Приложение

Сведения из теории обобщенных функций

Свойства обобщенных функций позволяют использовать методы дифференциального и интегрального исчисления применительно к функциям, не обладающим свойством непрерывности.

К обобщенным функциям принято относить прежде всего дельта-функцию Дирака и ступенчатую функцию Хевисайда.

Дельта-функция

Определение:

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0, \tag{1а}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{1б}$$

Вариант определения дельта-функции с переменным параметром μ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,\mu)dx = 1,$$

где

$$\delta(x,\mu) = (\mu/\sqrt{\pi})\exp(-\mu^2 x^2)\ . \tag{2}$$

Предел функции (2) при $\mu \to \infty$ существует не при всех значениях x, однако всегда существует предел

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,\mu)dx\ .$$

Любая операция над дельта-функцией подразумевает операцию над функцией вида $\delta(x,\mu)$ с последующим нахождением предела при $\mu \to \infty$ в конце вычислений.

Свойства дельта-функции

1. «Селектирующее» свойство выражается в форме $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$,

(3)

где $f(x)$ – любая непрерывная функция. Это легко доказать, приняв

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a,\mu)dx.$$

Подбором значения μ в (2), можно уменьшить погрешность замены $f(x)$ на $f(a)$ до требуемого любого малого значения. Интегрирование достаточно выполнить лишь в окрестности точки a, поэтому символически записывают следующее соотношение:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a).$$

При $f(x) = x$, $a = 0$ последняя запись сводится к соотношению $x\delta(x) = 0$.

2. Свойство четности:

$$\delta(x) = \delta(-x). \qquad (4)$$

3. Изменение масштаба:

$$\delta(ax) = (1/|a|)\delta(x). \qquad (5)$$

4. Свертка двух дельта-функций определяется как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b). \qquad (6)$$

5. Дифференцирование.

Используем «аппроксимирующие» функции вида (2) и запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x,\mu)dx = f(\infty)\delta(\infty,\mu) - f(-\infty)\delta(-\infty,\mu) - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x,\mu)dx.$$

Переход к пределу при $\mu \to \infty$ приводит к соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = f'(0).$$

В общем случае производной n-го порядка

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0). \qquad (7)$$

Свойства производных:

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \qquad (8)$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x). \qquad (9)$$

Определение дельта-функции через интеграл Фурье

Выразим значение функции $f(x)$ в точке a в форме

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp[-j2\pi u(x-a)]dx.$$

Обозначив

$$K(x-a,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j2\pi u(x-a)]du = \frac{\sin\mu(x-a)}{\pi(x-a)}$$

и изменяя порядок интегрирования, с учетом четности дельта-функции получаем

$$f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(x-a)dx,$$

где $K(x-a) = \lim\limits_{\mu\to\infty} K(x-a,\mu)$.

Последний интеграл следует понимать в смысле

$$f(a) = \lim_{\mu\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(x-a,\mu)dx.$$

При $f(x)=1$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(x-a)dx = 1$, поэтому дельта-функцию можно определить как

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ux)du \qquad (10)$$

т.е. как Фурье-образ от единицы.

Обратное соотношение выражается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\exp(j2\pi ux)dx = 1. \qquad (11)$$

Единичная ступенчатая функция

Определение ступенчатой функции имеет вид

$$\begin{cases} U(x) = 0 & \text{при } x < 0, \\ U(x) = 1 & \text{при } x > 0, \\ U(x) = 1/2 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Можно показать, что справедливо соотношение

$$\delta(x) = \frac{dU(x)}{dx}.$$

Селектирующее свойство выражается в форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)U'(x-a)dx = f(a). \qquad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U'(x)dx = 1.$$

Примеры дифференцирования разрывных функций

1. Пусть функция $f(x)$ задана соотношением

$$\begin{cases} f = x & \text{при } x < 1, \\ f = x - 2 & \text{при x} > 1. \end{cases}$$

Тогда $\frac{df}{dx} = 1 - 2\delta(x-1)$.

2. Знаковая функция $\mathrm{sgn}(x)$ по определению есть

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(x) = +1 & \text{при } x < 1, \\ \mathrm{sgn}(x) = -1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

или

$\mathrm{sgn}(x) = x/|x|$.

Эту функцию можно выразить через обобщенные функции, а именно

$$\mathrm{sgn}(x) = -1 + 2U(x) = -1 + 2\int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx.$$

3. Производные функции $f(x) = |x|$ можно выразить как

$$\frac{d|x|}{dx} = -1, \quad \text{при } x < 1,$$

$$\frac{d|x|}{dx} = 1 \quad \text{при } x > 1,$$

или $\frac{d|x|}{dx} = \mathrm{sgn}(x)$.

При использовании дельта-функции можно записать

$$\frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x),$$

т.е. излом графика дает вторую производную (кривизну) в виде функции $\delta(x)$.