(X) \rightarrow X, \quad X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad g(Y): FG(Y) \rightarrow Y, \quad Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$$

– изоморфизмы функторов  $f: GF \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ ,  $g: FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ . Докажем выполнение условий а) и б) теоремы. Прежде всего, произвольный объект  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$

изоморфен объекту  $F(X)$ , где  $X = G(Y) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , откуда следует б). Далее, для каждого  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$  имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} GF(X) & \xrightarrow{f(X)} & X \\ GF(\varphi) \downarrow & & \downarrow \varphi \\ GF(X') & \xrightarrow{f(X')} & X'. \end{array}$$

Поэтому  $\varphi$  восстанавливается по  $F(\varphi)$  по формуле

$$\varphi = f(X') \circ GF(\varphi) \circ f(X)^{-1}, \quad (6)$$

так что  $F$  – строгий функтор (напомним, что  $f$  – изоморфизм функторов, поэтому  $f(X)$  является изоморфизмом для каждого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , следовательно  $f(X)^{-1}$  существует). Аналогично доказывается что  $G$  – строгий функтор. Для доказательства полноты  $F$  рассмотрим произвольный морфизм  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X'))$  и положим  $\varphi = f(X') \circ G(\psi) \circ f(X)^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ . Тогда (см. (6))  $\varphi = f(X') \circ GF(\varphi) \circ f(X)^{-1}$ , и, поскольку  $f(X), f(X')$  – изоморфизмы,

$$G(\psi) = GF(\varphi). \quad (7)$$

Как уже было доказано,  $G$  – строгий функтор, поэтому из (7) следует, что  $\psi = F(\varphi)$ , т.е.  $F$  – полный функтор.

*Достаточность.* Пусть выполнены условия а) и б) в условии теоремы. Для каждого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  зафиксируем  $X_Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и изоморфизм  $g(Y): F(X_Y) \rightarrow Y$ . Построим функтор  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , квазиобратный  $F$ , полагая на объектах  $G(Y) = X_Y$  для  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ . На морфизмах  $G$  зададим следующим образом: для морфизма  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$  положим  $G(\psi) = \varphi$ , где  $\varphi: X_Y \rightarrow X_{Y'}$  – такой морфизм, что  $F(\varphi)$  делает диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & Y' \\ g(Y) \uparrow & & \uparrow g(Y') \\ F(X_Y) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X_{Y'}) \end{array} \quad (8)$$

коммутативной (т.е.  $F(\varphi) = g(Y')^{-1} \circ \psi \circ g(Y)$ ). Так как по условию  $F$  – строгий и полный функтор, то он определяет биекцию множеств  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_Y, X_{Y'})$  и  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_Y), F(X_{Y'}))$ , так что  $G(\psi)$  определен корректно.

Проверим что  $G$  действительно является функтором. Для этого достаточно показать, что

$$G(\psi_2 \circ \psi_1) = G(\psi_2) \circ G(\psi_1)$$

для любых  $\psi_1: Y \rightarrow Y', \psi_2: Y' \rightarrow Y''$ . Пусть  $\varphi_i = G(\psi_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Имеем:

$$F(\varphi_1) = g(Y')^{-1} \circ \psi_1 \circ g(Y), \quad F(\varphi_2) = g(Y'')^{-1} \circ \psi_2 \circ g(Y'). \quad (9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} FG(\psi_2 \circ \psi_1) &= g(Y'')^{-1} \circ \psi_2 \circ \psi_1 \circ g(Y) = \\ g(Y'')^{-1} \circ \psi_2 \circ g(Y') \circ g(Y')^{-1} \circ \psi_1 \circ g(Y) &= F(\varphi_2) \circ F(\varphi_1) = \\ F(\varphi_2 \circ \varphi_1) &= F(G(\psi_2) \circ G(\psi_1)) \end{aligned}$$

(мы последовательно использовали: определение  $G$  на морфизмах, тождества  $g(Y') \circ g(Y')^{-1} = \text{id}_{Y'}$  и  $\psi_2 \circ \text{id}_{Y'} = \psi_2$ ,  $\text{id}_{Y'} \circ \psi_1 = \psi_1$ , формулы (9), предположение что  $F$  – функтор, и наконец определение  $\varphi_i = G(\psi_i)$ ,  $i = 1, 2$ ). Т.о. мы доказали, что  $FG(\psi_2 \circ \psi_1) = F(G(\psi_2) \circ G(\psi_1))$ . Теперь, используя строгость функтора  $F$ , получаем требуемое тождество  $G(\psi_2 \circ \psi_1) = G(\psi_2) \circ G(\psi_1)$ .

Покажем теперь, что семейство  $g = \{g(Y)\}: FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  – изоморфизм функторов. Во-первых, диаграмма (8) может быть переписана следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi} & Y' \\ g(Y) \uparrow & & \uparrow g(Y') \\ FG(Y) & \xrightarrow{FG(\psi)} & FG(Y'), \end{array}$$

откуда непосредственно вытекает, что  $g: FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  – морфизм функторов. По определению  $g(Y): FG(Y) \rightarrow Y$  является изоморфизмом (в категории  $\mathcal{D}$ ) для каждого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ . Теперь, используя Лемму 8, мы получаем, что  $g$  – изоморфизм функторов.

Далее, для произвольного  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  морфизм  $g(F(X)): FGF(X) \rightarrow F(X)$  – изоморфизм (в категории  $\mathcal{D}$ ). Условие а) в формулировке теоремы означает, что  $F$  определяет естественную биекцию  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), X)$ , поэтому  $g(F(X)) = F(f(X))$  для единственного морфизма  $f(X) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), X)$ .

Проверим, что семейство  $f = \{f(X)\}: GF \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  является морфизмом функторов. Действительно, т.к.  $g$  – функторный морфизм, для всех  $X, X' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\varphi)} & F(X') \\ g(F(X)) \uparrow & & \uparrow g(F(X')) \\ FGF(X) & \xrightarrow{FGF(\varphi)} & FGF(X') \end{array}$$

коммутативна. Из строгости функтора  $F$  тогда вытекает и коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ f(X) \uparrow & & \uparrow f(X') \\ GF(X) & \xrightarrow{GF(\varphi)} & GF(X'). \end{array}$$

Это и означает, что  $f: GF \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  – функторный морфизм.

Заметим, что  $f(X)$  – изоморфизм для каждого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Действительно, т.к.  $F(f(X))$  – изоморфизм, существует  $F(f(X))^{-1}$ . Пусть  $f(X)^{-1}$  – такой морфизм, что  $F(f(X)^{-1}) = F(f(X))^{-1}$  (такой  $f(X)^{-1}$  существует и единствен в силу а)). Проверим, что  $f(X)^{-1} \circ f(X) = \text{id}_{GF(X)}$ . Имеем:

$$F(f(X)^{-1} \circ f(X)) = F(f(X)^{-1}) \circ F(f(X)) =$$

$$F(f(X))^{-1} \circ F(f(X)) = \text{id}_{FGF(X)} = F(\text{id}_{GF(X)}),$$

теперь требуемое вытекает из строгости  $F$ . Аналогично проверяется тождество  $f(X) \circ f(X)^{-1} = \text{id}_X$ . Применяя Лемму 8, получаем, что  $f$  – *изоморфизм функторов*.

Таким образом, мы предъявили изоморфизмы функторов  $g = \{g(Y)\}: FG \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  и  $f = \{f(X)\}: GF \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ , так что  $G$  квазиобратен  $F$  и значит  $F$  – действительно эквивалентность категорий.  $\square$

**Следствие 13.** *Если в категории  $\mathcal{C}$  все объекты изоморфны между собой, то  $\mathcal{C}$  эквивалентна категории  $\mathcal{C}_0$ , состоящей из одного объекта  $A_0 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и всех морфизмов  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_0, A_0)$ .*

Примером такой категории  $\mathcal{C}$  может служить категория  $n$ -мерных векторных пространств над заданным полем или категория всех групп из  $p$  элементов ( $p$  – простое число).

*Доказательство.* Через  $F$  обозначим функтор вложения категории  $\mathcal{C}_0$  в  $\mathcal{C}$ , тогда условия а), б) предыдущей теоремы легко проверяются.  $\square$

Более содержательные примеры эквивалентности категорий мы не имеем возможности разобрать здесь подробно, т.к. это увело бы нас в сторону от нашего предмета. Укажем лишь, что центральный результат ряда математических теорий заключается в установлении эквивалентности некоторых категорий. Например, три теоремы Софуса Ли вместе с теоремой Эли Картана утверждают эквивалентность следующих трех категорий: категории односвязных групп Ли, категории локальных групп Ли и категории вещественных алгебр Ли.

В  $K$ -теории важную роль играет понятие *подобия колец*: два кольца  $R, S$  называются *подобными*, если категории  ${}_R\text{Mod}$  и  ${}_S\text{Mod}$  эквивалентны. Например, нетрудно доказать, что кольца матриц  $M_n(k)$  ( $k$  – фиксированное поле) при разных  $n$  подобны.

Другой пример эквивалентности категорий. Пусть  $k$  – алгебраически замкнутое поле. Тогда имеет место эквивалентность между *категорией аффинных многообразий над полем  $k$*  и *категорией, двойственной категории геометрических  $k$ -алгебр* (геометрическая алгебра над  $k$  – конечно порожденная  $k$ -алгебра,



которая является целостным кольцом). Мы рекомендуем читателю разобрать этот пример по книге [14] (см. Теорему 4.4 в этой книге), тем более что в нем проявляется распространенная в математике двойственность между пространствами и кольцами функций на них. Другие примеры эквивалентных категорий рассмотрены в книге [4].

### 2.3 Представимые функторы

Одной из самых плодотворных идей теории категорий является замена объекта категории представляемым им функтором.

Введем категорию функторов  $\widehat{\mathcal{C}} = \text{Funct}(\mathcal{C}^0, \mathcal{S}ets)$  (напомним, что  $\text{Funct}(\mathcal{C}^0, \mathcal{S}ets)$  есть категория контравариантных функторов  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}ets$ , см. стр. 27) и рассмотрим функтор  $h_X: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{S}ets$ ,  $h_X(Y^0) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$  как объект  $\widehat{\mathcal{C}}$ .

Этот функтор называется иногда “функтором точек” из-за того, что во многих категориях есть такой объект  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , что  $h_X(Z)$  есть “множество точек  $X$ ” (см. примеры ниже). Но и в ситуации, когда объекта с такими свойствами нет, функтор  $h_X$  играет очень важную роль. Точка зрения на объект категории как на представимый функтор (ср. Теорему 15) позволяет найти адекватную замену теоретико-множественному языку и дает возможность работать с объектами категории в категорных же терминах.

Рассмотрим вначале несколько примеров.

а) Пусть  $\mathcal{C} = \mathcal{S}ets$  – категория множеств. Пусть  $Z = * \in \text{Ob}(\mathcal{S}ets)$  – множество, состоящее из одного элемента. Тогда  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{S}ets)$  множество  $h_X(Z)$  естественно биективно множеству  $X$  (биекция сопоставляет морфизму  $f: Z \rightarrow X$  образ  $f(*)$  единственного элемента  $Z$  при этом морфизме). То же верно и для категории  $\mathcal{T}op$ , поскольку произвольное отображение точки в топологическое пространство непрерывно.

б) Пусть  $\mathcal{G}r$  есть категория групп. Положим  $Z = \mathbb{Z}$  (группа целых чисел по сложению). Тогда для любой группы  $G$   $h_G(Z)$  есть “множество элементов”  $G$ , что устанавливается путем сопоставления морфизму  $f: Z \rightarrow G$  образа  $f(1) \in G$ .

с) Пусть  $\mathcal{A}lg$  есть категория коммутативных колец с 1, в качестве морфизмов в  $\mathcal{A}lg$  рассматриваются гомоморфизмы колец, переводящие 1 в 1. Тогда  $Z = \mathbb{Z}[x]$  обладает аналогичным свойством: морфизму  $f: Z \rightarrow R$  мы сопоставляем  $f(x) \in R$ .

д) Примером категории, в которой нет объекта  $Z$  с требуемыми свойствами, является категория  $\mathcal{P}(S)$ , связанная с множеством  $S$ , в предположении, что  $S$  содержит более одного элемента (см. пример б) на стр. 7).

**Определение 14.** Функтор  $F \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$  называется *представимым*, если он изоморфен функтору вида  $h_X$  для некоторого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . В этом случае говорят, что объект  $X$  *представляет* функтор  $F$ .

**Примеры.** Как уже было отмечено выше, по ковариантному функтору  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}ets$  строится контравариантный функтор  $G = F \circ Rev: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{S}ets$  на двойственной категории, где  $Rev: \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}$  – “обращающий” функтор. Заметим следующее: если ковариантный функтор  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}ets$  изоморфен функтору вида  $h'_X$  (см. пример b) на стр. 21), то отвечающий ему контравариантный функтор  $G$  на категории  $\mathcal{C}^0$  является представимым в смысле данного выше определения, и представляется объектом  $X^0$ . Действительно, это следует из следующей цепочки равенств:

$$h'_X(Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^0}(Y^0, X^0) = h_{X^0}(Y^0), \quad \forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}).$$

Это соображение позволяет получить много примеров представимых функторов на основе примеров, разобранных нами ранее.

Например, пусть  $V \in \text{Ob}(\mathcal{V}ect_k)$  и рассмотрим следующий функтор  $F_V: \mathcal{A}lg_k \rightarrow \mathcal{S}ets$  на категории ассоциативных алгебр над  $k$  с единицей:

$$A \mapsto F_V(A) = \{\text{множество линейных отображений } V \rightarrow A\}.$$

Ранее нами отмечалось следующее свойство алгебры  $T(V)$ , снабженной каноническим линейным отображением  $i_V: V \rightarrow T(V)$ : для любой ассоциативной  $k$ -алгебры с единицей  $A$  и линейного отображения  $\varphi: V \rightarrow A$  существует единственный гомоморфизм алгебр с единицей  $\psi: T(V) \rightarrow A$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_V} & T(V) \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ A & & \end{array}$$

коммутативной. Это показывает, что функтор  $F_V$  изоморфен функтору  $h'_{T(V)}$  и, следовательно, отвечает представимому функтору на категории, двойственной категории ассоциативных  $k$ -алгебр с единицей.

Приведем еще один пример представимого функтора. Рассмотрим категорию  $\mathcal{A}lg$  коммутативных  $\mathbb{Z}$ -алгебр с единицей. Пусть  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}] = \mathbb{Z}[x, y]/(xy - 1)$  – кольцо полиномов Лорана  $\{x^{-n}f(x) \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x], n \in \mathbb{Z}_+\}$ . Заметим, что для любого объекта  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A}lg)$  имеется каноническая биекция  $\text{Hom}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A) \cong A^\times$ , где  $A^\times$  – группа обратимых элементов кольца  $A$ . Действительно, биекцию устанавливает сопоставление гомоморфизму  $f: \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \rightarrow A$  образа  $f(x) \in A$ , который обязан быть обратимым в  $A$  элементом. Вывод: функтор  $A^0 \mapsto A^\times$  на категории аффинных схем  $\mathcal{A}ff = \mathcal{A}lg^0$ , двойственной  $\mathcal{A}lg$ , представляется объектом  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]^0$ , который обозначается еще  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$  (см. любую книгу по алгебраической геометрии, например [12] или [19]). Заметим на будущее, что функтор  $A \mapsto A^\times$  можно рассматривать как

функтор  $Alg \rightarrow Ab$ , т.е. принимающий значения в категории абелевых групп, поэтому  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$  – групповой объект категории  $Aff$  (см. [4] или [12]).

Ниже мы покажем, что произведение двух объектов категории – представимый функтор (значит, сумма объектов – представимый функтор в двойственной категории).

Заметим, что многие важные функторы на гомотопической категории  $\mathcal{T}op'$  (когомологии,  $K$ -функтор) являются представимыми, однако их обсуждение далеко выходит за рамки наших возможностей (см. книгу [15]).

Определим функтор  $h: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$  следующим образом. На объектах  $h(X) = h_X \in \text{Ob}(\widehat{\mathcal{C}})$ ,  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Произвольному морфизму  $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$  в категории  $\mathcal{C}$  сопоставим морфизм функторов  $h_\varphi: h_{X_1} \rightarrow h_{X_2}$ , который любому объекту  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  сопоставляет отображение  $h_\varphi(Y): h_{X_1}(Y) \rightarrow h_{X_2}(Y)$ , переводящее морфизм  $\theta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) = h_{X_1}(Y)$  в композицию  $\varphi \circ \theta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2) = h_{X_2}(Y)$ . Проверим что  $h_{\psi \circ \varphi} = h_\psi \circ h_\varphi$  для любых морфизмов  $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ ,  $\psi: X_2 \rightarrow X_3$ . Действительно, имеем:

$$(h_\psi \circ h_\varphi)(\theta) = h_\psi(\varphi \circ \theta) = \psi \circ (\varphi \circ \theta) = (\psi \circ \varphi) \circ \theta = h_{\psi \circ \varphi}(\theta)$$

для любого  $\theta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1)$ . Это и означает, что  $h: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$  в самом деле является функтором.

**Теорема 15.** *Функтор  $h: \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$  задает эквивалентность категории  $\mathcal{C}$  с полной подкатегорией категории  $\widehat{\mathcal{C}}$ , состоящей из представимых функторов.*

*Доказательство.* Докажем что функтор  $h$  определяет биекцию множеств  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, h_Y)$ , предъядвив обратное отображение  $i: \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, h_Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ . Точнее, определим  $i$  как отображение, которое каждому морфизму функторов  $h_X \rightarrow h_Y$  сопоставляет образ  $\text{id}_X \in h_X(X) \in h_Y(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  относительно отображения  $h_X(X) \rightarrow h_Y(X)$ , определенного этим морфизмом функторов. Проверим, что отображения  $\varphi \mapsto h_\varphi$  и  $i$  являются взаимно обратными.

а)  $i(h_\varphi) = h_\varphi(\text{id}_X) = \varphi \circ \text{id}_X = \varphi$  по определению  $h_\varphi$ .

б) Обратно, пусть  $g: h_X \rightarrow h_Y$  – морфизм функторов. Он задается набором отображений  $g(Z): h_X(Z) \rightarrow h_Y(Z)$  для всех  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . По определению,  $i(g) = g(X)(\text{id}_X) \in h_Y(X)$ , и мы должны проверить, что

$$h_{i(g)}(Z) = g(Z). \quad (10)$$

Отображение  $h_{i(g)}(Z): h_X(Z) \rightarrow h_Y(Z)$  ставит в соответствие морфизму  $\varphi: Z \rightarrow X$  композицию  $i(g) \circ \varphi: Z \rightarrow Y$ . Поэтому нужно установить, что

$$g(Z)(\varphi) = i(g) \circ \varphi.$$

Согласно определению функторного морфизма, для всякого  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_X(X) & \xrightarrow{g(X)} & h_Y(X) \\ h_X(\varphi) \downarrow & & \downarrow h_Y(\varphi) \\ h_X(Z) & \xrightarrow{g(Z)} & h_Y(Z) \end{array}$$

коммутативна, поэтому образ элемента  $\text{id}_X \in h_X(X)$  в  $h_Y(Z)$  не зависит от выбора пути (из двух возможных). Верхний путь (через  $h_Y(X)$ ) переводит  $\text{id}_X \in h_X(X)$  сначала в  $i(g)$ , а затем в  $i(g) \circ \varphi$ . Нижний путь (через  $h_X(Z)$ ) переводит  $\text{id}_X \in h_X(X)$  сначала в  $h_X(\varphi)(\text{id}_X) = \varphi$ , а затем в  $g(Z)(\varphi)$ . Этим формула (10) доказана.

Тем самым мы проверили, что образ функтора  $h$  является полной подкатегорией в  $\widehat{\mathcal{C}}$ ; отсюда сразу следует, что он эквивалентен  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Следствие 16.** *Если функтор из  $\widehat{\mathcal{C}}$  представим, то представляющий его объект  $X$  определен однозначно с точностью до канонического изоморфизма.*

*Доказательство.* Пусть функтор  $F \in \widehat{\mathcal{C}}$  представим, это означает по определению, что он изоморфен функтору вида  $h_X$  для некоторого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Из доказанной в теореме биекции  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_X, h_Y)$  следует, что изоморфизму функторов  $g: h_X \rightarrow h_{X'}$  отвечает единственный изоморфизм представляющих их объектов  $i(g): X \rightarrow X'$  (более точно, из доказательства теоремы легко видеть, что это  $g(X)(\text{id}_X) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ ).  $\square$

Напомним, что ранее мы определили прямое произведение  $X \times Y$  двух объектов  $X, Y$  произвольной категории  $\mathcal{C}$  как объект  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , заданный вместе с морфизмами проекции  $X \xrightarrow{\pi_X} Z \xrightarrow{\pi_Y} Y$ , такой что для любой пары морфизмов  $X \xleftarrow{u} Z' \xrightarrow{v} Y$  существует единственный морфизм  $h: Z' \rightarrow Z$ , для которого  $u = \pi_X \circ h$ ,  $v = \pi_Y \circ h$  (если, конечно, тройка  $(Z, \pi_X, \pi_Y)$  с такими свойствами существует).

Дадим теперь другое определение прямого произведения  $X \times Y$ : это объект  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , представляющий функтор

$$U \mapsto \text{прямое произведение множеств } X(U) \times Y(U) \quad (11)$$

(если этот функтор представим). Здесь и ниже через  $X(U)$ ,  $Y(U)$  мы обозначаем множества  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y)$  соответственно, таким образом,  $\times$  в (11) обозначает прямое произведение множеств (т.е. множество упорядоченных пар  $\{(f, g) \mid f \in X(U), g \in Y(U)\}$ ).

**Предложение 17.** *Два определения прямого произведения в категории: старое (диаграммное) и новое (через представимые функторы) эквивалентны.*

*Доказательство.* Пусть функтор  $U \mapsto X(U) \times Y(U)$  представлен объектом  $Z$ . Рассмотрим явный изоморфизм этих функторов, т.е. набор (естественных по  $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ) биекций

$$g(U): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Z) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y). \quad (12)$$

Положим  $U = Z$ . В левом множестве  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z)$  есть выделенный элемент  $\text{id}_Z$ ; пусть он переходит при биекции в пару  $(\pi_X, \pi_Y) \in X(Z) \times Y(Z)$ . Мы утверждаем, что объект  $Z$ , снабженный морфизмами  $\pi_X: Z \rightarrow X$ ,  $\pi_Y: Z \rightarrow Y$ , есть произведение объектов  $X, Y$  в смысле первого (диаграммного) определения. Действительно, пусть дана пара морфизмов  $\pi'_X: Z' \rightarrow X$ ,  $\pi'_Y: Z' \rightarrow Y$ . Существует единственный морфизм  $q: Z' \rightarrow Z$ , отображающийся в пару  $(\pi'_X, \pi'_Y)$  при биекции (12) (где мы должны положить  $U = Z'$ ).

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z) & \xrightarrow{g(Z)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \\ h_Z(q) \downarrow & & \downarrow h_X(q) \times h_Y(q) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) & \xrightarrow{g(Z')} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y). \end{array}$$

Найдем образ  $\text{id}_Z \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z)$  в  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y)$  двигаясь по двум возможным путям. Имеем:

$$(h_X(q) \times h_Y(q))(g(Z)(\text{id}_Z)) = (h_X(q) \times h_Y(q))(\pi_X, \pi_Y) = (\pi_X \circ q, \pi_Y \circ q).$$

С другой стороны,

$$g(Z')(h_Z(q)(\text{id}_Z)) = g(Z')(q) = (\pi'_X, \pi'_Y).$$

Таким образом, мы доказали что  $\pi'_X = \pi_X \circ q$ ,  $\pi'_Y = \pi_Y \circ q$ . Значит,  $q$  обладает требуемыми (в диаграммном определении) свойствами. Единственность  $q$  легко вытекает из биективности отображений  $g(U)$  в (12).

Обратно, если дана универсальная диаграмма

$$X \xrightarrow{\pi_X} Z \xrightarrow{\pi_Y} Y, \quad (13)$$

определим морфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y) \quad (14)$$

функторов от  $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  со значениями в категории множеств  $\mathcal{S}ets$  следующим образом: произвольному морфизму  $q \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Z)$  мы сопоставляем пару  $(\pi_X \circ q, \pi_Y \circ q) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y)$ . Непосредственно из определений выводится, что для любого морфизма  $\varphi: U \rightarrow V$  в категории  $\mathcal{C}$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, Y) \\ h_Z(\varphi) \uparrow & & \uparrow h_X(\varphi) \times h_Y(\varphi) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, Y) \end{array}$$

коммутативна, а последнее и означает что мы действительно определили морфизм функторов. Свойство универсальности диаграммы (13) означает, что для каждого  $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  соответствующее отображение (14) является биекцией. Поэтому это – изоморфизм функторов.  $\square$

В заключении этого параграфа приведем очень полезные обобщения понятий произведения и суммы в категории, которые называются *расслоенным произведением* и *амальгамированной суммой* соответственно.

**Определение 18.** Пусть  $\varphi: X \rightarrow S$ ,  $\psi: Y \rightarrow S$  – морфизмы в категории  $\mathcal{C}$ . Объект  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , заданный вместе с морфизмами (“проекциями”)  $\pi_X: Z \rightarrow X$ ,  $\pi_Y: Z \rightarrow Y$  называется *расслоенным произведением* объектов  $X$  и  $Y$ , если диаграмма (называемая “декартовым квадратом”)

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

коммутативна и  $\pi_X, \pi_Y$  удовлетворяют следующему свойству универсальности: для любого объекта  $Z' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и морфизмов  $u: Z' \rightarrow X$ ,  $v: Z' \rightarrow Y$  таких что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{v} & Y \\ u \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

коммутативна, существует единственное отображение  $h: Z' \rightarrow Z$  такое что  $u = \pi_X \circ h$ ,  $v = \pi_Y \circ h$ . Расслоенное произведение  $X$  и  $Y$  над  $S$  обычно обозначается  $X \times_S Y$ .

Заметим, что расслоенное произведение  $X \times_S Y$  можно рассматривать как обычное прямое произведение в новой категории  $\mathcal{C}_S$ , объектами которой являются морфизмы  $\varphi: X \rightarrow S$  в  $\mathcal{C}$ , а морфизмами  $X \xrightarrow{\varphi} S$  в  $Y \xrightarrow{\psi} S$  – коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \downarrow \psi & \swarrow \psi & \\ Y & & S \end{array}$$

где  $\chi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  (см. пример п) на стр. 11). Кроме того, в случае, когда в категории  $\mathcal{C}$  есть конечный объект  $E$ , расслоенное произведение  $X \times_E Y$ , по существу, совпадает с обычным прямым произведением  $X \times Y$ .

Как и обычное прямое произведение, расслоенное произведение (если оно существует) единственно с точностью до изоморфизма.

Заметим также, что расслоенное произведение  $X \times_S Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  можно также рассматривать как объект, представляющий функтор  $U \mapsto X(U) \times_{S(U)} Y(U)$ ,  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}ets$  (см. пример а) ниже).

*Амальгамированная сумма*  $X \amalg_S Y$  определяется как двойственное к расслоенному произведению понятие, отвечающее “кодекартову квадрату”

$$\begin{array}{ccc} X \amalg_S Y & \xleftarrow{i_Y} & Y \\ i_X \uparrow & & \uparrow \psi \\ X & \xleftarrow{\varphi} & S \end{array}$$

с соответствующим свойством универсальности: по любой диаграмме  $X \xrightarrow{u} Z \xleftarrow{v} Y$  с условием  $u \circ \varphi = v \circ \psi$  однозначно строится морфизм  $X \amalg_S Y \xrightarrow{h} Z$  с  $u = h \circ i_X$ ,  $v = h \circ i_Y$ .

**Примеры.** а) Расслоенное произведение существует в категории  $\mathcal{S}ets$ . Действительно, для заданных морфизмов  $\varphi: X \rightarrow S$ ,  $\psi: Y \rightarrow S$  подмножество  $Z \subset X \times Y$  прямого произведения  $X \times Y$ , определенное следующим образом:

$$Z := \{(x, y) \in X \times Y \mid \varphi(x) = \psi(y)\},$$

снабженное проекциями  $\pi_X: Z \rightarrow X$ ,  $\pi_Y: Z \rightarrow Y$ , являющимися ограничениями проекций  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ ,  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  (здесь мы проявляем некоторую небрежность в обозначениях) на подмножество  $Z \subset X \times Y$ , как легко проверить, является расслоенным произведением  $X \times_S Y$ . Когда  $S = *$  – финальный объект в  $\mathcal{S}ets$  (напомним, что им является одноэлементное множество), расслоенное произведение превращается в обычное, прямое. В качестве простого упражнения мы оставляем читателю проверку следующих утверждений в категории  $\mathcal{S}ets$ :

- (i) если отображения  $\varphi: X \rightarrow S$ ,  $\psi: Y \rightarrow S$  являются вложениями, то пересечение их образов  $\varphi(X) \cap \psi(Y) \subset S$  есть расслоенное произведение  $X$  и  $Y$  над  $S$  (фактически, это есть обычное произведение в категории  $\mathcal{P}(S)$  – подумайте, почему);
- (ii) если  $Y = \{p\}$  есть одноточечное множество, то пусть  $q = \psi(p) \in S$ . Тогда слой  $\varphi^{-1}(q) \subset X$  есть расслоенное произведение  $X$  и  $Y$  над  $S$  (а если  $\psi: Y \rightarrow S$  – вложение подмножества, то  $X \times_S Y$  есть *прообраз* подмножества  $Y \subset S$  при отображении  $\varphi$ );
- (iii) более общим образом, прообраз  $s \in S$  относительно  $\varphi \circ \pi_X = \psi \circ \pi_Y: X \times_S Y \rightarrow S$  есть обычное прямое произведение  $\varphi^{-1}(s) \times \psi^{-1}(s)$ . Таким образом, это отображение в  $S$  имеет в качестве слоев произведения слоев отображений  $\varphi$  и  $\psi$  (отсюда и название “расслоенное произведение”).

б) Чтобы получить расслоенное произведение в категории  $\mathcal{Top}$ , наделим подмножество  $X \times_S Y \subset X \times Y$  индуцированной топологией (конечно,  $X \times Y$  рассматривается с топологией произведения); проверку оставляем читателю. Например, в категории  $\mathcal{Top}(T)$ , рассматривавшейся в примере j) на стр. 25, расслоенное произведение  $U \times_T V$  двух объектов (т.е. открытых подмножеств в  $T$ ) есть просто их пересечение  $U \cap V$  в  $T$ .

с) В категории  $\mathcal{Alg}$  коммутативных колец с единицей морфизм  $\varphi: A \rightarrow B$  можно рассматривать как задание на  $B$  структуры  $A$ -модуля. Рассмотрим две  $A$ -алгебры  $B, C$  и диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A C & \xleftarrow{i_B} & B \\ i_C \uparrow & & \uparrow \varphi \\ C & \xleftarrow{\psi} & A \end{array}$$

где  $i_B(b) = b \otimes 1_C$ ,  $i_C(c) = 1_B \otimes c$ . Эта диаграмма – кодекартов квадрат, т.е.  $B \otimes_A C$  – амальгамированная сумма в категории  $\mathcal{Alg}$ .

д)\* Амальгамированная сумма существует также в категории групп, причем она имеет интересные приложения в топологии – см. §7 главы II книги [2].

е) Несмотря на то, что в категории дифференцируемых многообразий  $\mathcal{Diff}$  существует обычное произведение (хотя доказательство этого не совсем тривиально), расслоенное произведение в  $\mathcal{Diff}$  часто не существует. В качестве примера рассмотрим гладкое отображение  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , заданное формулой  $f(x, y) = xy$ . Тогда расслоенное произведение  $\mathbb{R}^2 \times_{\mathbb{R}} \{0\}$  со включением начала координат  $\iota: \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  есть, согласно сказанному выше, прообраз  $f^{-1}(0)$ , который есть объединение осей  $OX$  и  $OY$  с индуцированной топологией. Это не есть гладкое многообразие! (По теореме о неявной функции мы по крайней мере знаем, что слой  $C^\infty$ -отображения  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  есть многообразие в окрестности точки, в которой дифференциал  $df$  имеет ранг  $m$ ).

## Дополнение. Категорные версии свойств хаусдорфовости и компактности топологических пространств

Данное дополнение основано на записках лекций Эйрона Бертрама (Aaron Bertram) [1] (см. особенно раздел “Products” из “A Pre-Introduction (A TINY foray into some categorical notions)”).

Как и прежде, через  $\mathcal{Top}$  мы обозначаем категорию топологических пространств.

Напомним следующие определения из общей топологии (см. [9]).



**Определение 19.** (а) Пространство  $T \in \text{Ob}(\mathcal{T}op)$  называется *хаусдорфовым*, если для любых точек  $p, q \in T$ ,  $p \neq q$  существуют открытые подмножества  $U, V \subset T$  такие что  $p \in U$ ,  $q \in V$  и  $U \cap V = \emptyset$ .

(б) Пространство  $T \in \mathcal{T}op$  называется *компактным* если каждое открытое покрытие  $T = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  содержит конечное подпокрытие (заметим, что это определение несколько отличается от стандартного, данного, например, в [9], т.к. не включает требование хаусдорфовости; такие пространства обычно называются *квазикompактными*).

Далее, предположим, что  $\mathcal{C}$  – категория такая что:

- (i) каждый объект  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  является топологическим пространством (помимо прочих вещей);
- (ii) для любых  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  каждый морфизм  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  является непрерывным отображением соответствующих топологических пространств (помимо прочих вещей);
- (iii) для любых двух объектов  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  существует их произведение  $A \times B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

Помимо самой категории  $\mathcal{T}op$ , а также категории  $\mathcal{D}iff$ , рассмотрим еще один пример категории, удовлетворяющей условиям (i)–(iii). Пусть  $T$  – топологическое пространство. Рассмотрим категорию  $\mathcal{P}(T)$ , объекты которой – произвольные подпространства в  $T$  (т.е. подмножества, рассматриваемые как топологические пространства с индуцированной топологией), а морфизмы – вложения (эта категория похожа на рассмотренные ранее категории  $\mathcal{P}(S)$  подмножеств фиксированного множества  $S$  и  $\mathcal{T}op(T)$  открытых подмножеств топологического пространства  $T$ ). Т.к. вложение подпространства является непрерывным отображением, то легко видеть, что  $\mathcal{P}(T)$  удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Для каждого  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  рассмотрим отображение  $\delta_A: A \rightarrow A \times A$ , которое отвечает универсальному свойству произведения, примененному к двум тождественным отображениям  $A \xrightarrow{\text{id}_A} A$ . Другими словами,  $\delta_A$  – единственное отображение  $A \rightarrow A \times A$ , такое что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\
 & \searrow \text{id}_A & \uparrow \delta_A & \nearrow \text{id}_A & \\
 & & A & & 
 \end{array}$$

коммутативна. Обозначим через  $\Delta_A$  образ  $\delta_A$ . Заметим, что отображение  $\delta_A: A \rightarrow A \times A$  инъективно (из условий на категорию  $\mathcal{C}$  вытекает, что  $A$ , в частности,

является множеством, поэтому это утверждение имеет смысл). Подмножество  $\Delta_A \subset A \times A$  называется *диагональю*.

Дадим теперь следующее определение.

**Определение 20.** (a) Назовем  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  *отделимым*, если диагональ  $\Delta_A$  – замкнутое подмножество в  $A \times A$  (на  $A \times A$  рассматривается топология произведения).

(b) Назовем  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  *собственным*, если для любого  $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  проекция на второй множитель  $A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$  есть замкнутое отображение (т.е. образ при отображении  $\pi_B$  любого замкнутого подмножества в  $A \times B$  является замкнутым подмножеством в  $B$ ; на  $A \times B$ , конечно, рассматривается топология произведения).

Рассмотрим еще одно условие на категорию  $\mathcal{C}$ .

(iv) Все произведения объектов категории  $\mathcal{C}$  являются декартовыми произведениями множеств с топологией произведения (помимо других вещей).

**Предложение 21.** *Предположим, что категория  $\mathcal{C}$  удовлетворяет условиям (i)-(iv). Тогда объект  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда когда он отделим.*

*Доказательство.* Пусть пространство  $A$  хаусдорфово. Пусть  $p, q \in A$ ,  $p \neq q$ , а  $U, V$  – непересекающиеся открытые окрестности точек  $p$  и  $q$  соответственно. Тогда  $(p, q) \in U \times V \subset A \times A - \Delta_A$ . Таким образом, любая точка  $A \times A$ , не принадлежащая диагонали, имеет открытую окрестность, не пересекающуюся с диагональю, поэтому множество  $A \times A - \Delta_A$  открыто, а значит диагональ  $\Delta_A$  замкнута. Следовательно, из хаусдорфовости вытекает отделимость.

Обратно, предположим, что  $A$  отделим. Пусть  $(p, q) \in A \times A - \Delta_A$  (т.е.  $p \neq q$ ). Из открытости  $A \times A - \Delta_A$  вытекает наличие открытой окрестности  $W$  точки  $(p, q)$ , не пересекающейся с  $\Delta_A$ . Из определения топологии произведения легко вытекает, что найдется открытая окрестность вида  $U \times V$  точки  $(p, q)$ , содержащаяся в  $W$ . Т.о.  $U \cap V = \emptyset$ , причем  $p \in U$ ,  $q \in V$ . Значит, из отделимости вытекает хаусдорфовость.  $\square$

*Задача.* Найти места в доказательстве, где используются условия (i)-(iv).

Таким образом, “отделимость” и “хаусдорфовость” эквивалентны для объектов произвольной категории, удовлетворяющей условиям (i)-(iv). Однако, как мы увидим ниже, аналогия между “собственностью” и “компактностью” не является такой полной.

**Предложение 22.** *Предположим, что категория  $\mathcal{C}$  удовлетворяет условиям (i)-(iv). Тогда из компактности  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  вытекает собственность  $A$ .*

*Доказательство.* Пусть  $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $Z \subset A \times B$  – замкнутое подмножество. Нам нужно показать, что  $\pi_B(Z) \subset B$  замкнуто. Выберем точку  $b \in B - \pi_B(Z)$ . Заметим, что для произвольного  $a \in A$   $(a, b) \notin Z$ . Рассмотрим открытую окрестность точки  $(a, b) \in A \times B$  вида  $U_a \times V_b$ , не пересекающуюся с (замкнутым!) подмножеством  $Z \subset A \times B$ . Имеем:  $A = \cup_{a \in A} U_a$ , и, в силу компактности  $A$ , можно выбрать конечное подпокрытие  $U_{a_1}, \dots, U_{a_r}$ . Рассмотрим пересечение  $\cap_{i=1}^r V_{b_i}$  соответствующих подмножеств  $V_b$ . Имеем:  $b \in \cap_{i=1}^r V_{b_i}$ ,  $\cap_{i=1}^r V_{b_i}$  открыто в  $B$  (как пересечение *конечного* числа открытых множеств) и, кроме того,  $\cap_{i=1}^r V_{b_i} \subset B - \pi_B(Z)$ . (Последнее может быть доказано следующим образом. Предположим противное, т.е. что  $\exists b' \in (\cap_{i=1}^r V_{b_i}) \cap \pi_B(Z)$ . Тогда из  $b' \in \pi_B(Z)$  вытекает что  $\exists a' \in A$  такая что  $(a', b') \in Z$ . Так как  $U_{a_1}, \dots, U_{a_r}$  образуют покрытие  $A$ , найдется  $k$ ,  $1 \leq k \leq r$  такое что  $a' \in U_{a_k}$ . Из  $b' \in \cap_{i=1}^r V_{b_i}$  следует, что  $b' \in V_{b_k}$ . Тогда мы видим, что  $(a', b') \in (U_{a_k} \times V_{b_k}) \cap Z \Rightarrow$  противоречие.) Мы получаем, что для любой точки  $b \in B - \pi_B(Z)$  существует открытая окрестность в  $B$ , не пересекающаяся с  $\pi_B(Z)$ , а это и означает, что  $\pi_B(Z)$  – замкнутое подмножество в  $B$ .  $\square$

Для того, чтобы из собственности вытекала компактность, на категорию  $\mathcal{C}$  необходимо наложить дополнительные условия. Один из вариантов таких условий приводится в следующем предложении.

**Предложение 23.** Пусть категория  $\mathcal{C}$  удовлетворяет условиям (i)-(iv). Предположим кроме того, что каждый объект в  $\mathcal{C}$  имеет счетную базу открытых множеств и что существует (по крайней мере один) объект  $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , который содержит убывающую цепочку открытых множеств  $B \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ , пересечение которых  $V$  не является открытым. Тогда  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  компактно тогда и только тогда, когда  $A$  собственно.

*Доказательство.* Нам достаточно доказать, что из собственности вытекает компактность.

По условию предложения  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  имеет счетную базу открытых множеств, поэтому для произвольного открытого покрытия  $A = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  всегда найдется счетное подпокрытие  $A = \cup_{n=1}^{\infty} U_{\lambda_n}$ . Предположим, что  $A$  не является компактным, и покрытие  $A = \cup_{n=1}^{\infty} U_{\lambda_n}$  как раз такое, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия.

Пусть  $W_n := U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n}$ . Тогда в произведении  $A \times B$  (где  $B$  такое как в условии предложения) подмножество  $\cup_{n=1}^{\infty} W_n \times V_n \subset A \times B$  (здесь  $V_n$  как в условии предложения) является открытым. Пусть  $Z$  есть дополнение к этому подмножеству в  $A \times B$ . Докажем, что  $\pi_B(Z) = B - V$  (где  $V = \cap_{i=1}^{\infty} V_i$ , как в условии предложения), откуда и будет следовать предложение (действительно,  $Z$  замкнуто, а  $V$  по условию не является открытым, значит,  $B - V$  не замкнуто, следовательно  $A$  не является собственным).

Во-первых,  $V \subset B - \pi_B(Z)$ . Действительно, возьмем  $p \in V$  и для каждого  $a \in A$  выберем  $W_n$  такое что  $a \in W_n$ . Мы видим, что при любом  $a \in A$  точка  $(a, p) \in A \times B$  принадлежит некоторому  $W_n \times V_n$ , следовательно  $(a, p) \notin Z$  при любом  $a \in A$ , а значит  $p \notin \pi_B(Z)$ .

Во-вторых,  $V \supset B - \pi_B(Z)$ , или, эквивалентно,  $B - V \subset \pi_B(Z)$ . Действительно, пусть  $p \notin V$ . Выберем минимальное  $n$  такое что  $p \notin V_n$ . Так как исходное покрытие множества  $A$  не содержит конечного подпокрытия, то  $W_n \neq A$ , следовательно существует  $a \in A$ ,  $a \notin W_n$ . Так как последовательность множеств  $W_n$  является возрастающей, то  $a \notin W_m$  для всех  $m \leq n$ , т.о. при данном выборе  $a$   $(a, p) \notin W_n \times V_n$  для всех  $n$ . Следовательно,  $(a, p) \in Z$ , и значит  $p \in \pi_B(Z)$ .  $\square$

**Примеры.** Многообразия (гладкое или голоморфное)  $M$  всегда отделимо. Оно является компактным если и только если оно собственное, потому что многообразия всегда имеют счетную базу открытых множеств и, если взять гладкое многообразие  $B = \mathbb{R}^n$  (или голоморфное многообразие  $\mathbb{C}^n$ ), то открытые шары радиусов  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  с центрами в начале координат образуют систему подмножеств  $V_n$  как в условии предыдущего предложения.

Пример категории  $\mathcal{P}(T)$  (определенной выше в этом параграфе) показывает, что условие (iv) существенно для справедливости заключений предыдущих предложений.

Действительно, в  $\mathcal{P}(T)$  произведение есть пересечение подпространств, т.е. не является прямым (декартовым) произведением множеств, т.е. условие (iv) не выполнено. И действительно, заключения предложений выше не имеют места при подходящем выборе пространства  $T$ :

- (a) Каждый объект  $A$  в  $\mathcal{P}(T)$  отделим, потому что  $A \times A = A \cap A = A$ . Если мы возьмем в качестве  $T$  нехаусдорфово пространство, то  $T$  будет отделимым, но не хаусдорфовым.
- (b) Подмножество  $A \subset T$  замкнуто тогда и только тогда когда пересечение  $A \cap B$  как подмножество в  $B$  замкнуто для всех  $B \subset T$ . Т.о., замкнутые подмножества  $T$  являются собственными объектами  $\mathcal{P}(T)$ . Если мы выбрали  $T$  некомпактным, то  $T$  собственное но не компактно.

Существует также обобщение понятий отделимости и собственности, использующее вместо обычных произведений расслоенные. На этом пути получается очень важное определение отделимого и собственного морфизма.

Пусть  $f: A \rightarrow X$  – заданный морфизм в категории  $\mathcal{C}$ . Тогда пусть  $A \times_X A$  –

расслоенное произведение, отвечающее декартовому квадрату

$$\begin{array}{ccc} A \times_A A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & A. \end{array}$$

Пусть  $\Delta_f \subset A \times_A A$  есть образ  $A$  при (инъективном!) морфизме  $\delta_f: A \rightarrow A \times_A A$ , отвечающем двум тождественным морфизмам  $A \xrightarrow{\text{id}_A} A$  в силу универсального свойства декартового квадрата.

**Определение 24.** (а) Морфизм  $f$  называется *отделимым*, если  $\Delta_f$  замкнуто.

(б) Морфизм  $f: A \rightarrow X$  называется *собственным*, если для всякого морфизма  $g: B \rightarrow X$  индуцированный морфизм  $\pi_f: A \times_A A \rightarrow B$  есть замкнутое отображение.

(Комментарий к определению.  $\pi_f$  – это морфизм, входящий в декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} A \times_A A & \xrightarrow{\pi_f} & B \\ \pi_g \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Обозначение  $\pi_f$  используется чтобы подчеркнуть его функториальность по  $f$ )

Понятия отделимости и собственности играют очень большую роль в алгебраической геометрии. Дело в том, что на алгебраических многообразиях обычно рассматривается очень слабая топология – топология Зарисского. Алгебраические многообразия с ней как топологические пространства нехаусдорфовы (за исключением тривиальных случаев). Однако из этого не вытекает их неотделимость. Это связано с нарушением условия (iv) (несмотря на то, что условия (i)-(iii) выполнены): топология Зарисского на произведении многообразий не совпадает с топологией произведения. Отметим также, что алгебраические многообразия как топологические пространства с топологией Зарисского являются компактными (или, точнее, квазикompактными, т.к. в определении компактности иногда включают требование хаусдорфовости в качестве одного из условий), однако собственность – довольно сильное условие. О топологии Зарисского можно прочитать в [14], более глубокое изложение данной темы можно найти в книге [16].

## 2.4 Группы в категориях

Понятие представимого функтора позволяет дать определение группового (а также кольцевого и т.д.) объекта в абстрактной категории. Например,

произвольную группу можно рассматривать как групповой объект в категории множеств  $\mathcal{S}ets$ . Ключевую роль при этом будет играть следующее наблюдение: для произвольного множества  $S \in \mathcal{S}ets$  и группы  $G$  множество всех отображений  $\text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G)$  само имеет естественную групповую структуру. Точнее, для произвольных  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G)$  зададим их произведение как такое отображение  $fg: S \rightarrow G$ , что  $(fg)(x) = f(x)g(x) \forall x \in S$  (т.е. значение  $fg$  в точке  $x \in S$  равно произведению значений отображений  $f, g$  в этой точке: т.к.  $f(x), g(x) \in G$ , то их можно перемножать). Легко проверить, что операция

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G) \times \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G), \quad (f, g) \mapsto fg$$

действительно определяет структуру группы на  $\text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G)$ . Причем саму группу  $G$  можно отождествить с множеством  $\text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(*, G)$ , где  $*$   $\in \text{Ob}(\mathcal{S}ets)$  – множество, состоящее из одного элемента. Более того, легко видеть, что для любого отображения  $\varphi: S' \rightarrow S$  соответствующее отображение групп  $h_G(\varphi): \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S', G)$  является гомоморфизмом. Также если  $\alpha: G \rightarrow H$  – гомоморфизм групп, то  $h_\alpha(S): \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, H)$  тоже является гомоморфизмом. Эти рассуждения показывают, что группа  $G$  представляет на категории множеств функтор, принимающий значения в категории групп  $\mathcal{G}r$ , причем гомоморфизмы групп задают функторные морфизмы соответствующих функторов как функторов со значениями в категории групп. Это мотивирует следующее определение.

Пусть  $\mathcal{C}$  – некоторая категория,  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

**Определение 25.** Групповая структура на объекте  $X$  состоит в задании на каждом из множеств  $h_X(Y) = \text{Hom}(Y, X)$  структуры группы, причем эти структуры должны быть согласованы:

для всякого морфизма  $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$  в  $\mathcal{C}$  соответствующее отображение  $h_X(\varphi): h_X(Y_2) \rightarrow h_X(Y_1)$  должно быть гомоморфизмом групп.

Объект  $X$  с групповой структурой на нем называется *группой в категории  $\mathcal{C}$* . Морфизм  $X_1 \rightarrow X_2$  в категории  $\mathcal{C}$  называется *морфизмом соответствующих групп*, если все отображения  $h_{X_1}(Y) \rightarrow h_{X_2}(Y)$ ,  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  – гомоморфизмы групп.

Определение группы в категории, которое мы только что дали, называется *структурным* определением. Помимо структурного, существует еще эквивалентное ему *диаграммное* определение групповой структуры на объекте  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , которое дается в терминах одного объекта  $X$ .

Предположим, что в  $\mathcal{C}$  существуют:

- а) конечный объект  $E$ ,
- б) произведения  $X \times X, X \times X \times X$ .

Ниже нам понадобится т.н. *диагональный морфизм*  $\delta: X \rightarrow X \times X$ , делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times X & \\
 \pi_1 \swarrow & \uparrow \delta & \searrow \pi_2 \\
 X & & X \\
 \swarrow \text{id}_X & & \searrow \text{id}_X \\
 & X &
 \end{array}$$

коммутативной (ср. диаграммное определение произведения).

**Определение 26.** Групповая структура на объекте  $X$  состоит в задании трех морфизмов в  $\mathcal{C}$ :

$$m: X \times X \rightarrow X \quad \text{умножение,}$$

$$i: X \rightarrow X \quad \text{обращение,}$$

$$e: E \rightarrow X \quad \text{единица,}$$

удовлетворяющих следующим условиям.

*Аксиома ассоциативности:* диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X \times X \times X & \xrightarrow{m \times \text{id}_X} & X \times X \\
 \text{id}_X \times m \downarrow & & \downarrow m \\
 X \times X & \xrightarrow{m} & X
 \end{array}$$

коммутативна.

*Аксиома левой единицы:* диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times X & \xrightarrow{\tau \times \text{id}_X} & E \times X & \xrightarrow{e \times \text{id}_X} & X \times X \\
 \delta \uparrow & & & & \downarrow m \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & & X
 \end{array}$$

коммутативна (здесь  $\tau$  обозначает единственный морфизм в финальный объект).

*Аксиома левого обращения:* диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times X & \xrightarrow{i \times \text{id}_X} & X \times X & & \\
 \delta \uparrow & & \downarrow m & & \\
 X & \xrightarrow{\tau} & E & \xrightarrow{e} & X
 \end{array}$$

коммутативна.

**Предложение 27.** Структурное (Определение 25) и диаграммное (Определение 26) определения группы в категории эквивалентны.

*Доказательство.* Пусть  $X$  – группа в смысле первого определения. Т.к. для каждого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  на множестве  $h_X(Y)$  задана структура группы, тем самым для каждого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  определено отображение  $\mu(Y): h_X(Y) \times h_X(Y) \rightarrow h_X(Y)$ , определяющее умножение в этой группе (т.е.  $\mu(Y)(u, v) = uv \in h_X(Y) \quad \forall u, v \in h_X(Y)$ , где  $uv$  – произведение элементов в смысле групповой структуры на  $h_X(Y)$ ), причем это отображение естественно по  $Y$ , т.е. для любого  $\varphi: Y \rightarrow Y'$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y) \times h_X(Y) & \xrightarrow{\mu(Y)} & h_X(Y) \\ \uparrow h_X(\varphi) \times h_X(\varphi) & & \uparrow h_X(\varphi) \\ h_X(Y') \times h_X(Y') & \xrightarrow{\mu(Y')} & h_X(Y') \end{array}$$

коммутативна, как это следует из гомоморфности  $h_X(\varphi) : h_X(\varphi)(uv) = h_X(\varphi)(u)h_X(\varphi)(v)$ ,  $\forall u, v \in h_X(Y')$ . Все вместе это означает, что  $\mu = \{\mu(Y)\}$  есть морфизм функторов  $h_X(Y) \times h_X(Y) \rightarrow h_X(Y)$  от  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Но в силу универсального свойства прямого произведения, функторы  $h_X(Y) \times h_X(Y)$  и  $h_{X \times X}(Y)$  канонически изоморфны, поэтому мы имеем также функторный морфизм  $\bar{\mu} = \{\bar{\mu}(Y)\}: h_{X \times X}(Y) \rightarrow h_X(Y)$ . По Теореме 15 существует и единствен такой морфизм  $m \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times X, X)$ , что  $\bar{\mu} = h_m$ . Напомним, что действие функтора  $h_m: h_{X \times X} \rightarrow h_X$  на морфизм  $t: Y \rightarrow X \times X$  сводится к взятию композиции с  $m$ , т.е.  $h_m(t) = m \circ t: Y \rightarrow X$ . Таким образом, значение  $\bar{\mu}$  на паре морфизмов  $u, v \in h_X(Y)$ , есть композиция  $m \circ t: Y \rightarrow X$ , где  $t$  – это единственное отображение  $Y \rightarrow X \times X$  делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xleftarrow{\pi_1} & X \times X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ & & \swarrow u & & \uparrow t & & \searrow v \\ & & Y & & & & \end{array} \quad (15)$$

коммутативной.

Помимо умножения групповая структура означает задание отображений обращения  $\iota(Y): h_X(Y) \rightarrow h_X(Y)$ ,  $u \mapsto u^{-1}$ , т.е. морфизма функторов  $\iota = \{\iota(Y)\}: h_X \rightarrow h_X$ . Аналогично морфизму  $m$  тогда определяется морфизм  $i: X \rightarrow X$  в категории  $\mathcal{C}$  такой что  $\iota(Y)(u) = i \circ u$  для всякого  $u \in h_X(Y)$ .

Нам осталось определить морфизм  $e: E \rightarrow X$ , где  $E \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  – финальный объект. Определим морфизм функторов  $\varepsilon = \{\varepsilon(Y)\}: h_E(Y) \rightarrow h_X(Y)$ , полагая  $\varepsilon(Y)$  на единственном элементе множества  $h_E(Y)$  равным единичному элементу группы  $h_X(Y)$ . Легко проверить, что  $\varepsilon: h_E \rightarrow h_X$  действительно является морфизмом функторов, и тогда снова по Теореме 15 ему отвечает единственный морфизм  $e: E \rightarrow X$  в категории  $\mathcal{C}$ .

Теперь мы должны проверить, что для только что определенных морфизмов  $m, i, e$  диаграммы Определения 26 действительно коммутативны. Во-первых,



покажем что для  $m: X \times X \rightarrow X$  выполнена аксиома ассоциативности. Для упрощения обозначений для произвольной пары морфизмов  $u, v \in h_X(Y)$ , отображение  $t: Y \rightarrow X \times X$ , делающее диаграмму (15) коммутативной, будем обозначать через  $[u, v]$ . Аналогично для тройки  $u, v, w \in h_X(Y)$  через  $[u, v, w]$  обозначим морфизм  $Y \rightarrow X \times X \times X$  такой что  $\pi_1 \circ [u, v, w] = u$ ,  $\pi_2 \circ [u, v, w] = v$ ,  $\pi_3 \circ [u, v, w] = w$ , где  $\pi_i: X \times X \times X \rightarrow X$  – проекция на  $i$ -й множитель,  $i = 1, 2, 3$ . Из единственности представляющего функтор объекта ясно, что имеются канонические изоморфизмы  $(X \times X) \times X \cong X \times X \times X \cong X \times (X \times X)$ , при которых морфизмы  $[[u, v], w] \leftrightarrow [u, v, w] \leftrightarrow [u, [v, w]]$  отождествляются. В введенных обозначениях мы можем записать  $uv = \mu(Y)(u, v) = m \circ [u, v] \forall u, v \in h_X(Y)$ . Таким образом, ассоциативность умножения в группе  $h_X(Y)$  может быть записана в виде тождества

$$m \circ [m \circ [u, v], w] = m \circ [u, m \circ [v, w]]. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \times X & \xrightarrow{m} & X \\
 & \nearrow [u, v] & \uparrow \pi_1 & & \uparrow \pi_1 \\
 Y & \xrightarrow{\alpha} & (X \times X) \times X & \xrightarrow{m \times \text{id}_X} & X \times X \\
 & \searrow w & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_2 \\
 & & X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X,
 \end{array}$$

где через  $\alpha$  обозначено отображение  $[[u, v], w]$ . Мы утверждаем, что эта диаграмма коммутативна. Например, коммутативность двух квадратов вытекает непосредственно из определения произведения  $m \times \text{id}_X$  двух морфизмов: это, по определению, морфизм  $[m \circ \pi_1, \text{id}_X \circ \pi_2] = [m \circ \pi_1, \pi_2]$ .

Из коммутативности диаграммы вытекает тождество

$$(m \times \text{id}_X) \circ [[u, v], w] = [m \circ [u, v], w].$$

Аналогично доказывается также тождество

$$(\text{id}_X \times m) \circ [u, [v, w]] = [u, m \circ [v, w]].$$

Тогда из условия ассоциативности (16) и последних тождеств следует тождество

$$m \circ (m \times \text{id}_X) \circ [[u, v], w] = m \circ (\text{id}_X \times m) \circ [u, [v, w]].$$

Таким образом, для любой тройки морфизмов  $u, v, w \in h_X(Y)$ , мы имеем

коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (X \times X) \times X & & \\
 & \nearrow^{[[u, v], w]} & \uparrow \cong & \searrow^{m \circ (m \times \text{id}_X)} & \\
 Y & \xrightarrow{[u, v, w]} & X \times X \times X & & X \\
 & \searrow_{[u, [v, w]]} & \downarrow \cong & \nearrow_{m \circ (\text{id}_X \times m)} & \\
 & & X \times (X \times X) & & 
 \end{array}$$

где мы отождествили объекты  $(X \times X) \times X$ ,  $X \times X \times X$  и  $X \times (X \times X)$  относительно канонических изоморфизмов. Так как диаграмма коммутативна при любом выборе объекта  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и морфизмов  $u, v, w: Y \rightarrow X$ , мы можем взять  $Y = X \times X \times X$ ,  $u = v = w = \text{id}_X$ . Очевидно, что тогда коммутативность означает тождество

$$m \circ (m \times \text{id}_X) = m \circ (\text{id}_X \times m),$$

которое и есть аксиома ассоциативности из Определения 26. Последнее рассуждение можно было бы также заменить ссылкой на Теорему 15.

Вернемся к доказательству остальных утверждений предложения. Во-первых, рассмотрим функтор  $h_X \rightarrow h_X \times h_X$ ,  $h_X(Y) \ni u \mapsto (u, u) \in h_X(Y) \times h_X(Y)$ . Ясно, что после отождествления  $h_X \times h_X = h_{X \times X}$  этот функтор есть просто  $h_\delta$ , где  $\delta: X \rightarrow X \times X$  – диагональный морфизм, определенный выше. Точнее, для произвольного  $u \in h_X(Y)$  имеем формулу  $h_\delta(Y)(u) = [u, u] \in h_{X \times X}(Y)$ .

Читатель легко проверит, что коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 h_{X \times X}(Y) & \xrightarrow{h_\tau \times \text{id}_X} & h_{E \times X}(Y) & \xrightarrow{h_e \times \text{id}_X} & h_{X \times X}(Y) \\
 h_\delta(Y) \uparrow & & & & \downarrow h_m(Y) \\
 h_X(Y) & \xrightarrow{\text{id}} & h_X(Y) & & 
 \end{array}$$

равносильна выполнению в группе  $h_X(Y)$  тождества  $eg = g$ , здесь  $e$  – единичный элемент группы. Теперь, применяя Теорему 15, получаем требуемое – условие левой единицы из Определения 26.

Для доказательства аксиомы левого обращения нужно рассмотреть диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 h_{X \times X}(Y) & \xrightarrow{h_i \times \text{id}_X(Y)} & h_{X \times X}(Y) \\
 h_\delta(Y) \uparrow & & \downarrow h_m(Y) \\
 h_X(Y) & \xrightarrow{h_\tau(Y)} h_E(Y) \xrightarrow{h_e(Y)} & h_X(Y),
 \end{array} \tag{17}$$

коммутативность которой равносильна выполнению тождества  $g^{-1}g = e$  в группе  $h_X(Y)$  (здесь снова через  $e$  обозначен единичный элемент группы  $h_X(Y)$ ). Опять применяя Теорему 15, получаем требуемое – условие левого обращения из Определения 26.

Теперь дадим набросок доказательства в обратную сторону, предполагая выполненными условия Определения 26. Для двух морфизмов  $u, v \in h_X(Y)$  определим их произведение  $uv$  как композицию  $m \circ t \in h_X(Y)$ , где  $t = [u, v]: Y \rightarrow X \times X$  – единственный морфизм, делающий диаграмму (15) коммутативной. Для морфизма  $u \in h_X(Y)$  определим “обратный” элемент  $u^{-1}$  как композицию  $i \circ u \in h_X(Y)$ . Наконец, определим “единичный” элемент в  $h_X(Y)$  как композицию  $Y \xrightarrow{\tau} E \xrightarrow{e} X$ . Теперь нужно использовать коммутативность диаграмм в Определении 26 для доказательства ассоциативности введенной операции, существования единичного и обратного элементов соответственно.

Рассмотрим подробнее, например, доказательство тождества  $u^{-1}u = e \circ \tau$ , которое мы выведем из аксиомы левого обращения в Определении 26. Для любого  $u \in h_X(Y)$  имеем:  $h_\delta(u) = t \in h_{X \times X}(Y)$ , где  $t$  – такой морфизм, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\pi_1} & X \times X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ & \searrow u & \uparrow t & \nearrow u & \\ & & Y & & \end{array}$$

коммутативна (т.е.  $t = [u, u]$ ). Тогда  $h_{i \times \text{id}_X}(h_\delta(u))$  – такой морфизм  $s: Y \rightarrow X \times X$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\pi_1} & X \times X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ & \searrow i \circ u & \uparrow s & \nearrow u & \\ & & Y & & \end{array}$$

коммутативна. Тогда  $h_m(h_{i \times \text{id}_X}(h_\delta(u))) = m \circ s: Y \rightarrow X$  есть просто произведение  $u^{-1}u$ . С другой стороны, легко видеть, что  $h_e(h_\tau(u))$  совпадает с определенным выше единичным элементом в  $h_X(Y)$ , поскольку для любого  $u \in h_X(Y)$  композиция  $Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{\tau} E$  совпадает с единственным морфизмом в финальный объект  $Y \rightarrow E$ . Таким образом, мы показали, что

$$u^{-1}u = e \circ \tau. \quad (18)$$

Теперь нужно показать, что

$$uu^{-1} = e \circ \tau. \quad (19)$$

Аналогично проведенному доказательству, аксиома левой единицы позволяет доказать тождество

$$(e \circ \tau)u = u. \quad (20)$$

Теперь пишем:  $uu^{-1} = (e \circ \tau)uu^{-1} = (u^{-1})^{-1}u^{-1}uu^{-1} = (u^{-1})^{-1}(e \circ \tau)u^{-1} = (u^{-1})^{-1}u^{-1} = e \circ \tau$  (мы пользовались тождествами (18), (20) и считали уже доказанной также ассоциативность). Аксиома правой единицы тогда вытекает автоматически из (18), (19), (20) и ассоциативности:  $u(e \circ \tau) = uu^{-1}u = (e \circ \tau)u = u$ .

Таким образом, для каждого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  множество  $h_X(Y)$  имеет структуру группы. Из функториальности по  $Y$  определений операций произведения элементов и взятия обратного элемента в  $h_X(Y)$  легко вытекает, что выполняется требуемое условие согласованности групповых структур для разных  $Y$ .  $\square$

**Примеры.** Групповые объекты в категории множеств – это обычные группы, в категории топологических пространств – топологические группы, в категории дифференцируемых многообразий – группы Ли.

Заметим, что топологические группы и группы Ли – это настоящие группы с некоторой дополнительной структурой (топологического пространства и гладкого многообразия соответственно). Это, вообще говоря, не так для групповых объектов в гомотопической категории  $\mathcal{Top}'$ .

В качестве примера такой “группы” рассмотрим пространство петель  $(\Omega X, \omega_0)$  произвольного топологического пространства  $X$  с отмеченной точкой  $x_0$  (см. пример f) на стр. 23). Напомним, что  $\omega_0$  – постоянная петля, являющаяся отображением  $S^1$  в точку  $x_0$  – рассматривается как отмеченная точка в  $\Omega X$ . *Композицией* петель  $f_1, f_2: I \rightarrow X$ ,  $f_i(0) = f_i(1) = x_0$ ,  $i = 1, 2$  назовем петлю  $f_1 f_2: I \rightarrow X$ , заданную формулами

$$(f_1 f_2)(t) = f_1(2t) \text{ при } 0 \leq t \leq 1/2, (f_1 f_2)(t) = f_2(2t - 1) \text{ при } 1/2 \leq t \leq 1.$$

Определим *обратную* петлю  $f^{-1}: I \rightarrow X$  к петле  $f: I \rightarrow X$ ,  $f(0) = f(1) = x_0$  как петлю, заданную формулой  $f^{-1}(t) = f(1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Тогда нетрудно показать, что композиция петель определяет *непрерывное* отображение  $m: \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$ , обращение петли – *непрерывное* отображение  $i: \Omega X \rightarrow \Omega X$ . Кроме того, имеется отображение  $e: * \rightarrow \Omega X$  точки  $*$  (напомним, что одноэлементное множество  $*$  – финальный объект  $E$  в категориях  $\mathcal{Sets}$ ,  $\mathcal{Top}$  и  $\mathcal{Top}'$ ) в постоянную петлю  $\omega_0 \in \Omega X$ . Нетрудно показать, что только что введенные отображения  $m, i, e$ , если их рассматривать в *гомотопической категории  $\mathcal{Top}'$*  (т.е. фактически применить к ним очевидный функтор  $\mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Top}'$ ) делают диаграммы Определения 26 коммутативными. Это показывает, что пространство  $\Omega X$  является *групповым объектом в гомотопической категории*. Заметим, что  $\Omega X$  не есть группа в обычном смысле слова, т.к. например, произведение петли на обратную не равно единичной петле, а только ей гомотопно. Подробнее пространства петель как группы в категории  $\mathcal{Top}'$  рассматриваются во 2-й главе книги [15], там же можно прочитать о групповых объектах в категории, двойственной к  $\mathcal{Top}'$ .

Другими примерами групповых объектов, не являющихся группами в обычном смысле, являются группы в категории аффинных схем  $\mathcal{Aff}$ . Среди них мы разберем подробно упоминавшийся ранее (см. стр 34) пример  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$ . Напомним, что  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$  представляет функтор  $A^0 = \text{Spec}(A) \mapsto A^\times$ , принимающий значения в категории групп, причем согласованность групповых

структур вытекает из того, что гомоморфизм  $\mathbb{Z}$ -алгебр  $A \rightarrow B$  индуцирует гомоморфизм групп обратимых элементов  $A^\times \rightarrow B^\times$ . Все это показывает, что выполнены все условия Определения 25. Значит, в силу эквивалентности Определений 25 и 26, определен морфизм умножения

$$m: \text{Спец}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}]) \times \text{Спец}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}]) \rightarrow \text{Спец}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}]). \quad (21)$$

В двойственной категории  $\mathcal{A}lg$  он определяет морфизм  $m^0$  из  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$  в категорную сумму  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$  с собой (напомним, что при переходе к двойственной категории произведение переходит в сумму). В примере с) на стр. 15 было показано, что сумма в категории  $\mathcal{A}lg$  совпадает с тензорным произведением алгебр над  $\mathbb{Z}$ . Т.о.  $m^0$  – это гомоморфизм колец

$$\mathbb{Z}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x, x^{-1}].$$

Заметим, что кольцо  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$  есть кольцо  $\mathbb{Z}[x \otimes 1, (x \otimes 1)^{-1}, 1 \otimes x, (1 \otimes x)^{-1}]$ , где  $x \otimes 1$  и  $1 \otimes x$  – независимые переменные. Мы утверждаем, что гомоморфизм

$$m^0: \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[x \otimes 1, (x \otimes 1)^{-1}, 1 \otimes x, (1 \otimes x)^{-1}],$$

двойственный умножению (21), задается следующим условием:

$$m^0(x) = x \otimes x \quad (\Rightarrow m^0(x^{-1}) = (x \otimes x)^{-1})$$

(заметим, что оно определяет гомоморфизм  $\mathbb{Z}$ -алгебр однозначно). Для данных  $a, b \in A^\times$  пусть  $f, g \in \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A)$  – такие гомоморфизмы, что  $f(x) = a$ ,  $g(x) = b$ . Нам нужно проверить, что композиция

$$\text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A) \times \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A) \xrightarrow{\sim} \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x, x^{-1}], A) \quad (22)$$

$$\xrightarrow{h'_{m^0(A)}} \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A),$$

где первая стрелка – каноническая биекция, определенная в силу универсального свойства категорной суммы, а вторая стрелка есть отображение

$$\text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x, x^{-1}], A) \ni k \mapsto k \circ m^0 \in \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A),$$

переводит пару  $(f, g) \in \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A) \times \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A)$  в такой гомоморфизм  $fg \in \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], A)$ , что  $(fg)(x) = ab$ . Итак, пусть  $k \in \text{Ном}_{\mathcal{A}lg}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x, x^{-1}], A)$  – гомоморфизм, отвечающий паре  $(f, g)$  в силу канонической биекции (22). Это означает, что  $k \circ i_1 = f$ ,  $k \circ i_2 = g$ , где

$$i_1: \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x, x^{-1}], \quad x \mapsto x \otimes 1,$$

аналогично,  $i_2(x) = 1 \otimes x$ . Отсюда следует, что  $k(x \otimes 1) = a$ ,  $k(1 \otimes x) = b$ . Тогда мы имеем:

$$k(m^0(x)) = k(x \otimes x) = k((x \otimes 1)(1 \otimes x)) = k(x \otimes 1)k(1 \otimes x) = ab,$$

что и требовалось показать.

Аналогично отображению  $m^0$ , двойственному умножению, определяются отображения  $i^0: \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ , двойственное обращению, и  $e^0: \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}$ , двойственное единице (заметим, что финальный объект в  $\mathcal{A}ff$  отвечает начальному в  $\mathcal{A}lg$ , т.е.  $\mathbb{Z}$ ). Эти два отображения однозначно задаются указанием образа переменной  $x$ :  $i^0(x) = x^{-1}$ ,  $e^0(x) = 1$ . Читателю предлагается проверить коммутативность соответствующих диаграмм Определения 26 (подсказка:

$$\delta^0: \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$$

– это обычное умножение в кольце  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ , а  $\tau^0: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$  – каноническое вложение). За дальнейшими подробностями читателю рекомендуется обратиться к книге [12].

## 2.5 Сопряженные функторы

Для множеств  $S$ ,  $T$  и  $U$  имеется взаимно однозначное соответствие

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S \times T, U) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(T, U)), \quad f \mapsto \tilde{f}$$

определяемое по правилу  $\tilde{f}(s)(t) = f(s, t) \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S \times T, U)$ ,  $s \in S$ ,  $t \in T$ . Зафиксируем  $T$  и определим функторы  $F, G: \mathcal{S}ets \rightarrow \mathcal{S}ets$  следующим образом:  $F(S) = S \times T$ ,  $G(U) = \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(T, U)$ . Тогда указанная выше биекция примет вид

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(F(S), U) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S, G(U)).$$

Обе части этой формулы являются функторами  $\mathcal{S}ets^0 \times \mathcal{S}ets \rightarrow \mathcal{S}ets$  и данное соответствие представляет собой естественную эквивалентность этих функторов (по аргументам  $S$  и  $U$ ). Понятие сопряженной пары функторов обобщает описанную ситуацию.

Пусть  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  – две категории,  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  – функтор. Для каждого объекта  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ ,  $T \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(T), Y)$  является функтором  $\mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{S}ets$ . Предположим, что этот функтор представим объектом  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . По определению это означает, что существует набор биекций

$$\alpha_T: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(T), Y), \quad T \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad (23)$$

функториальный по  $T$ , т.е. такой, что для любого морфизма  $\varphi: S \rightarrow T$  в  $\mathcal{C}$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) & \xrightarrow{\alpha_T} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(T), Y) \\ h_X(\varphi) \downarrow & & \downarrow h_Y(F(\varphi)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X) & \xrightarrow{\alpha_S} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(S), Y) \end{array}$$

коммутативна, т.е.

$$\alpha_S(u \circ \varphi) = \alpha_T(u) \circ F(\varphi), \quad u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X). \quad (24)$$

В частности, полагая в (23)  $T = X$ , имеем канонический морфизм  $\sigma_Y = \alpha_X(\text{id}_X): F(X) \rightarrow Y$ . Теперь, применяя коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) & \xrightarrow{\alpha_T} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(T), Y) \\ h_X(u) \uparrow & & \uparrow h_Y(F(u)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) & \xrightarrow{\alpha_X} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \end{array}$$

для  $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ , получаем каноническое разложение

$$\alpha_T(u) = \sigma_Y \circ F(u) \quad (25)$$

для любого  $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ .

**Лемма 28.** Предположим, что функтор  $T \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(T), Y)$  представим для любого  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ , и пусть  $X_Y = X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  – представляющий объект. Отображение  $Y \mapsto X_Y$  продолжается до единственного функтора  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , задающего изоморфизм бифункторов (см. пример 1) на стр. 26)  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, G(Y))$  и  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(T), Y)$  из  $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{D}$  в  $\mathcal{S}ets$ . Функтор  $G$  называется *правым сопряженным* к  $F$  (а  $F$  – *левым сопряженным* к  $G$ ).

*Доказательство.* В условии леммы мы уже определили функтор  $G$  на объектах, положив  $G(Y) = X_Y$ . Осталось задать  $G$  на морфизмах. Пусть  $v: Y \rightarrow Y'$  – произвольный морфизм в  $\mathcal{D}$ . Зададим морфизм  $G(v)$  формулой

$$G(v) = \alpha_{G(Y')}^{-1}(v \circ \sigma_Y): G(Y) \rightarrow G(Y'). \quad (26)$$

Используя каноническое разложение (25), легко видеть, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} FG(Y) & \xrightarrow{FG(v)} & FG(Y') \\ \sigma_Y \downarrow & & \downarrow \sigma_{Y'} \\ Y & \xrightarrow{v} & Y' \end{array}$$

коммутативна. (Действительно, применяя (25) к случаю, когда  $u = G(v): G(Y) \rightarrow G(Y')$ , получаем  $\sigma_{Y'} \circ F(G(v)) = \alpha_{G(Y)}(G(v))$ ). С другой стороны, согласно заданию

функтора  $G$  на морфизмах (26), имеем  $\alpha_{G(Y)}(G(v)) = v \circ \sigma_Y$ , сопоставление двух последних тождеств и дает требуемое равенство  $\sigma_{Y'} \circ FG(v) = v \circ \sigma_Y$ , означающее коммутативность диаграммы выше.) Более того, коммутативность этой диаграммы выделяет  $G(v)$  среди всех морфизмов  $G(Y) \rightarrow G(Y')$ . В самом деле, если  $\tilde{u}: G(Y) \rightarrow G(Y')$  – такой морфизм, что замена  $FG(v)$  на  $F(\tilde{u})$  оставляет диаграмму коммутативной, т.е.  $v \circ \sigma_Y = \sigma_{Y'} \circ F(\tilde{u})$ , то, согласно (25) и (26),

$$G(v) = \alpha_{G(Y)}^{-1}(v \circ \sigma_Y) = \alpha_{G(Y)}^{-1}(\sigma_{Y'} \circ F(\tilde{u})) = \alpha_{G(Y)}^{-1}(\alpha_{G(Y)}(\tilde{u})) = \tilde{u}.$$

Отсюда сразу вытекает, что  $G$  – функтор, т.е. что  $G(v_1 \circ v_2) = G(v_1) \circ G(v_2)$ ,  $G(\text{id}_Y) = \text{id}_{G(Y)}$ , а также единственность  $G$ .  $\square$

*Задача.* Пусть  $\mathcal{C}$  – категория с конечным объектом  $*$ , а  $\mathcal{E}$  – категория, состоящая из одного объекта  $e$  и одного морфизма  $\text{id}_e$ . Найти левый сопряженный к функтору  $G: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $G(e) = *$ ,  $G(\text{id}_e) = \text{id}_*$ .

**Примеры.** а) Покажем, что левым сопряженным к функтору забывания  $G: \mathcal{G}r \rightarrow \mathcal{S}ets$  является функтор  $F$ , сопоставляющий произвольному множеству  $X$  свободную группу  $F(X)$ , порожденную  $X$ , а отображению множеств  $\varphi: X \rightarrow Y$  – индуцированный гомоморфизм  $F(\varphi): F(X) \rightarrow F(Y)$  соответствующих групп. Действительно, это легко вытекает из следующего универсального свойства свободной группы  $F(X)$ : пусть  $G$  – произвольная группа, тогда для любого отображения множеств  $f: X \rightarrow G$  существует единственный гомоморфизм групп  $\tilde{f}: F(X) \rightarrow G$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\vartheta} & F(X) \\ f \downarrow & \swarrow \tilde{f} & \\ G & & \end{array}$$

коммутативна (здесь  $\vartheta: X \rightarrow F(X)$  – каноническое вложение). Это дает нам инъективное отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(X, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{G}r}(F(X), G), \quad f \mapsto \tilde{f}.$$

Обратное отображение

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}r}(F(X), G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(X, G)$$

определяется следующим образом: гомоморфизму  $g: F(X) \rightarrow G$  ставится в соответствие его ограничение на порождающее подмножество  $X \subset F(X)$ . Легко проверить, что построенные отображения действительно являются взаимно обратными, что и доказывает биекцию  $\text{Hom}_{\mathcal{G}r}(F(X), G) \cong \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(X, G)$ . Ее естественность также легко проверяется.



Есть аналог этого примера для свободной  $k$ -алгебры  $k\{X\}$ , порожденной множеством  $X$ . Точнее, для любой ассоциативной алгебры с единицей  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A}lg_k)$  имеем естественную биекцию  $\text{Hom}_{\mathcal{A}lg_k}(k\{X\}, A) \cong \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(X, A)$ .

б) Аналогично предыдущему примеру, левым сопряженным к забывающему функтору  $\mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{S}ets$  является функтор  $F$ , сопоставляющий произвольному множеству  $X$  свободную абелеву группу, порожденную этим множеством, а отображению множеств – индуцированный гомоморфизм порожденных ими групп.

Для алгебр (рассмотрим случай конечно порожденных алгебр): здесь  $\mathcal{A}lg_k$  – категория коммутативных  $k$ -алгебр с единицей, пусть  $k[x_1, \dots, x_n]$  – алгебра многочленов над  $k$  от  $n$  переменных; тогда для произвольной алгебры  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A}lg_k)$  имеем естественную биекцию  $\text{Hom}_{\mathcal{A}lg_k}(k[x_1, \dots, x_n], A) \cong \text{Hom}_{\mathcal{S}ets}(\{x_1, \dots, x_n\}, A) = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A, 1 \leq i \leq n\} = A^n$ .

Заметим, что рассмотренные примеры (и, местами менее явно, ряд последующих) иллюстрируют следующее правило (см. [11], с.11): “левый сопряженный к функтору забывания есть функтор свободы”.

с) Левым сопряженным к забывающему функтору  $G: \mathcal{T}op \rightarrow \mathcal{S}ets$  является функтор  $F$ , сопоставляющий произвольному множеству  $X$  топологическое пространство  $\tilde{X} := (X, \mathcal{O})$ , где  $\mathcal{O}$  – дискретная топология на множестве  $X$ . Действительно, это легко следует из того, что произвольное отображение множества  $X$  в топологическое пространство  $T$  непрерывно, если на  $X$  рассматривается дискретная топология.

д) Рассмотрим забывающий функтор  $G: \mathcal{A}lg_k$  (ассоциативные алгебры с единицей над фиксированным полем  $k$ )  $\rightarrow \mathcal{V}ect_k$  (векторные пространства над  $k$ ). Покажем, что левым сопряженным к  $G$  является функтор  $T$ , сопоставляющий векторному пространству  $V \in \text{Ob}(\mathcal{V}ect_k)$  его тензорную алгебру  $T(V) \in \text{Ob}(\mathcal{A}lg_k)$ , а линейному отображению  $f: V \rightarrow W$  – соответствующий гомоморфизм тензорных алгебр  $T(f): T(V) \rightarrow T(W)$ . Напомним, что мы уже упоминали следующее универсальное свойство тензорной алгебры  $T(V)$ : для произвольной алгебры  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A}lg_k)$  и произвольного линейного отображения  $f: V \rightarrow A$  существует единственный гомоморфизм алгебр  $\tilde{f}: T(V) \rightarrow A$  такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_V} & T(V) \\ f \downarrow & \swarrow \tilde{f} & \\ A & & \end{array}$$

коммутативна (здесь  $i_V: V \rightarrow T(V)$  – каноническое линейное отображение). Теперь легко проверить, что отображение  $\text{Hom}_{\mathcal{V}ect_k}(V, G(A)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}lg_k}(T(V), A)$ ,  $f \mapsto \tilde{f}$  – каноническая биекция.

е) Пусть  $\mathcal{C}$  – категория всех целостных колец и кольцевых мономорфизмов, а

$\mathcal{D}$  – категория всех полей и кольцевых гомоморфизмов (см. пример с) на стр. 22). Пусть  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  – вложение  $\mathcal{D}$  в качестве полной подкатегории в  $\mathcal{C}$ . Покажем, что функтор поля частных  $\text{Quot}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  является левым сопряженным для  $G$ . Пусть  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Напомним, что для произвольного поля  $K \in \mathcal{D}$  и произвольного вложения  $\varphi: A \rightarrow K$  в качестве подкольца существует единственное отображение полей  $\tilde{\varphi}: \text{Quot}(A) \rightarrow K$  такое что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j_A} & \text{Quot}(A) \\ \varphi \downarrow & & \swarrow \tilde{\varphi} \\ & & K \end{array}$$

коммутативна (здесь  $j_A: A \rightarrow \text{Quot}(A)$  – каноническое вложение области целостности в свое поле частных). Тогда легко проверяется, что сопоставление  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  задает естественную биекцию множеств  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(K)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\text{Quot}(A), K)$ .

f) Рассмотрим категорию  $\text{Vect}_k$  векторных пространств над полем  $k$ . Для любых двух пространств  $L, M \in \text{Ob}(\text{Vect}_k)$  через  $\mathcal{L}(L, M)$  обозначим пространство линейных отображений  $L \rightarrow M$ . Тогда для любой тройки  $U, V, W \in \text{Ob}(\text{Vect}_k)$  имеет место естественный изоморфизм векторных пространств

$$\mathcal{L}(U \otimes V, W) \cong \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W)).$$

Покажем это. Для  $U, V, W \in \text{Ob}(\text{Vect}_k)$  через  $\mathcal{L}(U, V; W)$  обозначим пространство билинейных отображений  $U \times V \rightarrow W$ . Тогда в силу универсального свойства тензорного произведения, пространство  $\mathcal{L}(U \otimes V, W)$  линейных отображений  $U \otimes V \rightarrow W$  изоморфно пространству  $\mathcal{L}(U, V; W)$  билинейных отображений. Каждое такое билинейное отображение  $f: (u, v) \mapsto f(u, v)$  при фиксированном первом аргументе  $u$  представляет собой линейное отображение  $\tilde{f}_u: V \rightarrow W$ ,  $v \mapsto \tilde{f}_u(v) = f(u, v)$ ; от  $u$  это отображение зависит линейно. Таким образом, получаем каноническое линейное отображение

$$\mathcal{L}(U \otimes V, W) = \mathcal{L}(U, V; W) \rightarrow \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W)), f(u, v) \mapsto \{u \mapsto \tilde{f}_u(v)\}.$$

Нетрудно показать, что оно является изоморфизмом векторных пространств над полем  $k$  (в частности, биекцией множеств). Таким образом, функтор  $F_V: \text{Vect}_k \rightarrow \text{Vect}_k$ ,  $U \mapsto U \otimes V$  является левым сопряженным к функтору  $G_V: \text{Vect}_k \rightarrow \text{Vect}_k$ ,  $W \mapsto \mathcal{L}(V, W)$ .

g)\* Пусть  $R, S$  – два кольца,  $M = {}_R M_S$  –  $(R, S)$ -бимодуль (т.е. одновременно имеет структуру левого  $R$ -модуля и правого  $S$ -модуля, причем выполнено условие  $(rm)s = r(ms) \forall r \in R, s \in S, m \in M$ ). Можно показать, что функтор

$$X \mapsto M \otimes_S X: {}_S \text{Mod} \rightarrow {}_R \text{Mod}$$

сопряжен слева функтору

$$Y \mapsto \text{Hom}_R(M, Y): {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_S\text{Mod}.$$

h)\* Рассмотрим функтор  $G: \text{Alg}_k \rightarrow \text{Lie}_k$  из категории ассоциативных алгебр с единицей над полем  $k$  в категорию алгебр Ли над тем же полем, определенный следующим образом: алгебре  $A \in \text{Ob}(\text{Alg}_k)$  он сопоставляет алгебру  $A$ , рассматриваемую как алгебра Ли относительно операции  $[a, b] = ab - ba$  (легко проверить, что это действительно алгебра Ли, например, тождество Якоби вытекает из ассоциативности исходной алгебры  $A$ ). Тогда можно показать, что левым сопряженным к этому функтору является *универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли*  $G(A)$  (см [13], лекция 5).

i) Через  $k[G]$  мы обозначим *групповую алгебру* группы  $G \in \text{Ob}(\mathcal{G}r)$  над полем (или даже коммутативным кольцом)  $k$ . Для произвольной ассоциативной алгебры  $A \in \text{Ob}(\text{Alg}_k)$  через  $A^\times$  обозначим группу ее обратимых элементов. Тогда имеет место следующая естественная биекция:

$$\text{Hom}_{\text{Alg}_k}(k[G], A) \cong \text{Hom}_{\mathcal{G}r}(G, A^\times).$$

Т.е. функтор  $\mathcal{G}r \rightarrow \text{Alg}_k$ ,  $G \mapsto k[G]$ , сопоставляющий группе ее групповую алгебру над  $k$ , является левым сопряженным к функтору  $\text{Alg}_k \rightarrow \mathcal{G}r$ ,  $A \mapsto A^\times$ , сопоставляющему ассоциативной алгебре с единицей ее группу обратимых элементов.

j) Примером сопряженного функтора может также служить т.н. *симметризация* коммутативного моноида (т.е. полугруппы с единицей)  $M$ . Точнее, симметризация моноида  $M$  – это абелева группа  $S(M)$ , определенная вместе с гомоморфизмом подстилающих моноидов  $\alpha_M: M \rightarrow S(M)$ , такая, что выполнено следующее универсальное свойство: для произвольной абелевой группы  $A$  и произвольного гомоморфизма подстилающих моноидов  $f: M \rightarrow A$  существует и единствен гомоморфизм групп  $\tilde{f}: S(M) \rightarrow A$  такой что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha_M} & S(M) \\ f \downarrow & \swarrow \tilde{f} & \\ A & & \end{array}$$

коммутативна. (Читатель легко проверит, что, например, для моноида неотрицательных целых чисел по сложению симметризацией будет аддитивная группа целых чисел, а для моноида натуральных чисел относительно умножения симметризацией будет мультипликативная группа положительных рациональных чисел.) Группа  $S(M)$  функториально зависит от  $M$  в следующем смысле: если  $\varphi: M \rightarrow N$  – гомоморфизм моноидов, то универсальное свойство позволяет нам

однозначно определить гомоморфизм  $S(\varphi): S(M) \rightarrow S(N)$ , который превращает диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \alpha_M \downarrow & & \downarrow \alpha_N \\ S(M) & \xrightarrow{S(\varphi)} & S(N) \end{array}$$

в коммутативную (нужно просто применить универсальное свойство к гомоморфизму  $\alpha_N \circ \varphi: M \rightarrow S(N)$ ). Кроме того,  $S(\psi \circ \varphi) = S(\psi) \circ S(\varphi)$  и  $S(\text{id}_M) = \text{id}_{S(M)}$ . Таким образом,  $S$  является функтором из категории коммутативных моноидов  $Mon$  в категорию абелевых групп  $Ab$  и легко видеть, что он является левым сопряженным к функтору забывания  $F$  из категории  $Ab$  в категорию  $Mon$  (который абелевой группе  $A$  сопоставляет саму эту группу, рассматриваемую как моноид). Действительно, согласно сказанному выше, имеется каноническая биекция

$$\text{Hom}_{Ab}(S(M), A) \cong \text{Hom}_{Mon}(M, F(A)).$$

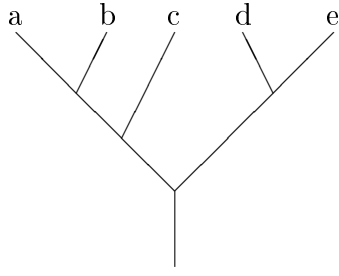
Конструкцию симметризации читатель может найти, например, в [5].

к)\* Функтор  $Commet \rightarrow Met$  вложения категории *полных метрических пространств*  $Commet$  в качестве полной подкатегории категории *всех метрических пространств*  $Met$  (в качестве морфизмов в  $Met$  рассматриваются *изометрии*) имеет левый сопряженный, называемый *пополнением* метрического пространства.

л)\* Оказывается, что в гомотопической категории пространств с отмеченной точкой существует левый сопряженный для функтора  $\Omega$  пространства петель (см. пример f) на стр. 23). Этот функтор называется *надстройкой* (подробности см. в книге [15], с. 22-23).

м)\* Вот еще один пример. Рассмотрим категорию  $\mathcal{M}$ , объектами которой являются т.н. “магмы”, т.е. всевозможные пары  $(Y, \cdot)$ , где  $Y$  — множество, а  $\cdot$  — бинарная операция на нем. В качестве морфизмов  $f: (Y, \cdot) \rightarrow (Z, \circ)$  рассматриваются отображения множеств, согласованные с операциями, т.е. такие что  $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b) \forall a, b \in Y$ . Заметим, что задание бинарной операции на множестве  $Y$  эквивалентно заданию отображения  $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$ . Например, для заданного отображения  $\mu$  соответствующая операция есть просто  $a \cdot b = \mu(a, b) \forall a, b \in Y$ . Рассмотрим функтор забывания операции  $G: \mathcal{M} \rightarrow Sets$ . Нашей задачей является описание левого сопряженного функтора  $F: Sets \rightarrow \mathcal{M}$ .

Заметим, что т.к. операция  $\mu$  в общем случае не является ассоциативной, результат ее выполнения будет зависеть от расстановки скобок. Расставить скобки в последовательности из  $n$  элементов можно задав *планарное бинарное корневое дерево с  $n$  листьями*. Например, дереву с 5 листьями



(27)

соответствует следующая расстановка скобок (здесь и ниже мы опускаем точки, обозначающие операцию):  $((ab)c)(de)$ ; читатель легко выведет общее правило самостоятельно. Обозначим множество планарных бинарных корневых деревьев с  $n$  листьями через  $\mathcal{J}_n$  (мощности множеств  $\mathcal{J}_n$  образуют знаменитую последовательность Каталана). Из сказанного выше следует, что для магмы  $(Y, \cdot)$  каждое дерево  $T \in \mathcal{J}_n$  задает отображение  $\mu_T: Y^n \rightarrow Y$  (например, для дерева  $T$  на диаграмме (27) имеем:  $\mu_T(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = ((y_1 y_2) y_3)(y_4 y_5)$ ). Это отображение можно записать следующим образом. Пусть  $l(T)$  – число листьев корневого дерева  $T$ . Введем обозначение

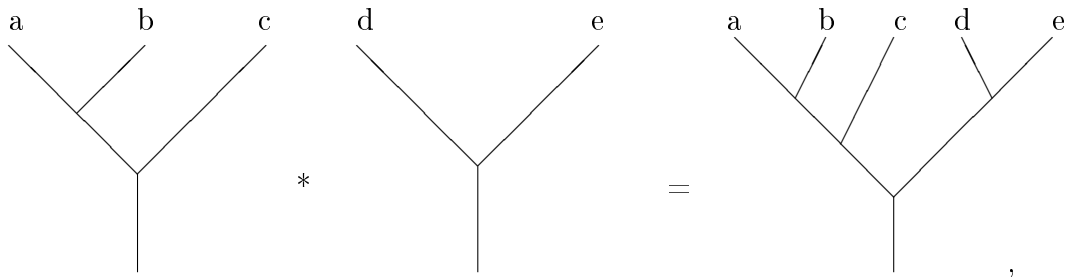
$$\coprod_T \{T\} \times Y^{l(T)} = M(Y).$$

Тогда магма  $(Y, \cdot)$  индуцирует отображение  $\tilde{\mu}: M(Y) \rightarrow Y$ , переводящее  $(T; y_1, \dots, y_{l(T)})$  в  $\mu_T(y_1, \dots, y_{l(T)})$ .

Пусть теперь  $X$  – произвольное множество (не обязательно магма). Снова рассмотрим

$$M(X) = \coprod_T \{T\} \times X^{l(T)}.$$

Заметим, что на множестве  $M(X)$  есть умножение  $\star$ , индуцированное произведением деревьев  $(T', T'') \mapsto T' \star T''$ :



причем, очевидно,  $l(T' \star T'') = l(T') + l(T'')$ . Более подробно,  $(T'; x'_1, \dots, x'_{l(T')}) \star (T''; x''_1, \dots, x''_{l(T'')}) = (T' \star T''; x_1, \dots, x_{l(T')+l(T'')})$ , где  $x_i = x'_i$  при  $1 \leq i \leq l(T')$  и  $x_{l(T')+j} = x''_j$  при  $1 \leq j \leq l(T'')$ . Таким образом,  $(M(X), \star)$  – магма (она называется *свободной магмой над X*), причем множество  $X$  вложено в  $M(X)$  так, что для

любой магмы  $Y$  и произвольного отображения множеств  $\phi: X \rightarrow Y$  существует единственное отображение магм  $\Phi: M(X) \rightarrow Y$  такое что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \cap \downarrow & \nearrow \Phi & \\ M(X) & & \end{array}$$

коммутативна (вложение  $X \subset M(X)$  устроено следующим образом: множество  $\mathcal{J}_1$  состоит из одного дерева  $\tau$ ; элементу  $x \in X$  сопоставляется элемент  $(\tau, x) \in M(X)$ ). Отображение  $\Phi$ , очевидно, задается следующей формулой:  $\Phi(T; x_1, \dots, x_{l(T)}) = \mu_T(\phi(x_1), \dots, \phi(x_{l(T)}))$ .

Сопоставление  $X \mapsto (M(X), \star)$  продолжается до функтора  $\mathcal{S}ets \rightarrow \mathcal{M}$ . Читателю предлагается проверить, что он является искомым левым сопряженным функтором  $F$  к функтору  $G$  (заметим, что  $\Phi$  в диаграмме выше есть не что иное как композиция  $\tilde{\mu} \circ F(\phi)$ , где  $F(\phi): M(X) \rightarrow M(Y)$ , а  $\tilde{\mu}: M(Y) \rightarrow Y$  – отображение, определенное ранее).

## Список литературы

- [1] А. БЕРТРАМ (A. BERTRAM) A Stab at Some Algebraic Geometry. (Записки вводного курса лекций по алгебраической геометрии, опубликованные в Интернете по адресу: <http://www.math.utah.edu/bertram/courses/alggeo/>)
- [2] К.С. БРАУН Когомологии групп. — М.: Наука, 1987.
- [3] И. БУКУР, А. ДЕЛЯНУ Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
- [4] С.И. ГЕЛЬФАНД, Ю.И. МАНИН Методы гомологической алгебры. Введение в теорию когомологий и производные категории. — М.: Наука, 1988.
- [5] М. КАРУБИ  $K$ -теория. Введение. — М.: Мир, 1981.
- [6] К. КАССЕЛЬ Квантовые группы. — М.: Фазис, 1999.
- [7] А.А. КИРИЛЛОВ, А.Д. ГВИШИАНИ Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979.
- [8] А.И. КОСТРИКИН, Ю.И. МАНИН Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986.
- [9] М.В. ЛОСИК Топология. — Изд-во Саратовского университета, 1986.

- [10] С. МАКЛЕЙН (S. MACLANE) Categories for the Working Mathematician. — New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1971.
- [11] С. МАКЛЕЙН Алгебра категорий. *Сб. переводов* “Математика”, 9:1, — М.: Мир, 1965.
- [12] Ю.И. МАНИН Лекции по алгебраической геометрии. Часть 1. Аффинные схемы. — Изд-во Московского университета, 1970.
- [13] М.М. ПОСТНИКОВ Лекции по геометрии. Семестр 5. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.
- [14] М. РИД Алгебраическая геометрия для всех. — М.: Мир, 1991.
- [15] Р.М. СВИТЦЕР Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии. — М.: Наука, 1985.
- [16] Р. ХАРТСХОРН Алгебраическая геометрия. Н.: ИО НФМИ, 2000.
- [17] М.Ш. ЦАЛЕНКО, Е.Г. ШУЛЬГЕЙФЕР Основы теории категорий. — М.: Наука, 1974.
- [18] И.Р. ШАФАРЕВИЧ Основные понятия алгебры. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999 (Первое издание: “Основные понятия алгебры”, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.11. (Итоги науки и техники, ВИНТИ), 1986).
- [19] И.Р. ШАФАРЕВИЧ Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972.