

621.391.3 (07)
М545

№ 1120а

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО

СИНТЕЗ АНАЛОГОВЫХ ФИЛЬТРОВ

к разделу курса

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ**

(Для студентов специальностей 190900 и 072000)



ТАГАНРОГ 1997

Составитель С.В. Кавчук

УДК 621.391.3(07.07) + 621.391.23(07.07) + 621.391.24(07.07)

Методическое руководство “Синтез аналоговых частотных фильтров” к разделу курса “Теоретические основы информационно-измерительной техники”. Таганрог. гос. ун-т; Сост. С.В. Кавчук. Таганрог, 1997.

Рассматриваются частотные характеристики устройств, этапы синтеза, аппроксимация идеальных частотных характеристик и схемотехническая реализация фильтров нижних и верхних частот, а также полосовых фильтров. Даются примеры расчета схем, амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики активных фильтров. Приводятся графики частотных характеристик рассчитанных фильтров. Руководство имеет электронный вариант исполнения в рамках программного обеспечения Mathcad 6.0 PLUS.

Табл. 4. Ил. 35. Библиогр. : 6 назв.

Рецензент С.В. Николаев, канд. техн. наук, доцент кафедры АСНИ и Э ТРТУ.

1. Частотные характеристики линейных устройств

Устройства, для которых справедлив принцип суперпозиции, называют линейными. Это значит, что реакция устройства $y(t)$ на сумму входных воздействий $x_i(t)$ равна сумме реакций $y_i(t)$ на каждое входное воздействие, т.е.

$$y(t) = \sum_i y_i(t) = L \left(\sum_i x_i(t) \right), \text{ где } L - \text{линейный оператор устройства.}$$

В частотной области основной характеристикой устройства (например, фильтра) является частотный коэффициент передачи $K(\omega)$. Модель фильтра как "черного ящика" представляется в виде линейного четырехполюсника с сосредоточенными параметрами, рис.1.

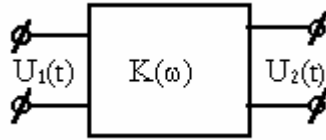


Рис.1

Здесь $U_1(t)$ и $U_2(t)$ - входной и выходной сигналы; $K(\omega)$ - частотный коэффициент передачи, определяемый как отношение спектра выходного сигнала к спектру входного сигнала,

$$K(\omega) := \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)}, \quad (1) \quad \text{где}$$

$U(\omega)$ - спектральная функция сигнала, определяемая как интегральное преобразование Фурье функции $U(t)$,

$$U(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \quad (2)$$

В общем случае частотный коэффициент передачи есть комплексная функция $K(\omega) := D(\omega) + j \cdot M(\omega)$ и часто представляется в показательной форме:

$$K(\omega) := A(\omega) \cdot e^{j \cdot \phi(\omega)} \quad (3) \quad \text{где}$$

$A(\omega) := |K(\omega)|$ - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);

$\phi(\omega) := \text{atan} \left(\frac{M(\omega)}{D(\omega)} \right)$ - фазо-частотная характеристика (ФЧХ),

определяемая как арктангенс отношения мнимой части $M(\omega) := \text{Im}(K(\omega))$

к действительной части $D(\omega) := \operatorname{Re}(K(\omega))$ или как аргумент комплексного коэффициента передачи - $\phi(\omega) := \arg(K(\omega))$

Замена в (2) оператора Фурье $j\omega$ на оператор (переменную) Лапласа $p := a + j\omega$ и соответственно в (1) вещественной частоты ω на комплексную частоту p дает определение передаточной функции или операторного коэффициента передачи

$$K(p) := \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \quad (4) \quad \text{Пе-}$$

редаточная функция - это отношение изображения $U_2(p)$ выходного сигнала к изображению $U_1(p)$ входного сигнала, причем изображение определяется преобразованием Лапласа:

$$U(p) := \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt$$

Функция $K(p)$ является аналитическим продолжением частотного коэффициента передачи $K(\omega)$ с мнимой оси $j\omega$ вещественных частот ω на всю плоскость комплексных частот p .

Передаточная функция линейного четырехполюсника с постоянными параметрами может быть представлена в следующем виде:

$$K(p) := K_0 \cdot \frac{(p - z_1) \cdot (p - z_2) \cdot \dots \cdot (p - z_m)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n)} \quad (5)$$

где K_0 - постоянная величина (не снижая общности можно считать $K_0 := 1$); $z_1 \dots z_m$ и $p_1 \dots p_n$ - нули и полюсы передаточной функции, причем число полюсов n должно превышать число нулей m .

Для устойчивой цепи полюсы $p_1, p_2 \dots p_n$ должны располагаться в левой полуплоскости комплексной частоты p , образуя комплексно-сопряженные пары.

Если сигнал $U(t)$ есть напряжение, то функция $K(\omega)$ является комплексным частотным коэффициентом передачи напряжения. При анализе и синтезе устройств часто используют частотный коэффициент передачи мощности $K_p(\omega)$. Под ним понимают квадрат модуля частотного коэффициента передачи (квадрат АЧХ) четырехполюсника, т.е.

$$K_p(\omega) := (|K(\omega)|)^2 \quad \text{или} \quad K_p(\omega) := (A(\omega))^2$$

$$\text{или } K_p(\omega) = K(\omega) \cdot K_c(\omega) = K(\omega) \cdot K(-\omega), \quad (6)$$

где $K_c(\omega)$ - комплексно-сопряженная функция

В отличие от коэффициента передачи $K(\omega)$ функция $K_p(\omega)$ всегда вещественна и поэтому удобна для задания исходных данных к синтезу четырехполюсника. Если подставить переменную p вместо переменной ω , то функция $K_p(\omega)$ будет аналитически продолжаться с мнимой оси $j\omega$ на всю плоскость комплексных частот p :

$$K_p(p) := K(p) \cdot K(-p) \quad (7)$$

2. Фильтры нижних частот

2.1. Этапы синтеза

Основными характеристиками фильтра нижних частот (ФНЧ) являются частотный коэффициент передачи напряжения $K(\omega)$ и граничная частота, называемая частотой среза фильтра ω_c . Основное назначение таких устройств - передавать с минимальным ослаблением на выход колебания, частоты которых не превосходят частоты среза ω_c . Колебания с частотами $\omega > \omega_c$ должны существенно ослабляться. За единицу измерения величины ослабления (затухания) Δ напряжения фильтром принят децибелл (дБ). Оценка величины ослабления АЧХ устройства в децибеллах имеет вид:

$$\Delta(\omega) := 20 \cdot \log(A(\omega)) \text{ [дБ]}, \quad \text{а}$$

величины ослабления мощности -

$$\Delta_p(\omega) := 20 \cdot \log(K_p(\omega)) \text{ [дБ]}.$$

Ослабление напряжения, выраженное через коэффициент передачи мощности, - $\Delta(\omega) := 10 \cdot \log(K_p(\omega)) \text{ [дБ]}$

В отличие от ФНЧ для многих устройств в технике требуется, чтобы коэффициент передачи напряжения и соответственно мощности в идеальном случае не зависил от частоты. Например, идеальный масштабный усилитель напряжения УН с масштабным коэффициентом $K := 1.5$ и допустимым временем запаздывания $t_o := 0.01 \cdot \text{sec}$ должен иметь постоянную АЧХ

$A_{iy}(\omega) := K$ и линейную ФЧХ $\phi_{iy}(\omega) := -\omega \cdot t_o$. Для идеального усилителя мощности УМ с масштабным коэффициентом $K_{p.iy} := K^2$ коэффициент передачи мощности $K_{p.iy}(\omega) := K_{p.iy}$. Графики идеальных частотных

характеристик масштабирующих устройств для физических частот $\omega \geq 0$ при $\omega_c := 50 \cdot \text{sec}^{-1}$ и $\omega := 0, 0.1 \dots 100 \cdot \text{sec}^{-1}$ приведены на рис.2

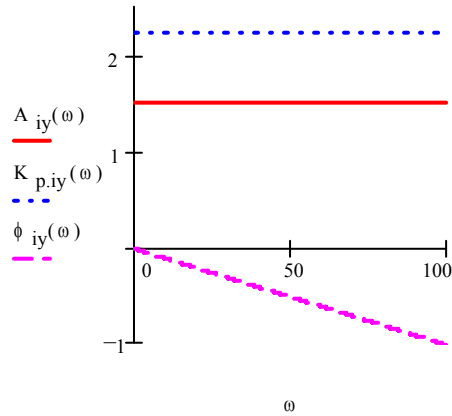


Рис.2

Для формулировки исходных данных при синтезе ФНЧ удобно использовать коэффициент передачи мощности $K_p(\omega)$ (6). Синтез частотных фильтров обычно начинают с выбора идеализированной функции, которая описывает частотную зависимость коэффициента передачи мощности. Ограничения на вид ФЧХ не налагают. Поэтому такой подход называют синтезом по заданной АЧХ.

Очевидно, для ФНЧ с частотой среза ω_c идеальная частотная зависимость коэффициента передачи мощности для физических частот $\omega \geq 0$ имеет вид (рис.3 при $\omega_c := 50 \cdot \text{sec}^{-1}$ и $\omega := 0, 0.1 \dots 100 \cdot \text{sec}^{-1}$):

$$K_{p.if}(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \omega \leq \omega_c \quad (\text{"if" читается как "если"}) \\ 0 & \text{if } \omega > \omega_c \end{cases}$$

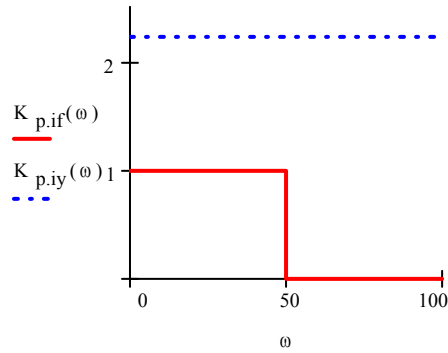


Рис.3

Такая идеализированная частотная характеристика физически нереализуема. Поэтому возникает задача подбора приемлемой функции, аппроксимирующей идеальную и которая может быть реализована реальным физическим устройством. Поэтому второй этап синтеза заключается в аппроксимации идеальной частотной характеристики функцией, соответствующей физически реализуемому устройству. На следующем этапе по аппроксимированному частотному коэффициенту передачи мощности находят передаточную функцию $K_p(p)$ фильтра. Затем по этой функции определяются координаты ее нулей и полюсов.

На заключительном этапе, зная координаты нулей и полюсов передаточной функции, проводят техническую реализацию устройства, т.е. получают принципиальную схему фильтра вместе с номиналами входящих в него элементов.

2.2. Максимально-плоская аппроксимация

2.2.1. Один из способов аппроксимации идеальной частотной характеристики ФНЧ с частотой среза ω_c основан на использовании коэффициента передачи мощности (квадрата АЧХ)

$$K_p(\omega, n) := \frac{\omega_c^{2n}}{\omega_c^{2n} + \omega^{2n}} \quad (8) \quad \text{Для}$$

удобства анализа целесообразно перейти к безразмерной нормированной частоте $\Omega = \omega / \omega_c$. Тогда получим нормированный коэффициент передачи мощности

$$K_p(\Omega, n) := \frac{1}{1 + \Omega^{2n}} \quad (9)$$

ФНЧ с такими частотными свойствами называют фильтром с максимально-плоской характеристикой или фильтром Баттерворта. Целое число $n = 1, 2, 3 \dots$ является порядком фильтра.

Зависимости нормированного коэффициента передачи мощности от частоты $\Omega := 0, 0.01 \dots 3$ при $n := 1, 2 \dots 6$ приведены на рис.4

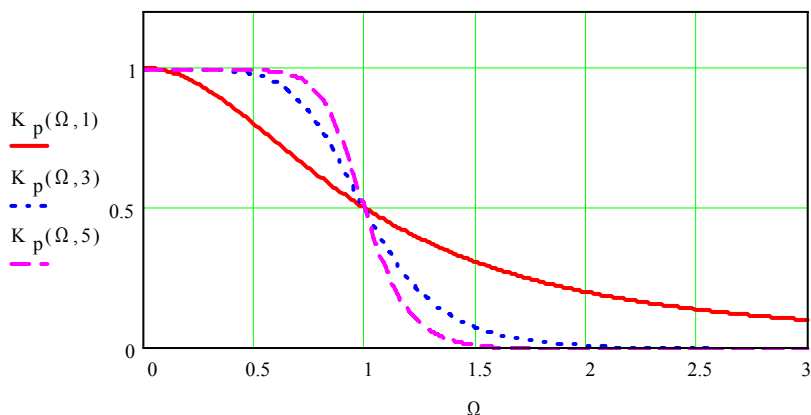


Рис.4

Графики показывают, что в полосе пропускания фильтра при $0 \leq \Omega \leq 1$ квадрат модуля коэффициента передачи напряжения плавно уменьшается с ростом частоты. На частоте среза (при $\Omega = 1$) ослабление по напряжению, вносимое фильтром, составляет $10 \cdot \log(0.5) = -3.01$ децибелл независимо от порядка фильтра. С ростом порядка n идеальная форма частотной характеристики аппроксимируется точнее. Порядок ФНЧ обычно выбирают, исходя из требований к ослаблению сигнала с частотами $\omega > \omega_c$.

2.2.2. Для того, чтобы можно было синтезировать схему фильтра, необходимо сначала перейти от частотного коэффициента передачи мощности $K_p(\omega)$ в форме (8) к передаточной функции мощности $K_p(p)$, а затем к передаточной функции по напряжению $K(p)$.

Введем в формулу (8) оператор Фурье $j\omega$. Так как $1 = (j^2 j^2)^n$ и $j^2 = -1$, то при умножении вещественной переменной ω на единицу, представленную как j^{4n} , выражение (8) приводится к виду

$$K_p(\omega, n) := \frac{\omega_c^{2-n}}{\omega_c^{2-n} + (-1)^n \cdot (j \cdot \omega)^{2-n}}$$

Замена оператора Фурье $j\omega$ на оператор Лапласа $p = a + j\omega$ дает передаточную функцию мощности фильтра Баттерворта

$$K_p(p, n) := \frac{\omega_c^{2-n}}{\omega_c^{2-n} + (-1)^n \cdot p^{2-n}} \quad (10)$$

Введем нормированную комплексную частоту $S = p/\omega_c = A + j\Omega$, где $A = a/\omega_c$ и $\Omega = \omega/\omega_c$. Тогда нормированная передаточная функция мощности

$$K_p(S, n) := \frac{1}{1 + (-1)^n \cdot S^{2-n}} \quad (11)$$

Отсюда следует, что на нормированной плоскости S функция $K_p(S, n)$, соответствующая ФНЧ с характеристикой Баттерворта n -го порядка, имеет $2n$ полюсов. Полюсы являются корнями уравнения

$$1 + (-1)^n S^{2n} = 0 \quad (12) \quad \text{и}$$

лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, рис.5.

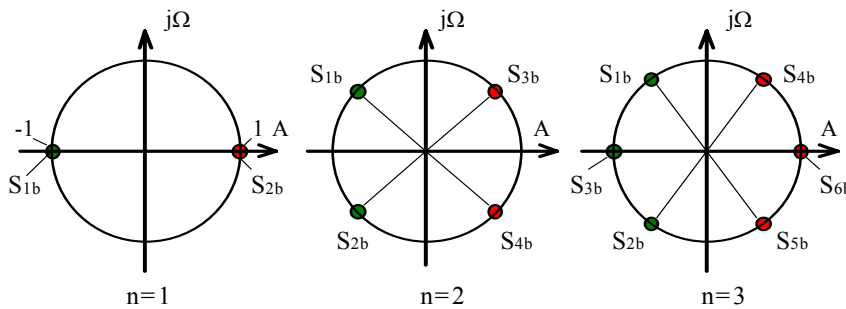


Рис.5

В случае $n=1$ полюсы нормированного коэффициента передачи мощности (11) находят из уравнения $S^2=1$, т.е.

$$S_{1b} := -1 \quad \text{и} \quad S_{2b} := 1 \quad (13) \quad \text{При}$$

$n=2$ уравнение $S^4=-1$ имеет четыре корня:

$$S_{1b} := e^{\frac{j \cdot 3 \cdot \pi}{4}}, \quad S_{2b} := e^{\frac{j \cdot 5 \cdot \pi}{4}}, \quad S_{3b} := e^{\frac{j \cdot \pi}{4}} \quad \text{и} \quad S_{4b} := e^{\frac{j \cdot 7 \cdot \pi}{4}} \quad (14)$$

Для фильтра 3-го порядка из уравнения $S^6=1$ получаем шесть полюсов:

$$\begin{aligned}
 S_{1b} &:= e^{\frac{j \cdot 2 \cdot \pi}{3}}, & S_{2b} &:= e^{\frac{j \cdot 4 \cdot \pi}{3}}, & S_{3b} &:= -1, \\
 S_{4b} &:= e^{\frac{j \cdot \pi}{3}}, & S_{5b} &:= e^{\frac{j \cdot 5 \cdot \pi}{3}} & \text{и} & S_{6b} &:= 1.
 \end{aligned} \quad (15)$$

При переходе от нормированной переменной S к истинной комплексной частоте $p = \omega_c S$ полюсы передаточной функции мощности (10) будут лежать в плоскости $p = a + j\omega$ на окружности с радиусом, равным частоте среза ω_c . Следовательно, для их определения достаточно умножить (13), (14) или (15) на частоту среза.

Полюсы передаточной функции мощности имеют квадрантную симметрию, а именно их число и конфигурация расположения в обеих полуплоскостях одинаковы. При этом физически реализуемому фильтру с передаточной функцией по напряжению $K(S)$ отвечают только полюсы, расположенные в левой полуплоскости. Их "зеркальные копии" в правой полуплоскости относятся к функции $K(-S)$ и в расчет не принимаются [см. формулу (7)].

Таким образом, подобно (5) можно записать нормированную передаточную функцию по напряжению ФНЧ Баттерворта n -го порядка

$$K_{bn}(S) := \frac{1}{(S - S_{1b}) \cdot (S - S_{2b}) \cdot \dots \cdot (S - S_{nb})^n}, \quad (16)$$

где $S_{1b}, S_{2b}, \dots, S_{nb}$ - полюсы нормированной передаточной функции мощности $K_p(S, n)$, расположенные на плоскости S в ее левой полуплоскости.

Пример 2.2.1. Требуется определить передаточную функцию и амплитудно-частотную характеристику ФНЧ Баттерворта 2-го порядка с частотой среза ω_c .

Согласно (14) и рис.5 при $n=2$ нормированная передаточная функция должна иметь на плоскости S два полюса в левой полуплоскости :

$$S_{1b} := e^{\frac{j \cdot 3 \cdot \pi}{4}} \quad \text{и} \quad S_{2b} := e^{\frac{j \cdot 5 \cdot \pi}{4}}$$

Так как $e^{j \cdot \left(\frac{3 \cdot \pi}{4}\right)} := \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot j \cdot \sqrt{2}$ и $e^{j \cdot \left(\frac{5 \cdot \pi}{4}\right)} := \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot j \cdot \sqrt{2}$, то на

основании (16) после упрощений найдем нормированную передаточную функцию

$$K_{b2}(S) := \frac{1}{S^2 + \sqrt{2} \cdot S + 1} \quad (17) \quad \text{За-}$$

мена переменной S на нормированный оператор Фурье $j\Omega$ дает нормированный частотный коэффициент передачи напряжения

$$K_{b2}(\Omega) := \frac{1}{-\Omega^2 + j \cdot \sqrt{2} \cdot \Omega + 1}$$

и нормированную амплитудно-частотную характеристику $A_{b2}(\Omega) := |K_{b2}(\Omega)|$, показанную на рис.6.

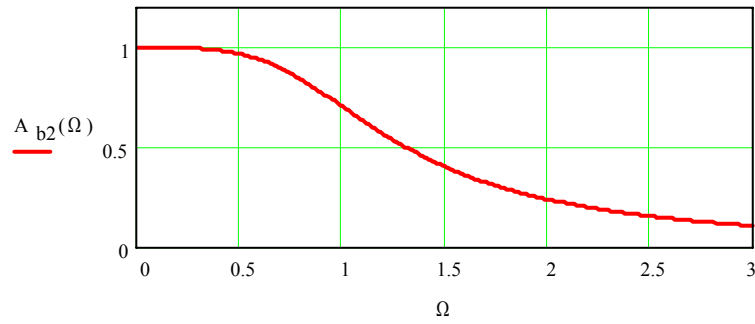


Рис.6

В случае перехода к истинной комплексной частоте p получим два полюса :

$$p_{1b} := \omega_c \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{и} \quad p_{2b} := \omega_c \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Тогда на основании (5) передаточная функция будет

$$K_{b2}(p) := \frac{K_0}{\left[p - \omega_c \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \cdot \left[p - \omega_c \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]}$$

или после упрощений

$$K_{b2}(p) := \frac{K_0}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_c \cdot p + \omega_c^2}$$

В нашем случае аппроксимировалась идеальная частотная характеристика на рис.3, для которой $K_{p,if}(\omega) = K_{if}(\omega)K_{if}(-\omega) = 1$ при $0 < \omega < \omega_c$. Следовательно, на нулевой частоте, когда $\omega=0$ и $p=0$, функция $K_{if}(0) = 1$. С учетом этого условия можно найти коэффициент K_0 , а именно $K_0 := \omega_c^2$. При этом передаточная функция принимает вид

$$K_{b2}(p) := \frac{12 \omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_c \cdot p + \omega_c^2}$$

Соответственно частотный коэффициент передачи напряжения

$$K_{b2}(\omega) := \frac{\omega_c^2}{-\omega^2 + j \cdot \sqrt{2} \cdot \omega_c \cdot \omega + \omega_c^2}$$

и амплитудно-частотная характеристика - $A_{b2}(\omega) := |K_{b2}(\omega)|$.

Этот же результат можно получить из (17) при переходе от нормированной комплексной частоты $S=p/\omega_c$ к истинной комплексной частоте p .

2.3 Чебышевская аппроксимация

2.3.1. Другой способ аппроксимации нормированной частотной характеристики идеального ФНЧ построен на использовании многочлена Чебышева $Z_n(\Omega)$, определяемого как

$$Z_n(\Omega) := \cos(n \cdot \arccos(\Omega))$$

Функция $Z_n(x)$ при любом n может быть найдена из рекуррентного соотношения

$$Z_n(x) = 2xZ_{n-1}(x) - Z_{n-2}(x), \text{ причем } Z_0(x) = 1 \text{ и } Z_1(x) = x.$$

С помощью таких функций удачно (в смысле точности) аппроксимируется идеальная характеристика ФНЧ. При этом в отличие от максимально-плоской аппроксимации здесь допускается неравномерность частотной характеристики в полосе пропускания фильтра, которая оценивается коэффициентом неравномерности $\varepsilon \leq 1$.

При чебышевской аппроксимации нормированный коэффициент передачи мощности задается выражением

$$K_p(\Omega, n, \varepsilon) := \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot (\cos(n \cdot \arccos(\Omega)))^2} \quad (18)$$

В пределах полосы пропускания функция $K_p(\Omega, n, \varepsilon)$ колеблется от 1 до $1/(1+\varepsilon^2)$, причем при $\Omega \gg 1$ фильтр обеспечивает большое ослабление сигнала.

Типичные графики нормированных частотных характеристик передачи мощности при $\Omega := 0, 0.01 \dots 2$ для трех чебышевских фильтров 1-го, 2-го и 3-го порядков приведены на рис.7а и рис.7б при $\varepsilon := 1$ и $\varepsilon := 0.5$ соответственно.

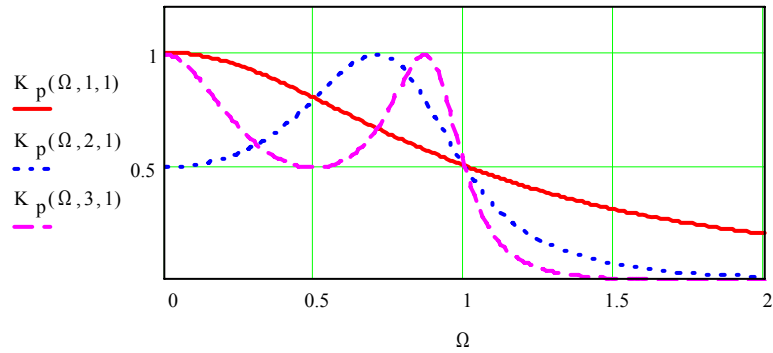


Рис.7а

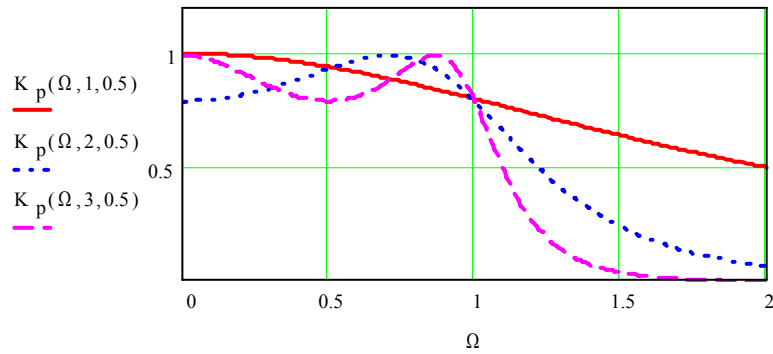


Рис.7б

Из графиков видно, что в полосе пропускания функция $K_p(\Omega, n, \varepsilon)$ не является монотонной. Величина ее пульсаций растет с увеличением ε . С другой стороны увеличение ε ведет к большему ослаблению сигналов вне полосы пропускания. Подбором двух параметров n и ε можно обеспечить выполнение задаваемых требований к синтезируемому фильтру.

2.3.2. Из формулы (18) при замене переменной Ω на нормированный оператор Лапласа S следует, что полюсы нормированной передаточной функции мощности чебышевского фильтра являются корнями уравнения

$$1 + \varepsilon^2 Z_n^2(S) = 0$$

Решение данного уравнения достаточно громоздкое. Поэтому практические расчеты проводятся по следующей методике. Сначала определяется параметр -

$$a(n, \varepsilon) := \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \right) \quad (19) \quad \text{За-}$$

тем находят полюсы передаточной функции мощности фильтра Баттерворта того же порядка и с той же частотой среза. Для перехода к полюсам чебышевского фильтра абсциссу каждого полюса фильтра Баттерворта умножают на $\sinh[a(n, \varepsilon)]$, а ординату - на $\cosh[a(n, \varepsilon)]$, где $\sinh(x)$ и $\cosh(x)$ - гиперболические синус и косинус.

Полюсы фильтра с чебышевской характеристикой лежат на эллипсе (рис.8а, $n := 2$, $\varepsilon := 1$), уравнение которого на плоскости $S=A+j\Omega$ в параметрической форме имеет вид

$$X(t) := \sinh(a(n, \varepsilon)) \cdot \cos(t), \quad Y(t) := \cosh(a(n, \varepsilon)) \cdot \sin(t)$$

и график которого при $n := 2$, $\varepsilon := 1$ и $t := 0, 0.02 \cdot \pi \dots 2 \cdot \pi$ показан на рис.8б. В то же время полюсы фильтра Баттерворта располагаются на единичной окружности (рис.8а,б), уравнение которой в параметрической форме

$$X_o(t) := \cos(t), \quad Y_o(t) := \sin(t)$$

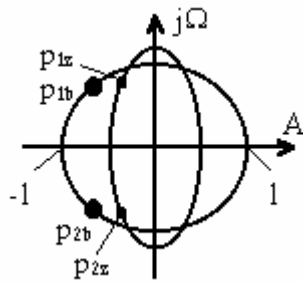


Рис.8а

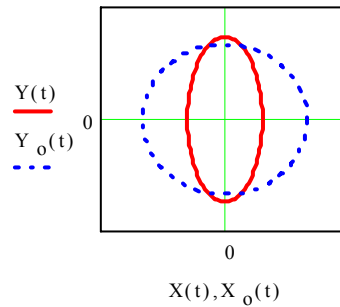


Рис.8б

Зная координаты полюсов и учитывая только полюсы физически реализуемого фильтра, можно аналогично (16) записать выражение нормированной передаточной функции по напряжению чебышевского ФНЧ:

$$K_{zn}(S) := \frac{1}{(S - S_{1z}) \cdot (S - S_{2z}) \dots (S - S_{nz})^n}, \quad (20) \quad \text{где}$$

$S_{1z}, S_{2z}, \dots, S_{nz}$ - полюсы нормированной передаточной функции мощности $K_p(S, n, \varepsilon)$, расположенные на плоскости S в левой полуплоскости.

Пример 2.3.1. Найдем передаточную функцию чебышевского ФНЧ 2-го порядка с параметром $\varepsilon = 1$.

Для заданных условий ($n := 2$ и $\varepsilon := 1$) вычислим параметр $a(n, \varepsilon) = 0.441$. Соответствующий фильтр Баттерворта согласно рис.5 и соотношениям (14) имеет два полюса:

$$S_{1b} := \exp\left(\frac{j \cdot 3 \cdot \pi}{4}\right), \text{ т.е. } S_{1b} = -0.707 + 0.707i$$

$$S_{2b} := \exp\left(\frac{j \cdot 5 \cdot \pi}{4}\right), \text{ т.е. } S_{2b} = -0.707 - 0.707i$$

Абсциссы полюсов нормированной передаточной функции по напряжению чебышевского фильтра будут

$$-0.707 \cdot \sinh(a(n, \varepsilon)) = -0.322$$

Ординаты полюсов составят:

$$0.707 \cdot \cosh(a(n, \varepsilon)) = 0.777 \quad \text{и} \quad -0.707 \cdot \cosh(a(n, \varepsilon)) = -0.777$$

Таким образом, на основании (20) нормированная передаточная функция по напряжению

$$K_{z2}(S) := \frac{1}{(S - (-0.322 + j \cdot 0.777)) \cdot (S - (-0.322 - j \cdot 0.777))}$$

или после упрощений

$$K_{z2}(S) := \frac{1}{S^2 + 0.644 \cdot S + 0.707}$$

Заменяя переменную S нормированным оператором Фурье $j\Omega$, получим нормированный коэффициент передачи напряжения

$$K_{z2}(\Omega) := \frac{1}{-\Omega^2 + j \cdot 0.644 \cdot \Omega + 0.707}$$

Нормированная АЧХ чебышевского ФНЧ 2-го порядка, определяемая как $A_{z2}(\Omega) := |K_{z2}(\Omega)|$, показана на рис.9 при $\Omega := 0, 0.01 \dots 3$. Для сравнения на этом же рисунке дана также из примера 2.2.1, где найден нормированный коэффициент передачи

$$K_{b2}(\Omega) := \frac{1}{-\Omega^2 + j \cdot \sqrt{2} \cdot \Omega + 1},$$

нормированная АЧХ $A_{b2}(\Omega) := |K_{b2}(\Omega)|$ ФНЧ Баттерворта 2-го порядка.

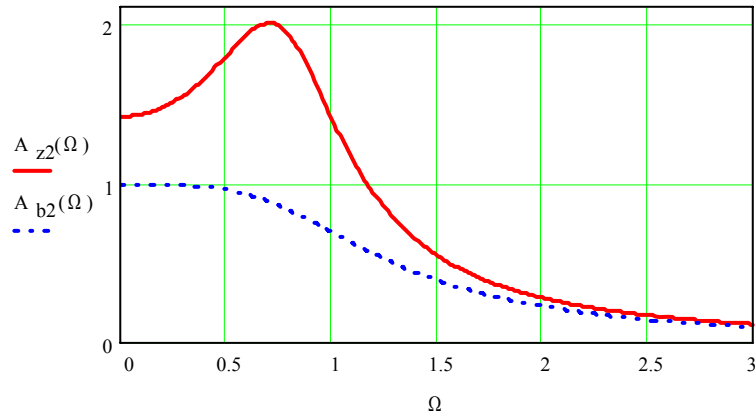


Рис.9

2.4. Схемотехническая реализация фильтров нижних частот

2.4.1. Каскадное построение фильтров

Одним из вариантов реализации фильтров является каскадное (последовательное) включение определенного числа звеньев, которые разделяются идеальными развязывающими элементами (рис.10). В качестве элементов развязки обычно используют эмиттерные или истоковые повторители.

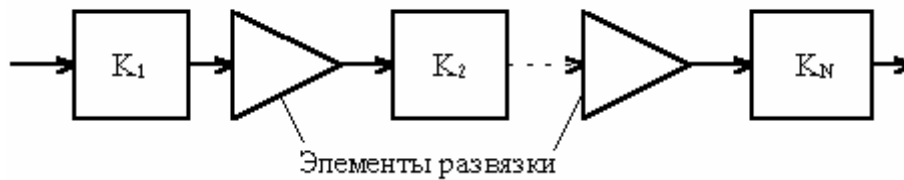


Рис.10

Частотный коэффициент передачи такой цепи

$$K(\omega) = K_1(\omega)K_2(\omega)\dots K_N(\omega)$$

Вид передаточных функций $K_1(p)$, $K_2(p)$, ..., $K_N(p)$ должен быть таким, чтобы они позволяли реализовать полюсы передаточной функции $K(p)$ фильтра в целом, найденные на этапе аппроксимации.

Для создания ФНЧ n -го порядка при каскадном построении достаточно иметь звенья двух типов - звено 1-го порядка с единственным веществен-

ным полюсом и звено 2-го порядка, имеющее два комплексно-сопряженных полюса.

Пассивное звено 1-го порядка. Простейшей цепью 1-го порядка является Г-образный четырехполюсник (рис.11, где $R := 1 \cdot \text{K}\Omega$ и $C := 0.159 \cdot \mu\text{F}$, что соответствует ФНЧ Баттерворта 1-го порядка с частотой среза $f_c := 1000 \cdot \text{Hz}$, причем $\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$)

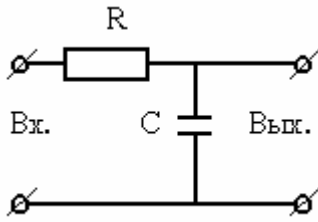


Рис.11

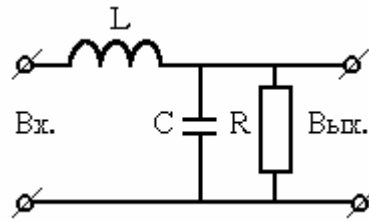


Рис.12

Передаточная функция по напряжению такого звена

$$K_1(p) := \frac{1}{1 + p \cdot R \cdot C} \quad (21) \quad \text{Она}$$

имеет один полюс с координатой - $p_1 := -\frac{1}{R \cdot C}$.

При расчетах для обеспечения нужной координаты полюса один из элементов (R или C) может быть выбран произвольно.

Пассивное звено 2-го порядка. Два комплексно-сопряженных полюса передаточной функции можно получить с помощью Г-образного четырехполюсника, схема которого приведена на рис.12.

Пусть, например, схема имеет номиналы элементов : $R := 0.5 \cdot \text{K}\Omega$, $L := 0.113 \cdot \text{henry}$ и $C := 0.224 \cdot \mu\text{F}$, что соответствует ФНЧ Баттерворта 2-го порядка с частотой среза $f_c := 1000 \cdot \text{Hz}$. Если ввести обозначения

$$\omega_o := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{и} \quad \alpha := \frac{1}{2 \cdot R \cdot C},$$

то для этого звена 2-го порядка передаточная функция по напряжению может быть записана в следующем виде

$$K_2(p) := \frac{\omega_o^2}{p^2 + 2 \cdot \alpha \cdot p + \omega_o^2} \quad (22)$$

Данная передаточная функция имеет два полюса в точках с координатами :

$$p_1 := -\alpha + j \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \text{и} \quad p_1 := -\alpha - j \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (23)$$

Полюсы в зависимости от соотношения между ω_0 и α могут быть как комплексно-сопряженными, так и вещественными.

Активные звенья. Они представляют собой комбинации пассивных цепей и активных элементов.

В качестве активного элемента широко используется операционный усилитель (ОУ). Так принято называть усилительное устройство с большим коэффициентом усиления в широкой полосе частот, включая и нулевую частоту. Входное сопротивление ОУ достаточно велико (10^6 - 10^{12} ом), а выходное - достаточно мало (десятки ом). Поэтому приближенно ОУ можно представить как источник напряжения, управляемый напряжением. Операционный усилитель - это одна из широко применяемых в технике аналоговых интегральных микросхем.

Для построения колебательного звена 2-го порядка нужно иметь индуктивный элемент. Однако его реализация в микроэлектронном исполнении практически невозможна. Выходом из этого положения является применение в схемах фильтров активных элементов.

Активный элемент передает в пассивную цепь некоторую мощность от источника питания. За счет этого можно создать колебательное звено 2-го порядка без катушки индуктивности, используя в пассивной цепи только резисторы R и конденсаторы C. Схемы фильтров на базе таких звеньев получили название активных RC-фильтров.

Активное звено 1-го порядка. Такое звено (рис.13) представляет собой операционный усилитель с коэффициентом усиления K1, охваченный однопетлевой обратной связью.

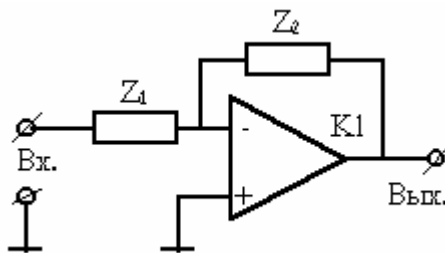


Рис.13

Элементы Z_1 и Z_2 - это некоторые пассивные двухполюсники с сопротивлением в операторной форме $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ соответственно. Как правило, применяются пассивные RC-двухполюсники. Двухполюсник Z_2 соединяет инвертирующий вход ОУ с его выходом, образуя петлю отрицательной обратной связи.

Отношение изображения выходного напряжения $U_2(p)$ к изображению входного напряжения $U_1(p)$ дает передаточную функцию данного активного звена :

$$K_1(p) := \frac{-Z_2(p)}{\frac{Z_2(p)}{K_1} + Z_1(p) \cdot \frac{1}{K_1 + 1}}$$

Считая коэффициент усиления $K_1 \gg 1$, получим приближенное равенство

$$K_1(p) := \frac{-Z_2(p)}{Z_1(p)} \quad (24)$$

Активное звено 2-го порядка. Активное звено со свойствами колебательной цепи 2-го порядка можно получить, соединив инвертирующий вход ОУ с его выходом посредством двухпетлевой цепи обратной связи (рис. 14).

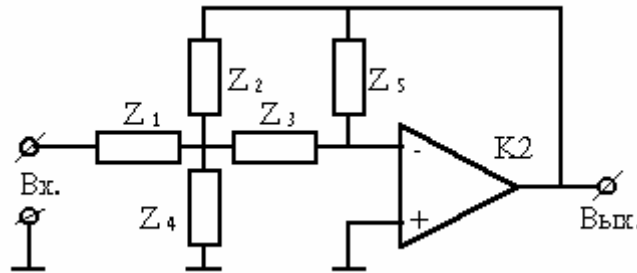


Рис.14

Для удобства анализа целесообразно перейти от операторных сопротивлений $Z(p)$ к проводимостям $Y(p) = 1 / Z(p)$. Тогда передаточная функция по напряжению данного звена

$$K_2(p) := \frac{-Y_1(p) \cdot Y_3(p)}{Y_5(p) \cdot (Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p) + Y_4(p)) + Y_2(p) \cdot Y_3(p)}$$

(25)

Для построения фильтра желательно все проводимости $Y_1(p)$ - $Y_5(p)$ реализовывать с помощью пассивных RC-двухполюсников. В простейшем случае это или проводимости резисторов $Y(p)=G=1/R$ или проводимости конденсаторов $Y(p)=pC$.

Выбор характера (емкостного, чисто активного или смешанного) проводимостей пассивных элементов зависит от вида требуемой передаточной функции синтезируемого фильтра.

Например, на основании (22) типичная передаточная функция ФНЧ 2-го порядка должна иметь вид

$$K_2(p) := \frac{K_0}{a \cdot p^2 + b \cdot p + c} \quad (26) \quad \text{где}$$

K_0 , a , b и c - некоторые постоянные параметры.

Из формулы (25) следует, что для получения такой типовой функции необходимо, чтобы элементы $Y_1(p)$, $Y_2(p)$ и $Y_3(p)$ были резисторами R_1 , R_2 и R_3 с проводимостями G_1 , G_2 и G_3 , а элементы $Y_5(p)$ и $Y_4(p)$ - конденсаторами C_1 и C_2 с проводимостями pC_1 и pC_2 . При этом передаточная функция (25) принимает вид, подобный (26),

$$K_2(p) := \frac{-G_1 \cdot G_3}{C_1 \cdot C_2 \cdot p^2 + C_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) \cdot p + G_2 \cdot G_3} \quad (27)$$

где $K_0 = -G_1 G_3$, $a = C_1 C_2$, $b = C_1(G_1 + G_2 + G_3)$ и $c = G_2 G_3$.

2.4.2. Расчет элементов фильтра нижних частот Баттерворта 2-го порядка

Принципиальная схема активной RC-цепи 2-го порядка на базе операционного усилителя ОУ с коэффициентом усиления K_2 и двухпетлевой обратной связью, соответствующая колебательному звену, приведена рис.15.

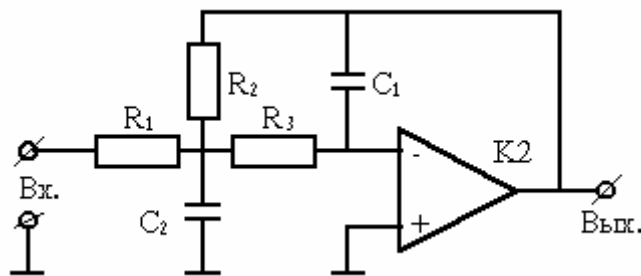


Рис.15

Передаточная функция данной схемы по напряжению при $K_2 \gg 1$:

$$K_2(p) := \frac{-G_1 \cdot G_2}{p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 + p \cdot (G_1 + G_2 + G_3) \cdot C_1 + G_2 \cdot G_3} \quad (28)$$

где $G=1/R$ - проводимость резистора с сопротивлением R . Полюсы передаточной функции на плоскости комплексной частоты $p=a+j\omega$ расположены в точках:

$$p_1 := -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{2 \cdot C_2} + j \cdot \sqrt{\frac{G_2 \cdot G_3}{C_1 \cdot C_2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2}\right)^2} \quad (29a)$$

$$p_2 := -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{2 \cdot C_2} - j \cdot \sqrt{\frac{G_2 \cdot G_3}{C_1 \cdot C_2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2}\right)^2} \quad (29b)$$

Таким образом, положение полюсов функции $K_2(p)$ зависит от значений пассивных элементов схемы - проводимости G резисторов и емкости C конденсаторов.

С другой стороны фильтр Баттерворта 2-го порядка с частотой среза ω_c (пусть $\omega_c := 1 \cdot \text{sec}^{-1}$) и передаточной функцией

$$K_{b2}(p) := \frac{\omega_c^2}{(p - p_{1b}) \cdot (p - p_{2b})} \quad \text{или}$$

в другой форме $K_{b2}(p) := \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_c \cdot p + \omega_c^2}$ должен иметь два по-

люса передаточной функции $p_{1b} := \omega_c \cdot e^{j \cdot \left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ и $p_{2b} := \omega_c \cdot e^{j \cdot \left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, расположенных в левой полуплоскости комплексной частоты p на окружности радиуса ω_c , рис.16

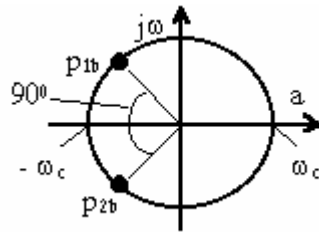


Рис.16

Так как $e^{j \cdot \left(\frac{3\pi}{4}\right)} := \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot j \cdot \sqrt{2}$ и $e^{j \cdot \left(\frac{5\pi}{4}\right)} := \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot j \cdot \sqrt{2}$,

то отсюда следует:

$$p_{1b} := \omega_c \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{и} \quad p_{2b} := \omega_c \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (30)$$

Для того, чтобы схема на рис.15 соответствовала фильтру Баттерворта 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы полюсы функции $K_2(p)$ совпадали с полюсами функции $K_{b2}(p)$. Тогда, приравняв вещественные и мнимые части выражений (29) и (30)

$$-\frac{G_1 + G_2 + G_3}{2 \cdot C_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_c \quad \text{и}$$

$$\sqrt{\frac{G_2 \cdot G_3}{C_1 \cdot C_2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_c, \quad (31)$$

можно получить формулы для расчета элементов схемы фильтра Баттерворта 2-го порядка.

Зададимся частотой среза и приемлемыми номиналами резисторов:

$$f_c := 1000 \cdot \text{Hz}, \quad \omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c,$$

$$R_1 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega, \quad R_2 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega, \quad R_3 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega,$$

$$G_1 := 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}, \quad G_2 := 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}, \quad G_3 := 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}$$

$$\text{Следовательно, } R_1=R_2=R_3=R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega \quad \text{и} \quad G_1=G_2=G_3=G := \frac{1}{R};$$

$$G = 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}$$

На основании (31) найдем емкости конденсаторов:

$$C_2 := \frac{G_1 + G_2 + G_3}{\sqrt{2} \cdot \omega_c}, \quad C_2 = 1.876 \cdot 10^{-7} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2,$$

$$\text{т.е. } C_2 = 0.188 \cdot \mu\text{F};$$

$$C_1 := \frac{G_2 \cdot G_3}{C_2 \cdot \left[\frac{\omega_c^2}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2} \right)^2 \right]},$$

$$C_1 = 4.168 \cdot 10^{-8} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2, \quad \text{т.е. } C_1 = 0.042 \cdot \mu\text{F}$$

Итак, результаты расчета элементов схемы ФНЧ на рис.15 :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega, \quad G_1 = G_2 = G_3 = G = 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}, \\ C_1 = 0.042 \cdot \mu\text{F} \quad \text{и} \quad C_2 = 0.188 \cdot \mu\text{F}$$

Таким образом, для синтезированного фильтра на основании (28) с учетом $G_1 = G_2 = G_3 = G$ при замене переменной Лапласа p на переменную Фурье $j\omega$ имеем частотный коэффициент передачи

$$K_2(\omega) := \frac{-G^2}{G^2 - \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2 + j \cdot \omega \cdot 3 \cdot G \cdot C_1}$$

или в форме $K_2(\omega) = D_2(\omega) + j \cdot M_2(\omega)$, где вещественная часть

$$D_2(\omega) := -G^2 \cdot \frac{(G^2 - \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2)}{\left[(G^2 - \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2)^2 + 9 \cdot \omega^2 \cdot G^2 \cdot C_1^2 \right]} \quad \text{и мнимая часть}$$

$$M_2(\omega) := 3 \cdot G^3 \cdot \omega \cdot \frac{C_1}{\left[(G^2 - \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2)^2 + 9 \cdot \omega^2 \cdot G^2 \cdot C_1^2 \right]}$$

Отсюда для области физически реализуемых частот $\omega = 2\pi f > 0$ следуют

1) амплитудно-частотная характеристика АЧХ - $A_2(f) := |K_2(2 \cdot \pi \cdot f)|$;

2) величина ослабления напряжения на выходе фильтра в децибеллах -

$$\Delta_2(f) := 20 \cdot \log(A_2(f)) \quad [\text{дБ}]; \quad 3)$$

коэффициент передачи мощности - $K_{p2}(f) := A_2(f)^2$; 4)

величина ослабления мощности - $\Delta_{p2}(f) := 20 \cdot \log(K_{p2}(f))$ [дБ];

Фазо-частотная характеристика ФЧХ $\phi_2(\omega)$ часто определяется как арктангенс отношения мнимой части к действительной, т.е. как

$$\phi_2(\omega) := \text{atan} \left(\frac{M_2(\omega)}{D_2(\omega)} \right), \quad \text{и требует дополнительного исследования.}$$

Найдем для полученного фильтра отношение мнимой части к действительной - $V(\omega) := 3 \cdot G \cdot \omega \cdot \frac{C_1}{(-G^2 + \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2)}$. Функция $V(\omega)$ имеет особую

точку $\omega_0 := \frac{G}{\sqrt{C_1 \cdot C_2}}$, в которой знаменатель обращается в нуль и в окрестностях которой знаменатель меняет знак. Из тригонометрии известны

следующие соотношения: $2 \cdot \arctg(x) = \arctg\left(\frac{2 \cdot x}{1 - x^2}\right)$, если $x < 1$, т.е. при положительном знаменателе, и $2 \cdot \arctg(x) = \pi + \arctg\left(\frac{2 \cdot x}{1 - x^2}\right)$, если $x > 1$, т.е. при отрицательном знаменателе. Отсюда при $\phi_2(\omega) := \text{atan}(B(\omega))$ следует, что ФЧХ должна быть записана следующим образом:

$$\alpha_2(\omega) := \begin{cases} \pi + \phi_2(\omega) & \text{if } \omega \leq \omega_0 \text{ ("if" читается как "если")} \\ \phi_2(\omega) & \text{if } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

или для области физических частот $\omega = 2\pi f > 0$ с особой точкой

$$f_0 := \frac{G}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{C_1 \cdot C_2}} \quad \text{как -} \quad \alpha_2(f) := \begin{cases} \pi + \phi_2(2 \cdot \pi \cdot f) & \text{if } f \leq f_0 \\ \phi_2(2 \cdot \pi \cdot f) & \text{if } f > f_0 \end{cases}$$

Графики частотных характеристик при $f := 0, 10 \dots 3000 \cdot \text{Hz}$ и $\omega := 0, 20 \cdot \pi \dots 6000 \cdot \pi \cdot \text{sec}^{-1}$ приведены на рисунках 17а,б,в,г.

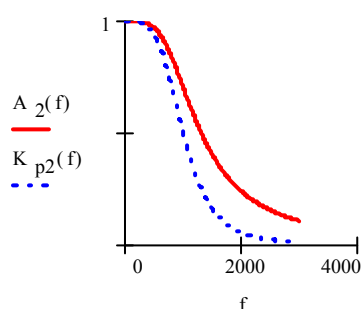


Рис. 17а

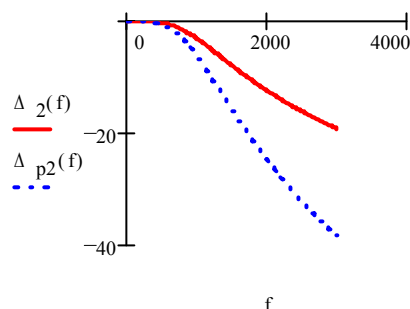


Рис. 17б

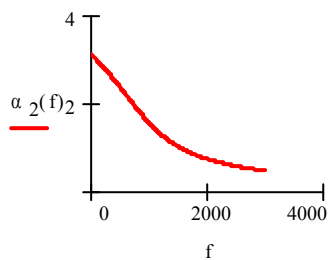


Рис. 17в

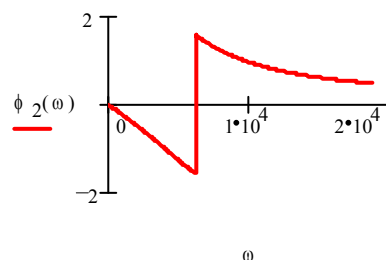


Рис. 17г

2.4.3. Расчет элементов фильтра нижних частот Баттерворта 3-го порядка

Схемная реализация активного RC-фильтра нижних частот 3-го порядка показанна на рис.18.

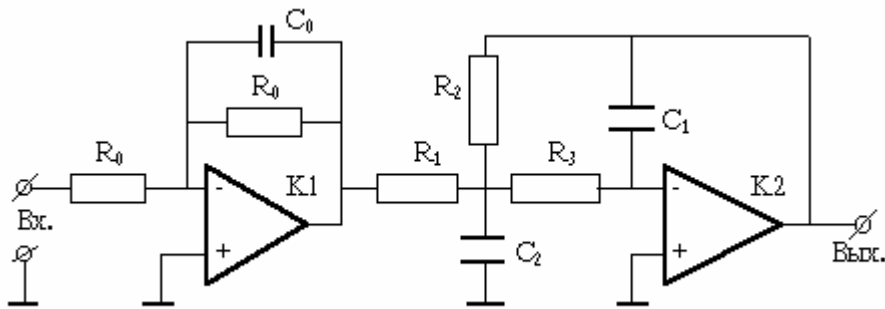


Рис.18

Данный фильтр представляет собой последовательное соединение RC-фильтра 1-го порядка и RC-фильтра 2-го порядка. Передаточная функция фильтра 3-го порядка, составленного из двух звеньев,

$$K_3(p) := K_1(p) \cdot K_2(p) \quad , \quad (32) \quad \text{где}$$

$K_1(p)$ - передаточная функция фильтра 1-го порядка; $K_2(p)$ - функция, определяемая выражением (28).

Схема фильтра первого порядка имеет вид, показанный на рис.19 .

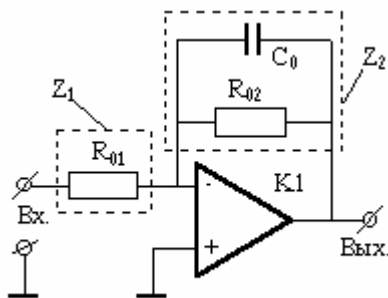


Рис.19

Здесь при коэффициенте усиления $K1 \gg 1$ передаточная функция $K_1(p) = -Z_2(p) / Z_1(p)$, где $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ - комплексные сопротивления в оператор-

ной форме, причем $Z_1(p)=R_{01}$ и носит чисто активный характер, а $Z_2(p)=R_{02}/(1+pR_{02}C_0)$ - емкостной характер. Тогда при $R_{01}=R_{02}=R_0$ (пусть $R_0 := 1 \cdot \text{K}\Omega$ и $C_0 := 1 \cdot \mu\text{F}$) передаточная функция принимает вид :

$$K_1(p) := -\frac{1}{1 + p \cdot R_0 \cdot C_0} \quad (33)$$

и имеет один полюс - $p_3 := -\frac{1}{R_0 \cdot C_0}$ (34) При

замене в (33) оператора Лапласа p на оператор Фурье $j\omega$ получим частотный коэффициент передачи звена 1-го порядка

$$K_1(\omega) := -\frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R_0 \cdot C_0} \quad (35)$$

Таким образом, на основании (28), (32) и (33) передаточная функция $K_3(p)$ фильтра 3-го порядка имеет три полюса p_1, p_2 и p_3 , определяемые выражениями (29) и (34).

С другой стороны фильтр Баттерворта 3-го порядка с частотой среза ω_c (пусть $\omega_c := 1 \cdot \text{sec}^{-1}$) должен иметь передаточную функцию

$$K_{b2}(p) := \frac{\omega_c^3}{(p - p_{b1}) \cdot (p - p_{b2}) \cdot (p - p_{b3})}$$

с тремя полюсам (рис.20) :

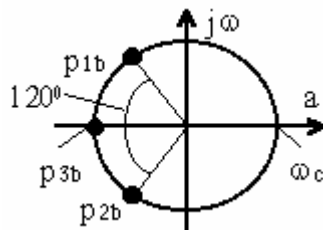


Рис.20

$$p_{1b} := \omega_c \cdot e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad p_{2b} := \omega_c \cdot e^{j \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right)}, \quad p_{3b} := -\omega_c$$

или в другой форме записи :

$$p_{1b} := \omega_c \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right),$$

$$p_{2b} := \omega_c \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) \quad \text{и} \quad p_{3b} := -\omega_c$$

Так как $\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) = -0.5$, $\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right) = 0.866$, $\cos\left(\frac{4\cdot\pi}{3}\right) = -0.5$ и $\sin\left(\frac{4\cdot\pi}{3}\right) = -0.866$, то имеем:

$$p_{1b} := \omega_c \cdot (-0.5 + j \cdot 0.866) ,$$

$$p_{2b} := \omega_c \cdot (-0.5 - j \cdot 0.866) \text{ и } p_{3b} := -\omega_c \text{ (36)}$$

Приравнивая вещественные и мнимые части выражений (29),(34) и (36) , можно получить формулы для расчета элементов схемы фильтра Баттерворта 3-го порядка.

Зададимся частотой среза и приемлемыми номиналами резисторов:

$$f_c := 1000 \cdot \text{Hz} \text{ и } \omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c .$$

Пусть сопротивления -

$$R_0 := 1 \cdot \text{K}\Omega , R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega , R_1 := R , R_2 := R , R_3 := R . \quad \text{Со-}$$

ответственно проводимости - $G_0 := \frac{1}{R_0}$, т.е. $G_0 = 0.001 \cdot \text{siemens}$ и

$$G := \frac{1}{R} , \text{ т.е. } G = 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens} , \text{ причем } G_1 := G , G_2 := G , G_3 := G .$$

Найдем емкости конденсаторов : $C_0 := \frac{1}{\omega_c \cdot R_0}$, вычисления дают -

$$C_0 = 1.592 \cdot 10^{-7} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2 , \text{ т.е. } C_0 = 0.159 \cdot \mu\text{F} ;$$

$$C_2 := \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2 \cdot 0.5 \cdot \omega_c} , C_2 = 2.653 \cdot 10^{-7} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2 , \text{ т.е.}$$

$$C_2 = 0.265 \cdot \mu\text{F} ;$$

$$C_1 := \frac{G_2 \cdot G_3}{C_2 \cdot \left[0.866^2 \cdot \omega_c^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2} \right)^2 \right]} ,$$

$$C_1 = 2.947 \cdot 10^{-8} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2 , \text{ т.е. } C_1 = 0.029 \cdot \mu\text{F} .$$

Итак, результаты расчета схемы ФНЧ на рис.18 : $R_0 := 1.0 \cdot \text{K}\Omega$,

$$R_1 = R_2 = R_3 = R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega , \quad G_1 = G_2 = G_3 = G = 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens} ,$$

$$C_0 = 0.159 \cdot \mu\text{F} , C_1 = 0.029 \cdot \mu\text{F} \text{ и } C_2 = 0.265 \cdot \mu\text{F}$$

Таким образом, для синтезированного фильтра 3-го порядка на основании (28),(32) и (33) с учетом $G_1=G_2=G_3=G$ при замене переменной Лапласа p на переменную Фурье $j\omega$ имеем частотный коэффициент передачи

$$K_3(\omega) := \frac{-1}{(1 + j \cdot \omega \cdot R_0 \cdot C_0)} \cdot \frac{-1 \cdot G^2}{(G^2 - \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2 + j \cdot \omega \cdot 3 \cdot G \cdot C_1)} \quad (37)$$

и для области физически реализуемых частот $\omega = 2\pi f > 0$: амплитудно-частотную характеристику АЧХ - $A_3(f) := |K_3(2 \cdot \pi \cdot f)|$, величину ослабления напряжения на выходе фильтра - $\Delta_3(f) := 20 \cdot \log(A_3(f))$ [дБ], коэффициент передачи мощности - $K_{p3}(f) := A_3(f)^2$ и величину ослабления мощности - $\Delta_{p3}(f) := 20 \cdot \log(K_{p3}(f))$ [дБ].

Фазо-частотную характеристику ФЧХ синтезированного фильтра определим следующим образом. Так как в выражении (37) $e^{j \cdot \pi} = -1$, то, введя обозначения

$$K_{o1}(\omega) := \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R_0 \cdot C_0}$$

и

$$K_{o2}(\omega) := \frac{G^2}{(G^2 - \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2 + j \cdot \omega \cdot 3 \cdot G \cdot C_1)},$$

запишем частотный коэффициент передачи (37) составного фильтра 3-го порядка в следующем виде -

$$K_3(\omega) := K_{o1}(\omega) \cdot K_{o2}(\omega) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi}, \quad \text{где}$$

величина 2π отражает двойной поворот фазы двумя инвертирующими операционными усилителями.

Фазо-частотная характеристика ФЧХ есть аргумент $\arg(K_3(\omega))$ комплексного коэффициента передачи $K_3(\omega) = |K_3(\omega)| \exp[j \arg(K_3(\omega))]$. При умножении комплексных функций $K_{o1}(\omega)$ и $K_{o2}(\omega)$ их аргументы (фазы) $\phi_{o1}(\omega) := \arg(K_{o1}(\omega))$ и $\phi_{o2}(\omega) := \arg(K_{o2}(\omega))$ складываются. Поэтому, обозначив суммарную фазу как $\phi_{o3}(\omega) := \phi_{o1}(\omega) + \phi_{o2}(\omega)$, получим ФЧХ звена 3-го порядка - $\phi_3(\omega) := \phi_{o3}(\omega) + 2 \cdot \pi$.

Таким образом, для области физических частот $\omega = 2\pi f > 0$ фазо-частотная характеристика ФЧХ синтезированного фильтра 3-го порядка может быть представлена в следующем виде :

$$\phi_3(f) := \arg(K_{o1}(2 \cdot \pi \cdot f)) + \arg(K_{o2}(2 \cdot \pi \cdot f)) + 2 \cdot \pi$$

Графики частотных характеристик синтезированного фильтра 3-го порядка приведены на рис.21а,б,в при $f := 0, 10 \dots 3000 \cdot \text{Hz}$. Одновременно здесь показаны такие же зависимости для фильтра 2-го порядка с той же частотой среза $f_c = 1 \cdot 10^3 \cdot \text{Hz}$, а также ФЧХ $\phi_2(f) := \arg(K_2(2 \cdot \pi \cdot f))$. Кроме того на этих рисунках показаны АЧХ $A_1(f) := |K_{o1}(2 \cdot \pi \cdot f)|$, ФЧХ $\phi_1(f) := \arg(K_{o1}(2 \cdot \pi \cdot f)) + \pi$ и коэффициент передачи мощности $K_{p1}(f) := A_1(f)^2$ фильтра 1-го порядка с частотой среза $f_c = 1 \cdot 10^3 \cdot \text{Hz}$.

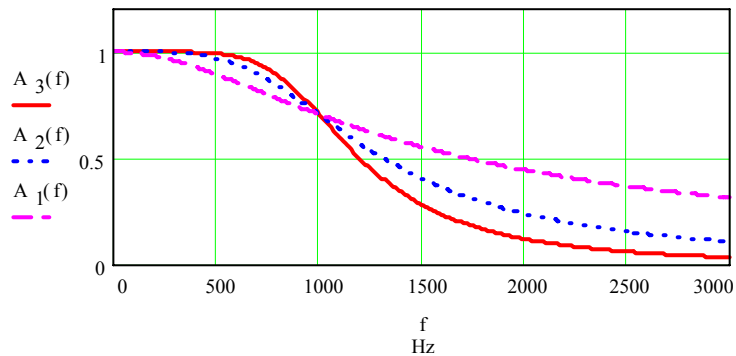


Рис. 21а

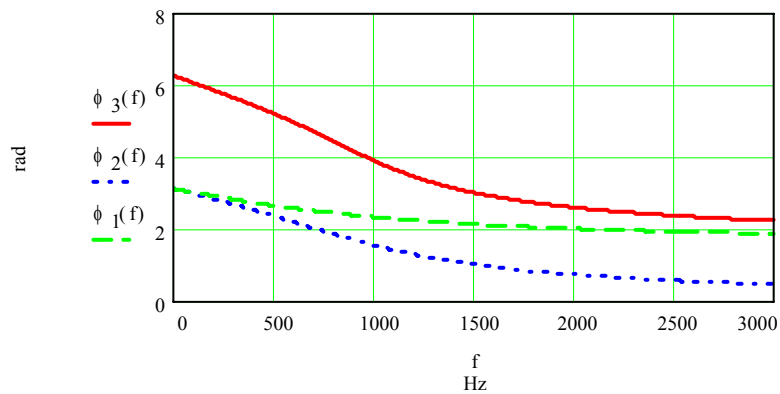


Рис. 21б

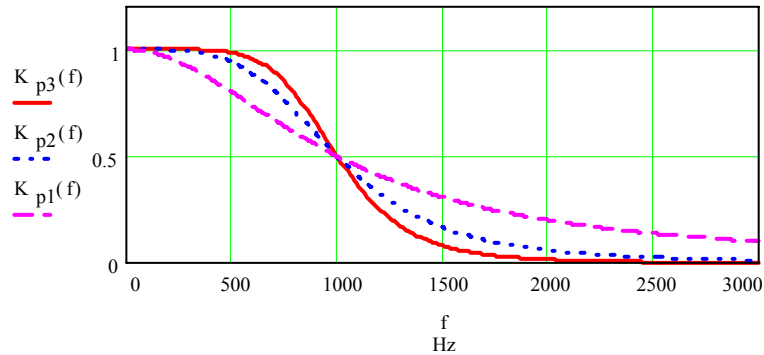


Рис. 21в

2.4.4. Расчет элементов чебышевского фильтра нижних частот 2-го порядка

Синтез чебышевского фильтра обычно проводится на базе фильтра Баттерворта, имеющего тот же порядок n и ту же частоту среза ω_c . Для построения активного RC-фильтра нижних частот с чебышевской характеристикой возьмем схему колебательного звена 2-го порядка (рис.22), которая использовалась в разделе 2.4.2. для реализации активного RC-фильтра Баттерворта.

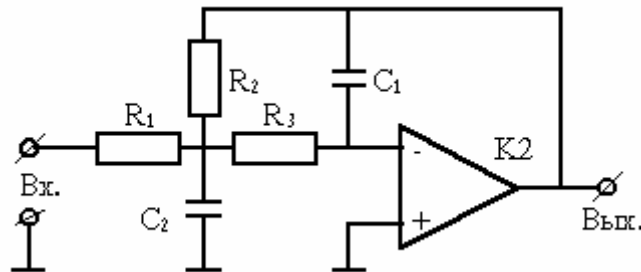


Рис.22

Передаточная функция данной схемы по напряжению при $K2 \gg 1$

$$K_2(p) := \frac{-G_1 \cdot G_2}{p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 + p \cdot (G_1 + G_2 + G_3) \cdot C_1 + G_2 \cdot G_3} \quad (38)$$

где $G=1/R$ - проводимость резистора с сопротивлением R .

Полюсы передаточной функции на плоскости комплексной частоты p расположены в точках:

$$p_1 := -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{2 \cdot C_2} + j \cdot \sqrt{\frac{G_2 \cdot G_3}{C_1 \cdot C_2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2}\right)^2} \quad (39a)$$

$$p_2 := -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{2 \cdot C_2} - j \cdot \sqrt{\frac{G_2 \cdot G_3}{C_1 \cdot C_2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2}\right)^2} \quad (39б)$$

Из примера 2.2.1 видно, что, если обозначить

$$\mu := -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \beta := \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то ФНЧ Баттерворта 2-го порядка имеет на плоскости комплексной частоты p два полюса передаточной функции

$$p_{1b} := \omega_c \cdot (\mu + j \cdot \beta) \quad \text{и} \quad p_{2b} := \omega_c \cdot (\mu - j \cdot \beta)$$

С другой стороны на основании раздела 2.3.2 чебышевский фильтр 2-го порядка с частотой среза ω_c и передаточной функцией (согласно (20) при подстановке $S=p/\omega_c$)

$$K_{z2}(p) := \frac{\omega_c^2}{(p - p_{1z}) \cdot (p - p_{2z})},$$

должен иметь в левой полуплоскости два полюса передаточной функции (см. рис.8)

$$p_{1z} := \omega_c \cdot (\mu \cdot \sinh(a(n, \varepsilon)) + j \cdot \beta \cdot \cosh(a(n, \varepsilon))) ;$$

$$p_{2z} := \omega_c \cdot (\mu \cdot \sinh(a(n, \varepsilon)) - j \cdot \beta \cdot \cosh(a(n, \varepsilon))) ,$$

где параметр $a(n, \varepsilon)$ определяется согласно (19).

Пусть порядок фильтра $n := 2$ и коэффициент неравномерности $\varepsilon := 1$. Тогда (см. пример 2.3.1) -

$$\mu \cdot \sinh(a(n, \varepsilon)) = -0.322 \quad \text{и} \quad j \cdot \beta \cdot \cosh(a(n, \varepsilon)) = 0.777i .$$

При этом полюсы чебышевского фильтра 2-го порядка будут

$$p_{1z} := (-0.322 + j \cdot 0.777) \cdot \omega_c \quad \text{и} \quad p_{2z} := (-0.322 - j \cdot 0.777) \cdot \omega_c \quad (40)$$

Для того, чтобы схема на рис.21 соответствовала чебышевскому фильтру 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы полюсы функции $K_2(p)$ совпадали с полюсами функции $K_{z2}(p)$. Тогда, приравнявая вещественные и мнимые части выражений (39) и (40)

$$-\frac{G_1 + G_2 + G_3}{2 \cdot C_2} = -0.322 \cdot \omega_c \quad \text{и}$$

$$\sqrt{\frac{G_2 \cdot G_3}{C_1 \cdot C_2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2} \right)^2} = 0.777 \cdot \omega_c, \quad (41)$$

можно получить формулы для расчета элементов схемы чебышевского фильтра 2-го порядка.

Зададимся частотой среза и приемлемыми номиналами резисторов:

$$f_c := 1000 \cdot \text{Hz}, \quad \omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c,$$

$$R_1 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega, \quad R_2 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega, \quad R_3 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega,$$

$$G_1 := 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}, \quad G_3 := 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}, \quad G_2 := 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}$$

Следовательно, $R_1=R_2=R_3=R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega$ и $G_1=G_2=G_3=G := \frac{1}{R}$, причем

$$G = 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}$$

На основании (41) найдем емкости конденсаторов:

$$C_2 := \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2 \cdot (0.322 \cdot \omega_c)}, \quad \text{подстановка численных значений дает -}$$

$$C_2 = 4.119 \cdot 10^{-7} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2, \quad \text{т.е. } C_2 = 0.412 \cdot \mu\text{F};$$

$$C_1 := \frac{G_2 \cdot G_3}{C_2 \cdot \left[0.777^2 \cdot \omega_c^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_2} \right)^2 \right]},$$

$$C_1 = 2.683 \cdot 10^{-8} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{coul}^2, \quad \text{т.е. } C_1 = 0.027 \cdot \mu\text{F}.$$

Итак, результаты расчета схемы чебышевского ФНЧ (рис.22) :

Сопrotивления резисторов - $R_1 = R_2 = R_3 = R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega$,

Проводимости резисторов - $G_1=G_2=G_3=G = 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}$

Емкости конденсаторов - $C_1 = 0.027 \cdot \mu\text{F}$ и $C_2 = 0.412 \cdot \mu\text{F}$

Таким образом, для синтезированного фильтра на основании (38) с учетом $G_1=G_2=G_3=G$ при замене переменной Лапласа p на переменную Фурье $j\omega$ имеем частотный коэффициент передачи

$$K_{z2}(\omega) := \frac{-G^2}{G^2 - \omega^2 \cdot C_1 \cdot C_2 + j \cdot \omega \cdot 3 \cdot G \cdot C_1} \quad (42)$$

Графики АЧХ $A_{z2}(f) := |K_{z2}(2 \cdot \pi \cdot f)|$, ФЧХ $\phi_{z2}(f) := \arg(K_{z2}(2 \cdot \pi \cdot f))$, величины ослабления напряжения на выходе фильтра в децибеллах - $\Delta_{z2}(f) := 20 \cdot \log(A_{z2}(f))$ [дБ], а также коэффициента передачи мощности $K_{pz2}(f) := A_{z2}(f)^2$ синтезированного ФНЧ 2-го порядка с чебышевской характеристикой приведены на рис. 23а,б,в,г. Для сравнения на этих рисунках показаны также аналогичные частотные характеристики ФНЧ Баттерворта 2-го порядка.

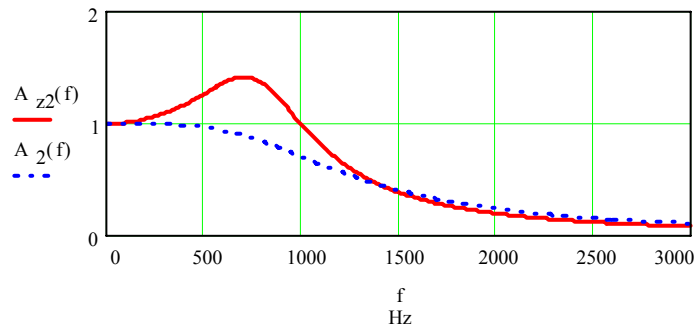


Рис.23а

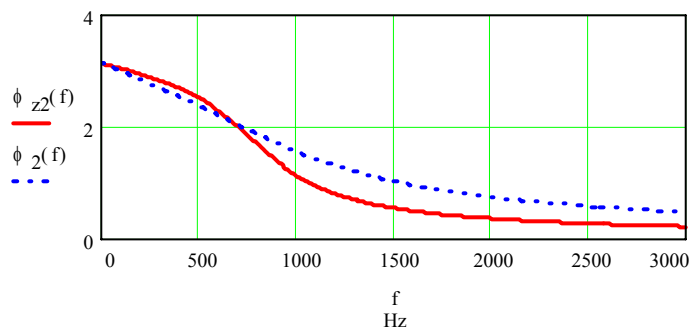


Рис.23б

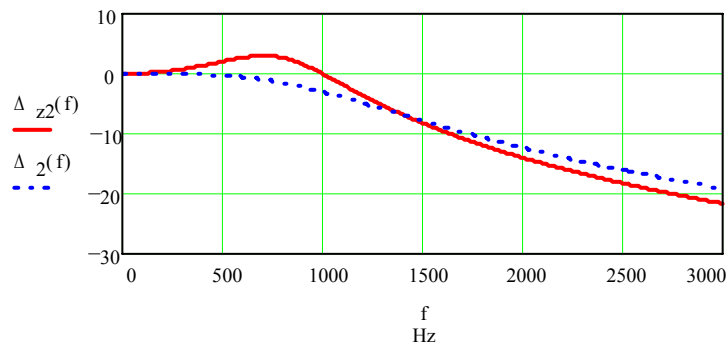


Рис.23в

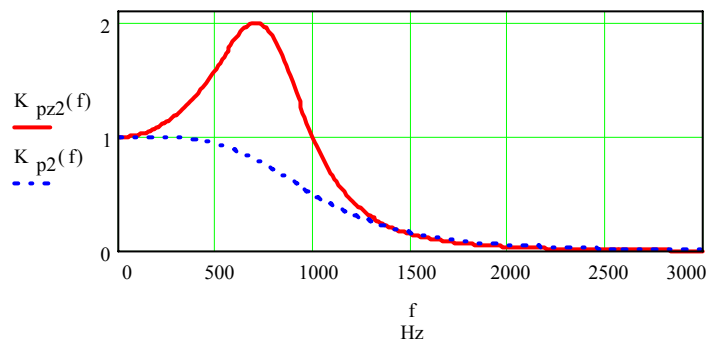


Рис.23г

3. Фильтры верхних частот и полосовые фильтры

3.1. Реализация фильтров верхних частот

Фильтр верхних частот (ФВЧ) служит для пропускания с малым ослаблением колебаний, частоты которых превышают частоту среза ω_c . Схему ФВЧ можно получить непосредственно из ФНЧ с такой же частотой среза. При этом используется прием, называемый в теории цепей преобразованием комплексной частоты. Преобразуемый ФНЧ является так называемым фильтром-прототипом. Параметры прототипа позволяют переходить к схемам любых других фильтров.

С целью преобразования частоты перейдем от переменной p , которая использовалась при описании ФНЧ, к новой частотной переменной ω , удовлетворяющей условию

$$p = \omega_c^2 / \omega \quad (43)$$

При этом точке $p := 0$ соответствует бесконечно удаленная точка на плоскости ω . Двум точкам $p_1 = +j\omega_c$ и $p_2 = -j\omega_c$ на мнимой оси $j\omega$ соответствуют две точки $\omega_1 = -j\omega_c$ и $\omega_2 = +j\omega_c$, отличающиеся от исходных только измененными знаками. Поэтому полюсы ВЧ-фильтра, полученного из НЧ-фильтра путем частотного преобразования (43), по сравнению с прототипом лишь меняются местами на плоскости p . В результате АЧХ преобразованного фильтра будет действительно соответствовать ФВЧ.

Преобразование схемы фильтра-прототипа состоит в следующем. В схеме ФНЧ-прототипа каждый конденсатор емкости $C_{\text{ФНЧ}} := C$ с проводимостью $p \cdot C_{\text{ФНЧ}}$ должен быть заменен на элемент с проводимостью

$$\frac{\omega_c^2 \cdot C_{\text{ФНЧ}}}{\omega}$$

, т.е. на катушку с индуктивностью $L := \frac{1}{\omega_c^2 \cdot C_{\text{ФНЧ}}}$. Аналогично, катушка с индуктивностью $L_{\text{ФНЧ}} := L$ в схеме ФНЧ заменяется конденсатором емкости

$$C := \frac{1}{\omega_c^2 \cdot L_{\text{ФНЧ}}}$$

без изменения.

Пример 3.1.1. Синтезируем пассивный фильтр верхних частот 2-го порядка с характеристикой Баттерворта и частотой среза $f_c := 1000 \cdot \text{Hz}$ ($\omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c$).

В качестве ФНЧ-прототипа возьмем пассивное звено 2-го порядка на рис.12, имеющее при заданной частоте среза следующие номиналы элементов: $R := 0.5 \cdot \text{K}\Omega$, $L := 0.113 \cdot \text{henry}$ и $C := 0.224 \cdot \mu\text{F}$.

Метод преобразования частоты дает схему пассивного ФВЧ, приведенную на рис.24.

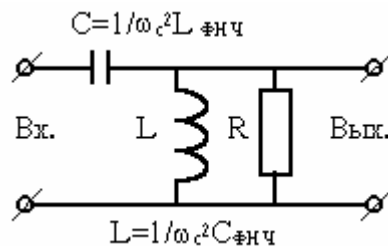


Рис.24

Определим номиналы элементов схемы ФВЧ на рис.24. Так как $C_{\text{ФНЧ}} := C$ и $L_{\text{ФНЧ}} := L$, то индуктивность катушки

$$L_{\text{ФВЧ}} := \frac{1}{\omega_c^2 \cdot C_{\text{ФНЧ}}}, \text{ т.е. } L_{\text{ФВЧ}} = 0.113 \cdot \text{henry}.$$

Емкость конденсатора $C_{\text{ФВЧ}} := \frac{1}{\omega_c^2 \cdot L_{\text{ФНЧ}}}$, т.е. $C_{\text{ФВЧ}} = 0.224$. Сопротивление резистора остается без изменения, т.е. $R = 0.5 \cdot K$.

Если обозначить

$$\omega_o := \frac{1}{\sqrt{L_{\text{ФВЧ}} \cdot C_{\text{ФВЧ}}}} \quad \text{и} \quad \alpha_o := \frac{1}{R \cdot C_{\text{ФВЧ}}}, \quad \text{то}$$

передаточная функция по напряжению полученного ФВЧ, определяемая как отношение изображения выходного напряжения $U_2(p)$ к изображению входного напряжения $U_1(p)$,

$$K_{v2}(p) := \frac{p^2}{p^2 + \alpha_o \cdot p + \omega_o^2} \quad (44)$$

Заменяя переменную Лапласа p оператором Фурье $j\omega$, найдем частотный коэффициент передачи напряжения

$$K_{v2}(\omega) := \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + j \cdot \alpha_o \cdot \omega + \omega_o^2} \quad \text{От-}$$

сюда для области физически реализуемых частот $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f > 0$ следует амплитудно-частотная характеристика - $A_{v2}(f) := |K_{v2}(2 \cdot \pi \cdot f)|$. График АЧХ синтезированного ФВЧ показан на рис.25 при $f := 0, 100 \dots 3000 \cdot \text{Hz}$.

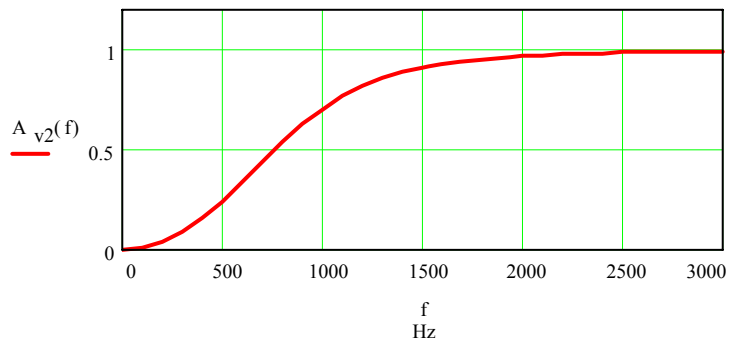


Рис.25

Рассмотренный пример на основании (44) показывает, что типичная передаточная функция ФВЧ 2-го порядка должна иметь вид

$$K_{v2}(p) := \frac{K_0 \cdot p^2}{a \cdot p^2 + b \cdot p + c} \quad , \quad (45)$$

где K_0 , a , b и c - некоторые постоянные параметры.

Пример 3.1.2. Построим активный ФВЧ 2-го порядка с характеристикой Баттерворта и частотой среза $f_c := 1000 \cdot \text{Hz}$.

В качестве ФНЧ-прототипа используем фильтр нижних частот Баттерворта 2-го порядка, рассмотренный в разделе 2.4.2 и имеющий элементы :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega \quad ,$$

$$C_1 := 0.042 \cdot \mu\text{F} \quad \text{и} \quad C_2 := 0.188 \cdot \mu\text{F} \quad .$$

Преобразование частоты дает схему активного ФВЧ, приведенную на рис.26.

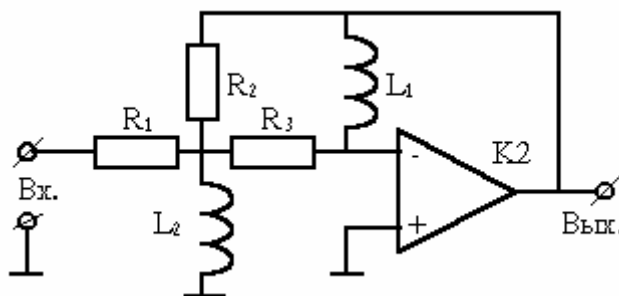


Рис.26

Найдем номиналы элементов синтезированной схемы :

Сопротивление резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega$. Проводимость резисторов

$$G := \frac{1}{R} \text{ и } G_1 := G, G_2 := G, G_3 := G, \text{ т.е. } G = 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens} .$$

Индуктивности катушек :

$$L_1 := \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f_c)^2 \cdot C_1}, L_1 = 0.603 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{coul}^{-2}, \text{ т.е. } L_1 = 0.603 \cdot \text{henry}$$

$$L_2 := \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f_c)^2 \cdot C_2}, L_2 = 0.135 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{coul}^{-2}, \text{ т.е. } L_2 = 0.135 \cdot \text{henry}$$

Подстановка в универсальную формулу (25) проводимостей элементов $Y_1(p)=Y_2(p)=Y_3(p)=G$, $Y_4(p)=1/pL_2$ и $Y_5(p)=1/pL_1$ позволяет найти передаточную функцию рассчитанного фильтра

$$K_{v2}(p) := \frac{-L_1 \cdot L_2 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot p^2}{L_1 \cdot L_2 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot p^2 + L_2 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) \cdot p + 1}$$

Сравнение этой функции с типовой функцией (45) дает :

$$K_0 := -L_1 \cdot L_2 \cdot G_1 \cdot G_3, \quad a := L_1 \cdot L_2 \cdot G_2 \cdot G_3, \\ b := L_2 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) \text{ и } c := 1 .$$

При замене переменной p на $j\omega$ получаем частотный коэффициент передачи по напряжению

$$K_{v2}(\omega) := \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot \omega^2}{-L_1 \cdot L_2 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot \omega^2 + j \cdot L_2 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) \cdot \omega + 1}$$

График АЧХ $A_{v2}(f) := |K_{v2}(2 \cdot \pi \cdot f)|$ синтезированного ФВЧ 2-го порядка с характеристикой Баттерворта изображен на рис.27.

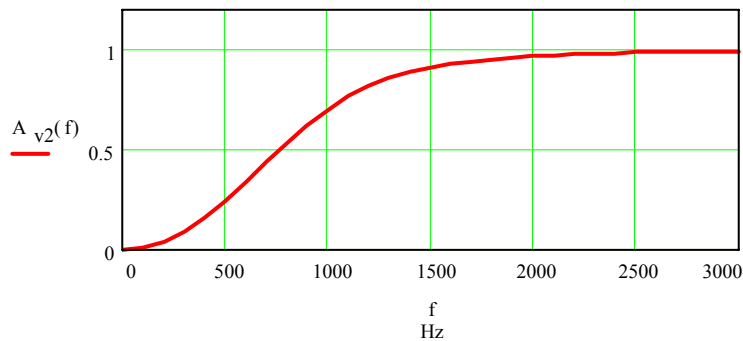


Рис.27

Пример 3.1.3. Требуется построить активный ФВЧ 2-го порядка с характеристикой Баттерворта и частотой среза $f_c := 1000 \cdot \text{Hz}$, не содержащий катушек индуктивности в отличие от примера 3.1.2 и рис.26.

Синтез активного RC-фильтра верхних частот будем проводить по общей методике без преобразования частоты. С этой целью возьмем универсальную схему активного звена 2-го порядка на рис.14 с передаточной функцией (25), рассмотренного в разделе 2.4.1.

Известно, что типовая функция ФВЧ 2-го порядка имеет вид (45). Анализ формулы (25) показывает, что для получения такой типовой функции необходимо, чтобы элементы $Y_1(p)$, $Y_2(p)$ и $Y_3(p)$ были конденсаторами C_1 , C_2 и C_3 с проводимостями pC_1 , pC_2 и pC_3 , а элементы $Y_5(p)$ и $Y_4(p)$ - резисторами R_1 и R_2 с проводимостями G_1 и G_2 . При этом передаточная функция (25) принимает вид, подобный (45),

$$K_{v2}(p) := \frac{-C_1 \cdot C_3 \cdot p^2}{C_2 \cdot C_3 \cdot p^2 + G_1 \cdot (C_1 + C_2 + C_3) \cdot p + G_1 \cdot G_2} \quad (46)$$

где $K_0 = -C_1 \cdot C_2$, $a = C_2 \cdot C_3$, $b = G_1 \cdot (C_1 + C_2 + C_3)$ и $c = G_1 \cdot G_2$.

Схема активного звена 2-го порядка при этом будет иметь вид, показанный на рис.28

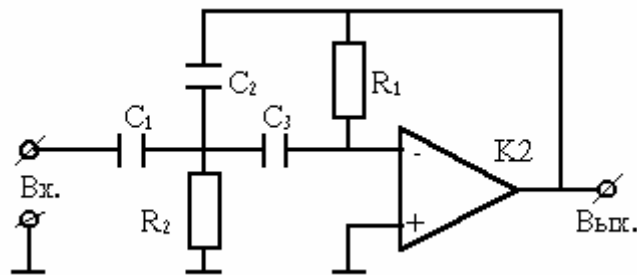


Рис.28

Полюсы передаточной функции (46) на плоскости истинной комплексной частоты $p = a + j\omega$ располагаются в точках

$$p_1 := -\frac{(C_1 + C_2 + C_3) \cdot G_1}{2 \cdot C_2 \cdot C_3} + j \cdot \sqrt{\frac{G_1 \cdot G_2}{C_2 \cdot C_3} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_2 \cdot C_3} \cdot G_1 \right)^2} \quad (47)$$

$$p_2 := -\frac{(C_1 + C_2 + C_3) \cdot G_1}{2 \cdot C_2 \cdot C_3} - j \cdot \sqrt{\frac{G_1 \cdot G_2}{C_2 \cdot C_3} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_2 \cdot C_3} \cdot G_1 \right)^2}$$

Для того, чтобы схема на рис.28 соответствовала ФВЧ 2-го порядка с характеристикой Баттерворта, необходимо и достаточно, чтобы полюсы (47) функции $K_{\sqrt{2}}(p)$ совпадали с полюсами (30) передаточной функции

$K_{b2}(p)$ фильтра Баттерворта 2-го порядка, рассмотренного в разделе 2.4.2. Тогда, приравнявая вещественные и мнимые части выражений (30) и (47):

$$-\frac{(C_1 + C_2 + C_3) \cdot G_1}{2 \cdot C_2 \cdot C_3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_c \quad (48a)$$

$$\text{и} \quad \sqrt{\frac{G_1 \cdot G_2}{C_2 \cdot C_3} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_2 \cdot C_3} \cdot G_1 \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_c, \quad (48b)$$

можно получить формулы для расчета элементов схемы фильтра верхних частот 2-го порядка с характеристикой Баттерворта.

Зададимся частотой среза и приемлемыми номиналами конденсаторов:

$$f_c := 1000 \cdot \text{Hz} \quad , \quad \omega_c := 2 \cdot \pi \cdot f_c \quad ,$$

$$C_1 := 0.1 \cdot \mu\text{F} \quad , \quad C_2 := 0.1 \cdot \mu\text{F} \quad , \quad C_3 := 0.1 \cdot \mu\text{F} \quad ,$$

Следовательно, $C_1 = C_2 = C_3 = C := 0.1 \cdot \mu\text{F}$

На основании (48) найдем сопротивления резисторов:

$$\text{Первое - } R_1 := \frac{C_1 + C_2 + C_3}{\sqrt{2 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot \omega_c}} \quad , \quad \text{вычисления дают-}$$

$$R_1 = 3.376 \cdot 10^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{coul}^{-2} \quad , \quad \text{следовательно, } R_1 = 3.376 \cdot \text{K}\Omega \quad ;$$

$$\text{Второе - } R_2 := \frac{1}{R_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot \left[\frac{\omega_c^2}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_2 \cdot C_3 \cdot R_1} \right)^2 \right]} \quad ,$$

$$R_2 = 750.264 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{coul}^{-2} \quad , \quad \text{т.е. } R_2 = 0.75 \cdot \text{K}\Omega$$

Итак, результаты расчета : конденсаторы $C_1 = C_2 = C_3 = C := 0.1 \cdot \mu\text{F}$,
резисторы $R_1 = 3.376 \cdot \text{K}\Omega$ и $R_2 = 0.75 \cdot \text{K}\Omega$

Таким образом, для синтезированного фильтра на основании (46) с учетом $C_1 = C_2 = C_3 = C$, а также $G_1 := \frac{1}{R_1}$ и $G_2 := \frac{1}{R_2}$ (причем,

$G_1 = 2.962 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}$ и $G_2 = 0.001 \cdot \text{siemens}$) при замене переменной Лапласа p на переменную Фурье $j\omega$ имеем частотный коэффициент передачи

$$K_{v2}(\omega) := \frac{C^2 \cdot \omega^2}{G_1 \cdot G_2 - C^2 \cdot \omega^2 + j \cdot 3 \cdot C \cdot G_1 \cdot \omega} \quad (49)$$

Отсюда для области физически реализуемых частот $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f > 0$ следует амплитудно- частотная характеристика - $A_{v2}(f) := |K_{v2}(2 \cdot \pi \cdot f)|$.

График АЧХ синтезированного ФВЧ показан на рис.29 при частоте $f := 0, 100 \dots 3000 \cdot \text{Hz}$.

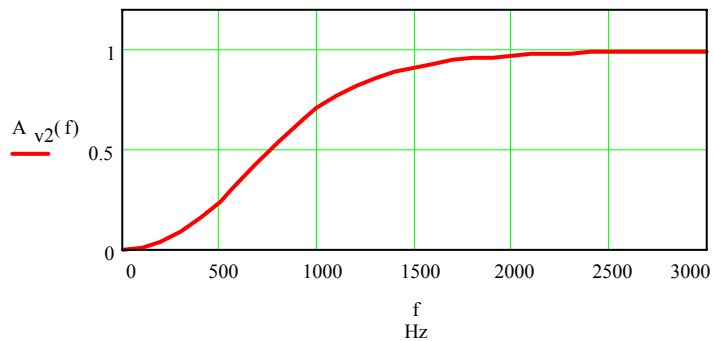


Рис.29

3.2. Реализация полосовых фильтров

Полосовой фильтр (ПФ) пропускает с малым ослаблением только колебания в частотной полосе, расположенной в окрестности некоторой точки $\omega_0 \neq 0$. Схему ПФ можно получить непосредственно из ФНЧ с частотой среза, равной ω_0 , путем преобразования комплексной частоты. Для этого нужно выполнить замену переменной

$$p = w + \omega_0^2 / w \quad (50)$$

В этом случае точке $w = j\omega_0$ отвечает точка $p = 0$. В результате максимум АЧХ, имеющий место в ФНЧ на нулевой частоте, будет возникать в ПФ на частоте ω_0 .

Умножение правой и левой частей (50) на емкость C дает равенство

$$p \cdot C = w \cdot C + \omega_0^2 \cdot C / w, \quad \text{из}$$

которого следует, что проводимости конденсатора в схеме ФНЧ соответствует в схеме ПФ проводимость параллельного колебательного контура, образованного конденсатором C и катушкой индуктивности $L = 1/(\omega_0^2 \cdot C)$.

При этом данный контур оказывается настроенным на частоту ω_0 .

Аналогично, из равенства $p \cdot L = w \cdot L + \omega_0^2 \cdot L / w$ следует, что катушка индуктивности L в схеме ФНЧ преобразуется для схемы ПФ в последовательное соединение этой же катушки и конденсатора емкости $C = 1/(\omega_0^2 \cdot L)$, т.е. в последовательный колебательный контур.

Пример 3.2.1. Синтезируем пассивный полосовой фильтр 2-го порядка с характеристикой Баттерворта и резонансной частотой $f_0 := 1000 \cdot \text{Hz}$ (тем самым $\omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f_0$).

В качестве ФНЧ-прототипа возьмем пассивное звено 2-го порядка на рис.12, имеющее при частоте среза, равной резонансной частоте f_0 , следующие номиналы элементов : $R := 0.5 \cdot \text{K}\Omega$, $L := 0.113 \cdot \text{henry}$ и $C := 0.224 \cdot \mu\text{F}$.

Метод преобразования частоты дает схему пассивного ПФ, приведенную на рис.30.

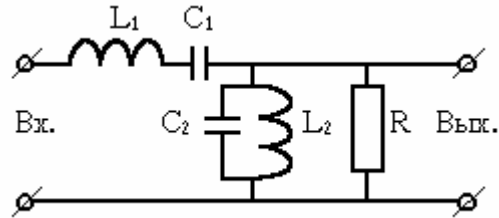


Рис.30

Определим номиналы элементов схемы ПФ, полученной путем преобразования (50). Для последовательного колебательного контура имеем : индуктивность катушки $L_1 := L$, т.е. остается без изменения, и емкость конденсатора

$$C_1 := \frac{1}{\omega_0^2 \cdot L}, \text{ расчет которой дает } C_1 = 0.224 \cdot \mu\text{F}.$$

Для параллельного колебательного контура получим : емкость конденсатора $C_2 := C$ (остается без изменения) и индуктивность

катушки $L_2 := \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C}$, т.е. $L_2 = 0.113 \cdot \text{henry}$. Сопротивление резистора

остается без изменения. Следовательно, сопротивление резистора $R = 0.5 \cdot \text{K}\Omega$ и его проводимость $G := \frac{1}{R}$, т.е. $G = 0.002 \cdot \text{siemens}$.

Если ввести обозначения

$$K_0 := C_1 \cdot L_2, \quad a := C_1 \cdot L_1 \cdot C_2 \cdot L_2, \quad b := C_1 \cdot L_1 \cdot G \cdot L_2$$

$$c := C_1 \cdot (L_1 + L_2) + C_2 \cdot L_2, \quad d := G \cdot L_2, \quad \text{то}$$

передаточная функция по напряжению полученного ПФ, определяемая как

отношение изображения выходного напряжения $U_2(p)$ к изображению входного напряжения $U_1(p)$,

$$K_{\Delta 2}(p) := \frac{K_0 \cdot p^2}{a \cdot p^4 + b \cdot p^3 + c \cdot p^2 + d \cdot p + 1} \quad (51)$$

Выражение (51) определяет вид типичной передаточной функции полосового фильтра 2-го порядка.

Заменяя переменную Лапласа p оператором Фурье $j\omega$, найдем частотный коэффициент передачи напряжения

$$K_{\Delta 2}(\omega) := \frac{-K_0 \cdot \omega^2}{a \cdot \omega^4 - j \cdot b \cdot \omega^3 - c \cdot \omega^2 + j \cdot d \cdot \omega + 1}$$

Отсюда для области физически реализуемых частот $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f > 0$ следует амплитудно-частотная характеристика - $A_{\Delta 2}(f) := |K_{\Delta 2}(2 \cdot \pi \cdot f)|$. График АЧХ синтезированного ПФ (см. рис.30) показан на рис.31 при $f := 0, 100 \dots 3000 \cdot \text{Hz}$.

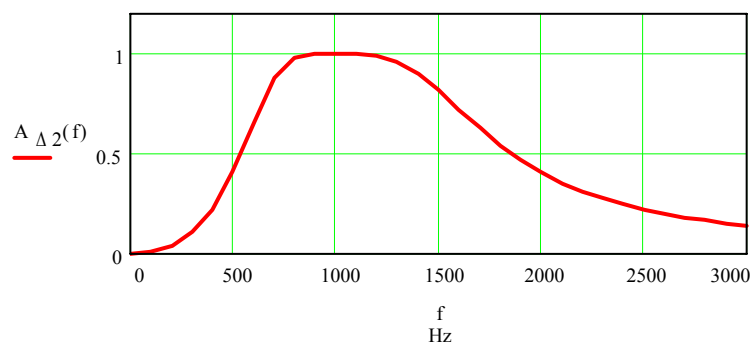


Рис.31

Пример 3.2.2. Построим активный ПФ 2-го порядка с характеристикой Баттерворта и резонансной частотой $f_0 := 1000 \cdot \text{Hz}$.

В качестве ФНЧ-прототипа используем фильтр нижних частот Баттерворта 2-го порядка, рассмотренный в разделе 2.4.2 и имеющий элементы : $R_1 = R_2 = R_3 = R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega$, $C_1 := 0.042 \cdot \mu\text{F}$ и $C_2 := 0.188 \cdot \mu\text{F}$. Преобразование частоты дает схему активного ПФ, рис.32.

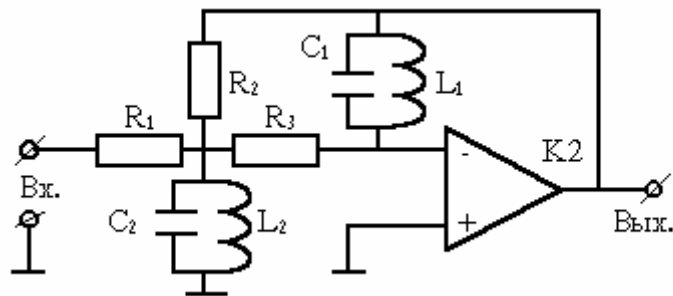


Рис.32

Определим номиналы элементов полученной схемы ПФ. Для первого параллельного колебательного контура - емкость конденсатора C_1 остается без изменения, а индуктивность катушки

$$L_1 := \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C_1} \text{ и составляет } L_1 = 0.603 \cdot \text{henry} .$$

Для второго параллельного колебательного контура - емкость конденсатора C_2 также остается без изменения, а индуктивность катушки

$$L_2 := \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C_2} \text{ и составит } L_2 = 0.135 \cdot \text{henry} .$$

Резисторы остаются без изменения. Следовательно, сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = R := 1.8 \cdot \text{K}\Omega$ и их проводимости - $G := \frac{1}{R}$, а

именно $G_1 := G$, $G_2 := G$, $G_3 := G$, где $G = 5.556 \cdot 10^{-4} \cdot \text{siemens}$.

Подстановка в универсальную формулу (25) проводимостей элементов $Y_1(p)=Y_2(p)=Y_3(p)=G$, $Y_4(p)=pC_2 + 1/pL_2$ и $Y_5(p)=pC_1 + 1/pL_1$ позволяет найти передаточную функцию рассчитанного фильтра. Если подобно формуле (51) обозначить -

$$\begin{aligned} K_0 &:= -L_1 \cdot L_2 \cdot G_1 \cdot G_3 , \quad a := C_1 \cdot L_1 \cdot C_2 \cdot L_2 , \\ b &:= C_1 \cdot L_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) \cdot L_2 , \quad d := (G_1 + G_2 + G_3) \cdot L_2 \text{ и} \\ c &:= C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 + G_1 \cdot G_2 \cdot L_1 \cdot L_2 , \end{aligned} \quad \text{то}$$

передаточная функция по напряжению полученного ПФ в форме типовой функции (51)

$$K_{\Delta 2}(p) := \frac{K_0 \cdot p^2}{a \cdot p^4 + b \cdot p^3 + c \cdot p^2 + d \cdot p + 1}$$

При

замене переменной p на $j\omega$ получаем частотный коэффициент передачи по напряжению

$$K_{\Delta 2}(\omega) := \frac{-K_0 \cdot \omega^2}{a \cdot \omega^4 - j \cdot b \cdot \omega^3 - c \cdot \omega^2 + j \cdot d \cdot \omega + 1}$$

График АЧХ $A_{\Delta 2}(f) := |K_{\Delta 2}(2 \cdot \pi \cdot f)|$ синтезированного ПФ 2-го порядка изображен на рис.33.

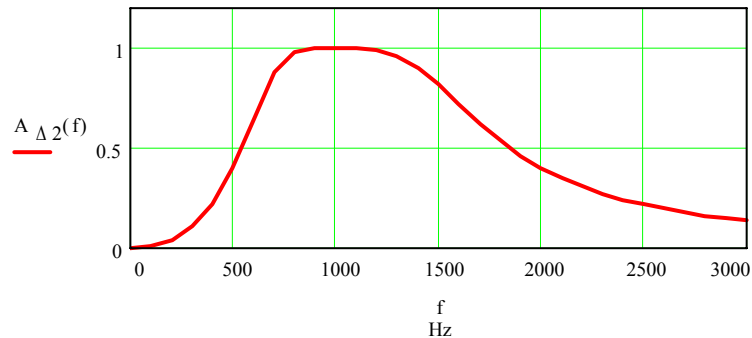


Рис.33

Пример 3.2.3. Построим активный ПФ 2-го порядка с характеристикой Баттерворта и резонансной частотой $f_0 := 1000 \cdot \text{Hz}$, не содержащий катушек индуктивности в отличие от примера 3.2.2 и рис.32.

Анализ универсальной формулы (25) показывает, что в случае проводимостей элементов $Y_1(p) - Y_5(p)$ емкостного характера (двухполюсник с параллельным или последовательным соединением резистора и конденсатора) нельзя из нее получить типичную передаточную функцию (51) для ПФ 2-го порядка. Тем самым не представляется возможным создать на базе активного колебательного звена 2-го порядка полосовой RC-фильтр.

Выходом из этого положения является каскадное построение ПФ из двух фильтров - активного RC- фильтра нижних частот (рис.15) и активного RC-фильтра верхних частот (рис.28), имеющих одинаковую частоту среза, равную резонансной частоте полосового фильтра. Тогда схема ПФ без катушек индуктивности будет иметь вид, показанный на рис.34.

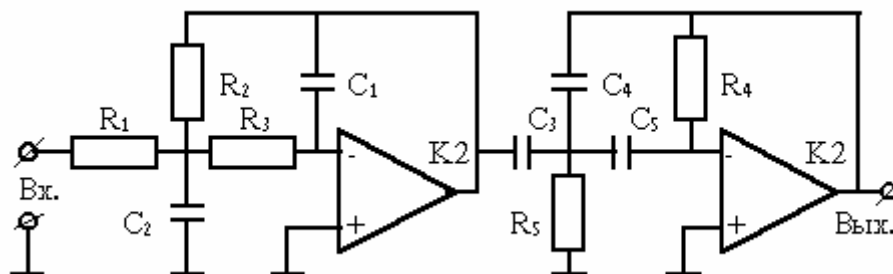


Рис.34

Согласно разделу 2.4.2 и примеру 3.1.3 номиналы элементов составной схемы : $R_1 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega$, $R_2 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega$, $R_3 := 1.8 \cdot \text{K}\Omega$, $R_4 := 3.376 \cdot \text{K}\Omega$, $R_5 := 0.75 \cdot \text{K}\Omega$, $C_1 := 0.042 \cdot \mu\text{F}$, $C_2 := 0.188 \cdot \mu\text{F}$, $C_3 := 0.1 \cdot \mu\text{F}$, $C_4 := 0.1 \cdot \mu\text{F}$, $C_5 := 0.1 \cdot \mu\text{F}$.

На основании (32) частотный коэффициент передачи по напряжению составного полосового фильтра

$$K_{\Delta 2\Sigma}(\omega) := K_2(\omega) \cdot K_{v2}(\omega) , \quad \text{где}$$

$K_2(\omega)$ и $K_{v2}(\omega)$ - коэффициенты передачи соответственно ФНЧ и ФВЧ, определенные ранее в разделе 2.4.2 и примере 3.1.3 [см., например, формулу (49)].

График АЧХ $A_{\Delta 2\Sigma}(f) := |K_{\Delta 2\Sigma}(2 \cdot \pi \cdot f)|$ составного ПФ 2-го порядка изображен на рис.35.

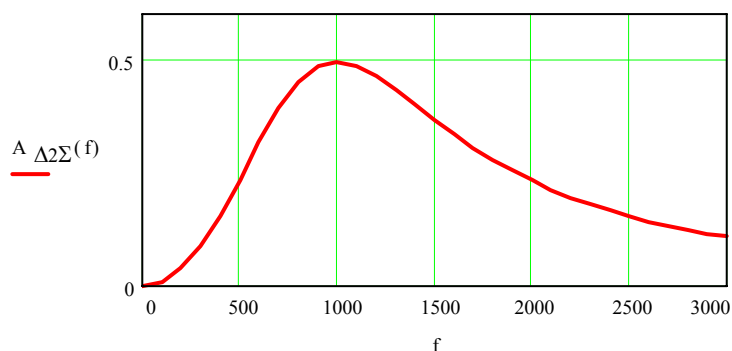


Рис.35

4. Програмно- методическое обеспечение

Данное руководство имеет электронный вариант исполнения в рамках программного обеспечения Mathcad 6.0 PLUS (файл электронного методического руководства sintes_f.mcd). Дополнительно поддерживается :

1) сокращенным вариантом, включающим только принципиальные схемы трех RC- фильтров нижних частот Баттерворта 1-го, 2-го и 3-го порядков, основные расчетные формулы и графики амплитудно- частотной (АЧХ) и фазо- частотной (ФЧХ) характеристик рассчитанного фильтра (файл rast_af.mcd).

2) сокращенным вариантом, включающим принципиальную схему RC- фильтра верхних частот 2-го порядка, основные расчетные формулы и графики АЧХ и ФЧХ рассчитанного фильтра (файл rast_hf.mcd).

3) сокращенным вариантом, включающим принципиальную схему полосового RC- фильтра 2-го порядка, основные расчетные формулы и графики АЧХ и ФЧХ рассчитанного фильтра (файл rast_pf.mcd).

4) принципиальными схемами фильтров 2-го порядка для электронного моделирования в рамках программного обеспечения Micro-Cap III (файлы sxem_af2.cir , sxem_af3.cir , sxem_hf.cir , sxem_pf.cir).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков С.И. Радио/технические цепи и сигналы.-М.: Высшая школа, 1988.
2. Матханов П.Н. Основы синтеза линейных электрических цепей.-М.: Высшая школа, 1976.
3. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью/ Пер. с англ.- М.: ИЛ, 1948.
4. Хьюлсман Л. Теория и расчет активных RC-цепей: Пер.с англ. / Под ред. А.Е. Знаменского и И.Н.Теплюка - М.: Связь, 1973.
5. Попов В.П. Применение пакета прикладных программ Micro-Cap III для автоматизированного анализа цепей. Конспект лекций.- Таганрог, 1995.
6. Кавчук С.В. Методические указания к разделу "Преобразование детерминированных сигналов линейными устройствами" по курсу "Теоретические основы информационно-измерительной техники" .-Таганрог : ТРТИ, 1987.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Единицы физических величин

1.1. Основные единицы системы единиц МКС, применяемой в Mathcad 6.0 PLUS

Таблица 1

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Длина	L	метр	m	м
Масса	M	килограмм	kg	кг
Время	T	секунда	s (sec)	с
Термодинам. температура	θ	кельвин	K	К
Количество электричества	Q	кулон	C (coul)	Кл

1.2. Основные единицы международной системы единиц СИ

Таблица 2

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			международное	русское
Длина	L	метр	m	м
Масса	M	килограмм	kg	кг
Время	T	секунда	s (sec)	с
Сила электрического тока	I	ампер	A	А
Термодинам. температура	θ	кельвин	K	К
Количество вещества	N	моль	mol	моль
Сила света	J	кандела	cd	кд

2. Единицы электрических величин

2.1. Основные единицы электрических элементов схем фильтров

Таблица 3

Величина			Единица			
Наименование	Размерность		Наименование	Обозначение		Выражение через основные единицы МКС
	СИ	МКС		международное	русское	
Частота	T^{-1}	T^{-1}	герц	Hz	Гц	sec^{-1}
Сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$	ом	Ω (ohm)	Ом	$kg \cdot m^2 \cdot sec^{-1} \cdot coul^{-2}$
Проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	$M^{-1}L^{-2}TQ^2$	сименс	S (siemens)	См	$kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot sec \cdot coul^2$
Емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$	фарад	F (farad)	Ф	$kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot sec^2 \cdot coul^2$
Индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	ML^2Q^{-2}	генри	H (henry)	Гн	$kg \cdot m^2 \cdot coul^{-2}$

2.2. Десятичные кратные единицы электрических элементов схем фильтров

Таблица 4

Величина					Единица			
Наименование	Множитель	Префикс	Обозначение		Наименование	Обозначение		
			международное	русское		международное	русское	
Частота	10^3	кило	k	к	килогерц	KHz	кГц	
	10^6	мега	M	М	мегагерц	Mhz	МГц	
	10^9	гига	G	Г	гигагерц	Ghz	ГГц	
	Сопротивление	10^6	микро	μ	мк	микроом	$\mu\Omega$	мкОм
		10^3	мили	m	м	миллиом	m Ω	мОм
		10^3	кило	k (K)	к	килоом	K Ω	кОм
10^6		мега	M	М	мегаом	M Ω	Мом	
Проводимость	10^6	гига	G	Г	гигаом	G Ω	Гом	
	10^6	микро	μ	мк	микросименс	μS	мкСм	
	10^3	мили	m	м	миллисименс	mS	мСм	
	10^3	кило	k	к	килосименс	kS	кСм	

Продолжение таблицы 4

Величина					Единица		
Наименование	Мно- жи- тель	Прис- тавка	Обозначение		Наименование	Обозначение	
			между- народное	русское		между- народное	русское
Емкость	10^{12}	пико	p	п	пикофарад	pF	пФ
	10^9	нано	n	н	нанофарад	nF	нФ
	10^6	микро	μ	мк	микрофарад	μ F	мкФ
	10^3	милли	m	м	миллифарад	mF	мФ
Индуктивность	10^{12}	пико	p	п	пикогенри	pH	пГн
	10^9	нано	n	н	наногенри	nH	нГн
	10^6	микро	μ	мк	микроденри	μ H	мкГн
	10^3	милли	m	м	миллиденри	mH	мГн