1. Основы теории информации и теории сигналов

1.1. Основные понятия теории информации

В теории информации и передачи сигналов под *информацией* понимают совокупность сведений о каких-либо событиях, процессах, явлениях и т.п., рассматриваемых в аспекте их передачи в пространстве и во времени.

Информацию передают в виде *сообщений*. Сообщением называют информацию, выраженную в определенной форме и предназначенную для передачи от источника к адресату. Примерами сообщений служат тексты телеграмм, речь, музыка, телевизионное изображение, данные на выходе компьютера, команды в системе автоматического управления объектами и т.п.

Сообщения передают с помощью сигналов, которые являются носителями информации. Основным видом сигналов являются электрические сигналы. В последнее время всё большее распространение получают оптические сигналы, например, в волоконно-оптических линиях передачи информации.

В теории информации изучают свойства процессов, которые имеют место при передаче информации на расстояние при помощи сигналов. При этом важное значение имеют понятия *качества* и *скорости* передачи информации.

Качество передачи информации тем выше, чем меньше искажения информации на приёмной стороне. С увеличением скорости передачи информации требуется принимать специальные меры, препятствующие потерям информации и снижению качества передачи информации.

Объекты информационной техники

По функциональному назначению можно выделить основные классы объектов информационной техники:

- сети и системы связи и телекоммуникаций (телеграфные, телефонные, телевизионные, компьютерные и т.п.);
- информационно-измерительные системы (радионавигационные, радиолокационные, телеметрические и т.п.);
- системы преобразования информации (аналого-цифровые, цифро-аналоговые преобразователи, цифровые компьютеры и др.);
- информационно-поисковые системы и системы хранения информации на основе баз данных;
- системы экспериментального наблюдения и управления объектами.

Обобщённая структурная схема системы передачи информации показана на рис.1.1.

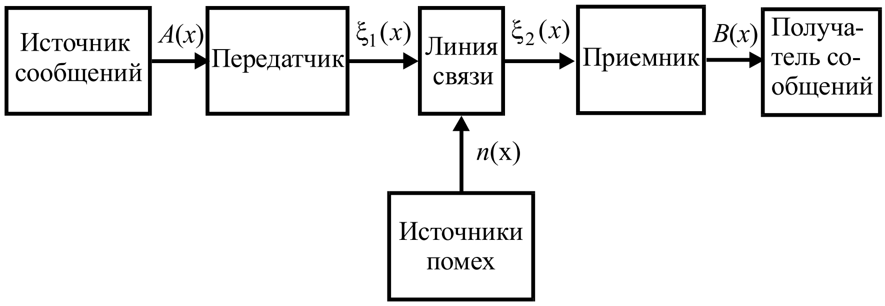

Рис. 1.1. Структурная схема системы передачи информации

Передатчик преобразует исходное сообщение $A(x)$ в сигнал $\xi_1(x)$, где x – независимая переменная. Сообщения и сигналы чаще всего рассматриваются в зависимости от времени. Роль *линии связи* может выполнять любая физическая среда (воздух, провода, оптическое волокно). В *приёмнике* полученный сигнал $\xi_2(x)$, искаженный влиянием помех, преобразуется в копию сообщения $B(x)$, которая должна быть по возможности наиболее близка к оригиналу $A(x)$.

Многоканальная система передачи информации обеспечивает одновременную и взаимно независимую передачу сообщений от многих отправителей по одной общей линии связи. Структурная схема такой системы показана на рис.1.2.

Узел связи (информационный узел) является более сложной системой, поскольку помимо многоканальной передачи (приёма) информации он обеспечивает:

- выбор кратчайшего пути между источником и получателем сообщения;
- соблюдение системы приоритетов;
- накопление и хранение информации при отсутствии свободных каналов передачи;
- компьютерное управление всеми перечисленными функциями в автоматическом режиме.

Информационная сеть является совокупностью информационных узлов, соединенных линиями связи.

На рис.1.3. показан пример графа информационной сети.

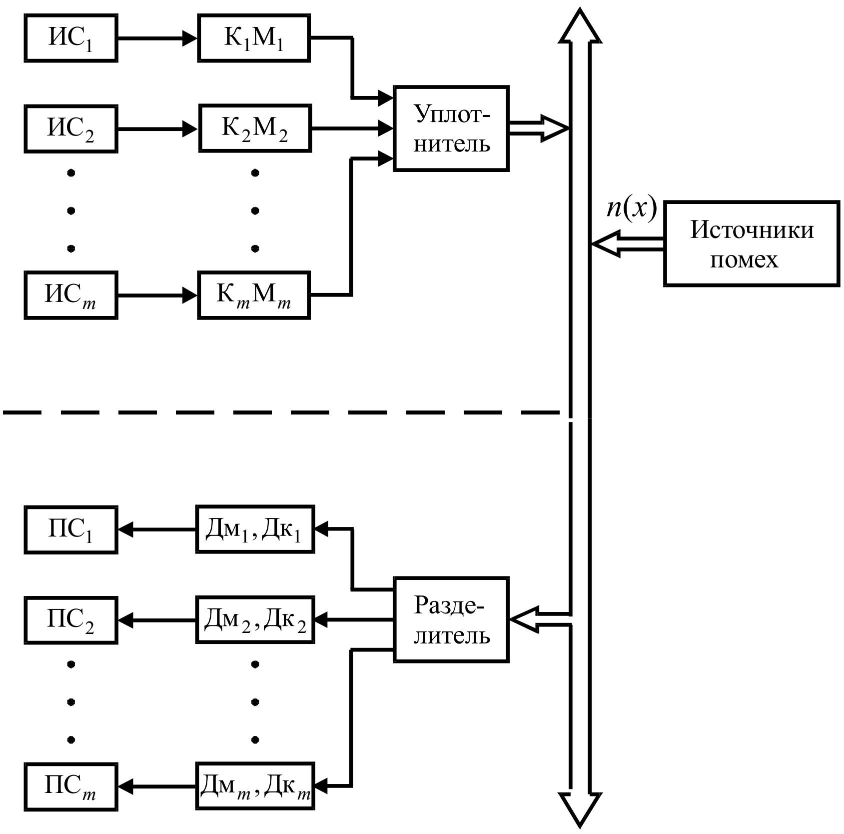

Рис. 1.2. Структурная схема многоканальной системы. ИС, ПС – источники и получатели сообщений, К – кодеры, М – модуляторы, Дк – декодеры, Дм – демодуляторы.

Вершины графа g_i, $i = 1,\dots,n$, определяют информационные узлы, дуги – линии связи, координатами которых θ_{ij} являются пропускная способность, интенсивность потока сообщений, стоимость канала связи и т.п.

Информационную сеть рассматривают как сетевую *систему массового обслуживания*. При создании информационных сетей требуется решать задачи анализа, синтеза, оптимизации. Основными классами задач являются:

- Анализ информационных характеристик источников сообщений.
- Анализ и синтез сигналов и помех.

- Анализ и синтез помехоустойчивости методов передачи информации.
- Анализ и синтез корректирующих кодов (обнаружение и исправление ошибок).
- Анализ и синтез каналов передачи информации.

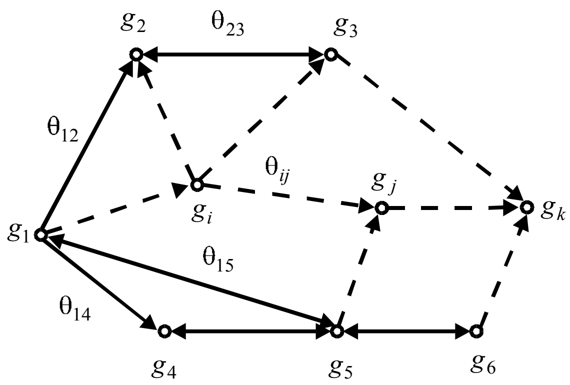

Рис. 1.3. Пример графа информационной сети (пунктир – возможные линии связи, сплошные – примеры выбранных оптимальных линий связи)

Виды сообщений в информационных системах

Дискретное сообщение является конечной последовательностью отдельных символов. Для преобразования дискретного сообщения в сигнал необходимо выполнить операцию кодирования сообщения, при котором повышается скорость и помехоустойчивость передачи информации.

Непрерывное сообщение определяется непрерывной функцией времени. Непрерывные сообщения можно передавать дискретными методами. Для этого непрерывный сигнал (сообщение) подвергают *дискретизации* во времени и *квантованию* по уровню. На приёмной стороне выполняется восстановление непрерывной функции по дискретным отсчётам.

При математическом описании сообщений формирование дискретных сообщений рассматривают как последовательный случайный выбор того или иного символа из *алфавита* источника сообщений, т.е. как формирование дискретной *случайной последовательности*.

Формирование непрерывных сообщений представляет собой выбор реализаций (случайных функций) непрерывного *случайного процесса*.

Основными информационными характеристиками являются *количество информации* в сообщениях, *избыточность* сообщений, *энтропия*, *производительность* источника сообщений, *скорость передачи* информации.

Указанные характеристики рассмотрим для случая дискретных сообщений.

Пусть объем алфавита A составляет m дискретных сообщений. Каждое сообщение включает n символов. В принятых обозначениях общее количество дискретных символов составляет $N_0 = m^n$. Покажем, как определяется количество информации в сообщениях такого источника.

При определении количества информации должны быть выполнены следующие условия:

- сообщения большей протяжённости содержат, как правило, большее количество информации;
- если алфавит имеет больший объём, то каждое отдельное сообщение содержит больше информации;
- информация, полученная в нескольких сообщениях, должна удовлетворять условию аддитивности.

Удобной характеристикой сообщений является логарифмическая мера количества информации I, удовлетворяющая перечисленным выше требованиям, а именно

$$I = \log N_0 = n \log m .$$

Эта формула предложена Р. Хартли в 1928 г. как мера количества информации. Формула Хартли не отражает случайного характера формирования сообщений. Чтобы устранить этот недостаток, необходимо связать количество информации в сообщениях с вероятностью появления символов. Эта задача была решена К. Шенноном в 1948 г.

Следует упомянуть работы академика В. А. Котельникова о пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи (1937 г.) и оптимальному приёму сигналов на фоне помех (1946 г.).

Определение количества информации

Пусть сообщение состоит из одного символа. Если вероятности появления всех символов одинаковы и равны $P = 1/m$, то количество информации, которое переносит символ, можно выразить как

$$I_1 = \log m = -\log P .$$

Здесь количество информации связано с *вероятностью* появления символа. В реальных сообщениях символы $a_i \in A$ появляются с различными вероятностями $P(a_i)$, поэтому

$$I_i = -\log P(a_i) .$$

Среднее количество информации $H(A)$, которое приходится на *один символ* источника сообщений можно найти усреднением по всему объему алфавита

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} P(a_i)\log P(a_i)\,. \tag{1}$$

Эта величина называется *энтропией* источника дискретных сообщений. Формула (1) носит название формулы Шеннона.

Энтропия рассматривается как *мера неопределенности* в поведении источника сообщений. При вероятностном подходе *состояние* источника информации характеризуется неопределенностью. Неопределенность снижается при приеме сообщения, т.е. получении информации. Поэтому получаемая информация, приходящаяся в среднем на один символ источника сообщений, количественно определяет степень уменьшения неопределенности.

Энтропия является *непрерывной функцией* от вероятностей появления символов и обладает следующими свойствами:

- Энтропия источника дискретных сообщений есть величина вещественная, ограниченная и неотрицательная.
- Энтропия равна нулю, если с вероятностью единица выбирается один и тот же символ (неопределенность в поведении источника отсутствует).
- Энтропия максимальна, если все символы источника появляются независимо и с одинаковой вероятностью:
  $H_{\max} = mP\log P = m(1/m)\log(1/m) = \log m$.

Если символы являются взаимосвязанными (коррелированными друг с другом), то используется понятие *условной энтропии*

$$H(A'/A) = -\sum_{i=1}^{m} P(a_i)\sum_{i=1}^{m} P(a'_j/a_i)\log P(a'_j/a_i)\,, \tag{2}$$

где $P(a'_j/a_i)$ – условная вероятность появления символа a_j после символа a_i.

Из-за корреляционных связей символов и неравновероятного их появления в реальных сообщениях снижается среднее количество информации, которое переносит один символ. Эти потери информации характеризуются *коэффициентом избыточности*

$r = (H_1 - H)/H_1 = 1 - H/\log m$,

H_1 – максимальное количество информации, которое может переносить один символ, H – количество информации, которое переносит один символ в реальных сообщениях (например, для европейских языков $r \geq 0{,}5$).

Наиболее часто основание логарифма в (1) принимают равным 2. При этом единицей количества информации является *бит* (binary digit).

Производительностью источника сообщений называется среднее количество информации, выдаваемой источником в единицу времени, а именно
$H' = H/t$ [бит/с].

Для *каналов* передачи информации вводят аналогичную характеристику – скорость передачи информации *C*. Максимальное её значение называется пропускной способностью канала. Для дискретного канала

$$C = V \log m \text{ [бит/с]}, \qquad (3)$$

где *V*– скорость передачи электрических кодовых сигналов.

1.2. Информационные характеристики источников дискретных сообщений

Рассмотрим свойства условной энтропии с учётом неравновероятного появления символов и статистической взаимосвязи между ними.

Примем для простоты, что появление символа a_i связано только с тем, какой был предыдущий символ a_j (процесс формирования сообщений – простая цепь Маркова). Энтропия совместного появления двух символов

$$H(A,A') = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} P(a_i,a'_j)\log P(a_i,a'_j), \qquad (4)$$

где $P(a_i,a'_j)$ – вероятность совместного появления символов a_i и a'_j. Количество информации, которое приходится на слог $a_i a'_j$ равно $\log P(a_i,a'_j)$.

Учитывая, что

$$P(a_i,a'_j) = P(a_i)P(a'_j/a_i),$$

запишем

$$\begin{aligned} H(A,A') &= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} P(a_i)P(a'_j/a_i)\log P(a_i)P(a'_j/a_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^{m} P(a_i)\log P(a_i)\sum_{j=1}^{m} P(a'_j/a_i) - \sum_{i=1}^{m} P(a_i)\sum_{j=1}^{m} P(a'_j/a_i)\log P(a'_j/a_i). \end{aligned} \qquad (5)$$

Учитывая условие нормировки

$$\sum_{j=1}^{m} P(a'_j/a_i) = 1,$$

перепишем последнее выражение для энтропии совместного появления двух символов в форме

$$H(A,A') = H(A) + H(A'/A), \qquad (6)$$

где $H(A)$ – энтропия источника, которая определена в (1) и соответствует первому слагаемому в (5), $H(A'/A)$ – условная энтропия источника, определяемая выражением (2).

Среднее количество информации, которое переносят два соседних символа, равно сумме среднего количества информации, которое переносит первый из них, и среднего количества информации, которое переносит второй при условии, что первый уже появился.

Условная энтропия одного символа есть среднее количество информации, которое переносит последующий символ при условии, что предыдущий уже известен:

$$H(A'/A) = H(A, A') - H(A).$$

Если символы a_i и a'_j взаимозависимы, то $H(A'/A) < H(A')$. Для источников с независимыми символами

$$H(A, A') = H(A) + H(A').$$

Корреляционные связи могут существовать между (L+1) символами, тогда источник имеет *память* на L символов.

Свойства двоичных источников информации

Пусть символы источника есть a_1, a_2 (m = 2), вероятности их появления $P(a_1)$, $P(a_2)$. Условные вероятности обозначим $P(a_1/a'_1)$, $P(a_2/a'_2)$, $P(a_1/a'_2)$, $P(a_2/a'_1)$.

Случай независимых равновероятных символов

Вероятности $P(a_1) = P(a_2) = P = 1/2$, условные вероятности равны нулю. Энтропия такого источника максимальна:

$$H_{\max} = -(1/2)\log(1/2) - (1/2)\log(1/2) = \log 2 = 1 \text{ бит/симв}.$$

Таким образом, 1 бит – это максимальное среднее количество информации, которое может переносить один символ источника двоичных сообщений.

Случай независимых неравновероятных символов

Вероятности $P(a_1) = P,\ P(a_2) = 1 - P,$ условные вероятности равны нулю. Энтропия такого источника равна

$$H(P) = -P\log P - (1-P)\log(1-P). \qquad (7)$$

Зависимость (7) показана на рис. 1.4. Максимум энтропии достигается при $P = 1/2$. Поскольку $H(P) < H_{\max}$ при $P \neq 1/2$, то производительность такого источника меньше максимальной. Избыточность
$r(P) = 1 - H(P)/H_{\max} \geq 0.$

Пример: Пусть $P(a_1) = 0{,}125; P(a_2) = 0{,}875$. Тогда
$H(P) = -0{,}125 \log 0{,}125 - 0{,}875 \log 0{,}875 \approx 0{,}576$ бит/симв,
$r(P) = 1 - 0{,}576 \approx 0{,}42$.

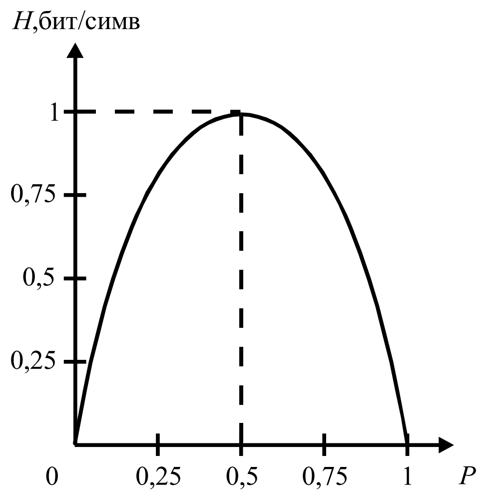

Рис. 1.4. Энтропия двоичного источника сообщений с неравновероятными символами

Случай коррелированных равновероятных символов

Пусть $P(a_1) = P(a_2) = P = 1/2$, условные вероятности отличны от нуля и равны $P(a_1/a_1') = P(a_2/a_2')$, $P(a_1/a_2') = P(a_2/a_1')$. Условная энтропия с учетом соотношения (2) равна

$$H(A/A') = -P\big[P(a_1/a_1')\log P(a_1/a_1') + P(a_2/a_1')\log P(a_2/a_1')\big] -$$
$$- P\big[P(a_2/a_2')\log P(a_2/a_2') + P(a_1/a_2')\log P(a_1/a_2')\big] =$$
$$= -2P\big[P(a_1/a_1')\log P(a_1/a_1') + P(a_2/a_1')\log P(a_2/a_1')\big].$$

Например, если $P(a_1/a_1') = 0{,}7$, $P(a_1/a_2') = 0{,}3$, то
$H(A/A') = -(1/2)\left[0{,}7\log 0{,}7 + 0{,}3\log 0{,}3\right] \approx 0{,}88$ бит/симв,
$r = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$.

При некоррелированных равновероятных символах двоичного источника энтропия равна 1 бит/симв. Следовательно, наличие статистических связей между символами приводит к уменьшению энтропии и увеличению избыточности источника.

Задание: Получить выражение для энтропии и избыточности двоичного источника с коррелированными неравновероятными символами.

Указание: $P(a_1) = \dfrac{P(a_1/a_2')}{1 + P(a_1/a_2') - P(a_2/a_1')}$, $P(a_2) = 1 - P(a_1)$. Принять $P(a_1) = 0{,}125$, $P(a_2) = 0{,}875$; $P(a_1/a_2') = 0{,}1$, $P(a_1/a_1') = 0{,}3$, $P(a_2/a_1') = 0{,}7$, $P(a_2/a_2') = 0{,}9$.

Записать формулу и найти $H(A/A')$ [бит/симв]. Сравнить со случаем некоррелированных равновероятных символов.

1.3. Принципы кодирования информации

Эффективное (статистическое) кодирование осуществляется с целью повышения скорости передачи информации и приближения её к пропускной способности канала.

Теорема Шеннона для эффективных кодов (без доказательства): для канала без помех всегда можно создать систему эффективного кодирования дискретных сообщений, у которой среднее количество двоичных кодовых сигналов на один символ сообщения будет приближаться как угодно близко к энтропии источника сообщений.

Корректирующее (помехоустойчивое) кодирование имеет целью повышение верности передачи информации путём обнаружения и исправления ошибок.

Теорема Шеннона для корректирующих кодов (без доказательства): для канала с помехами всегда можно найти такую систему кодирования, при которой сообщения будут переданы со сколь угодно высокой степенью верности, если только производительность источника сообщений не превышает пропускной способности канала.

При кодировании каждый символ дискретного сообщения пронумеровывается, и передача сообщений сводится к передаче последовательности чисел.

Например, для передачи русских букв нужно передавать числа от 1 до 32.

Если основание системы счисления есть γ, то n – разрядное число X можно записать в виде полинома

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \gamma^i, \tag{8}$$

где a_i – целые числа, $0 \le a_i \le \gamma - 1$. В двоичной системе, очевидно, $a_i = 0$ или 1.

Кодом называется полная совокупность условных символов, которую применяют для кодирования сообщений. Число различных символов в коде называется *основанием кода*. Код с основанием 2 – *бинарный*, с другими основаниями – *многопозиционный*.

Пример:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Буква а} & - & \text{число } 0 & - & \text{код } 00000 \\
\text{Буква б} & - & \text{число } 1 & - & \text{код } 00001 \\
\vdots & - & \vdots & - & \vdots \\
\underbrace{\text{Буква я}}_{\substack{\text{Символы}\\ \text{дискретного}\\ \text{сообщения}}} & - & \underbrace{\text{число } 31}_{\substack{\text{Нумерация}\\ \text{символов}}} & - & \underbrace{\text{код } 11111}_{\substack{\text{Условные кодовые}\\ \text{символы}\\ (\text{основание кода - 2})}}
\end{array}$$

Кодовая комбинация – это последовательность кодовых символов, соответствующих одному элементу (символу) дискретного сообщения, т.е. число, записанное в выбранной системе счисления.

Число символов в кодовой комбинации называется *значностью кода*.

Оператор кодирования показывает, какую кодовую комбинацию присваивают каждому элементу сообщения.

Если все кодовые комбинации содержат одинаковое число символов, код называют *равномерным*, в иных случаях – *неравномерным*.

Для равномерного кода общее число различных кодовых комбинаций равно $N = b^n$, где b – основание кода, n – значность кода.

Примеры:

Равномерный *код Боде* $b = 2$, $n = 5$, $N = 32$.

Код Морзе – неравномерный (наиболее часто встречающиеся буквы кодируются наиболее короткими кодовыми комбинациями).

Принципы обнаружения и исправления ошибок.

Идея обнаружения ошибок заключается в том, что для передачи сообщений используют не все N кодовых комбинаций, а только часть из них N_0, которые называются *разрешёнными*. Оставшиеся $\Delta N = N - N_0$ комбинаций называют *запрещёнными*. Ошибки обнаруживают тогда, когда на приёмной стороне получают запрещённую комбинацию. Доля обнаруживаемых ошибок $\Delta N/N = 1 - N_0/N$.

Если $\Delta N = 0$, т.е. $N = N_0$, то код не способен обнаруживать ошибки и его называют *примитивным* (безызбыточным).

Избыточность корректирующего кода определяется формулой
$r_К = 1 - (\log N_0)/(n \log b)$.

Очевидно, что доля обнаруживаемых ошибок растёт с увеличением избыточности кода.

Исправление ошибок корректирующими кодами основано на определении «расстояния» между кодовыми комбинациями и отыскании минимального расстояния до разрешённой кодовой комбинации.

Расстоянием d_{ij} между кодовыми комбинациями K_i и K_j называют результат сложения по модулю b одноименных разрядов кодовых комбинаций

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} k_{ik} \oplus k_{jk}, \tag{9}$$

где k_{ik} и k_{jk} – k-й разряд кодовых комбинаций, n – значность кода.

При суммировании по модулю результат равен модулю суммы разрядов, если этот модуль меньше b. Если модуль суммы разрядов больше b, то результат получают вычитанием b из суммы.

Аналитическая запись сложения по модулю b имеет вид

$$k_{ik} \oplus k_{jk} = \begin{cases} k_{ik} + k_{jk}, & (k_{ik} + k_{jk} < b), \\ k_{ik} + k_{jk} - b, & (k_{ik} + k_{jk} \geq b). \end{cases}$$

Таким образом, расстояние между кодовыми комбинациями получают поразрядным суммированием по модулю с последующим обычным суммированием (вычитанием).

Для равномерного двоичного кода кодовое расстояние – это число символов, на которое отличается одна комбинация от другой. Например, если $K_i = 10111$, $K_j = 01010$, то $d_{ij} = 4$.

Методика исправления ошибок состоит в том, что, обнаружив ошибку, вычисляют расстояние от полученной запрещённой комбинации K_i до всех разрешённых K_j, $j = 1, \ldots, N_0$. В качестве переданной принимают ту из разрешённых комбинаций, до которой расстояние является наименьшим.

Например, если $\min d_{ij} = d_{i5}$, $j = 1, \ldots, N_0$, то полагают, что была передана комбинация K_5.

1.4. Взаимосвязь теории информации, теории вероятностей и спектральной теории сигналов

Информационные характеристики сообщений, как было показано, определяются на основе их вероятностных характеристик.

Рассмотрим понятие энтропии в обобщенном виде.

Пусть $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_K)$ – совокупность дискретных отсчётов случайного процесса $\{\mathbf{s}(x)\}$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_K$, где $\mathbf{s}_k$ – $(N \times 1)$ – векторы-столбцы, компоненты которых являются случайными величинами – значениями N случайных функций, т.е. реализаций случайного процесса $\{\mathbf{s}(x)\}$, в сечениях $x_k, k = 1,..., K$ (рис. 1.5).

Пусть $P(s_1, s_2, ..., s_K; x_1, x_2, ..., x_K)$ – совместная вероятность значений отсчётов. Совокупность возможных значений дискретных отсчетов s_k при квантовании по уровню можно рассматривать как «алфавит», из которого выбирают «символы» (конкретные дискретные значения отсчётов). Если «объём алфавита» равен m, то это означает, что отсчёты квантованы по m уровням. Каждое значение сигнала s_i, $i = 1,..., m$, представляет собой символ a_i. Тогда, по определению, энтропия отсчётов процесса равна

$$H(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_K) = -\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \ldots \sum^{m}}_{K} P(s_1, s_2, ..., s_K; x_1, x_2, ..., x_K) \times$$
$$\times \log P(s_1, s_2, ..., s_K; x_1, x_2, ..., x_K). \qquad (10)$$

Формула (10) в принципе позволяет рассчитать, хороша ли система передачи информации или нет (в битах на символ), но из формулы не следуют непосредственные рекомендации, как *улучшить* эту систему. Физическими носителями информации являются *сигналы*, их значения, а не вероятности. Поэтому ясно, что именно свойства сигналов должны влиять на эффективность передачи информации.

Рассмотрим сущность этого влияния подробнее.

Для полной совокупности дискретных отсчётов $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_K)$ можно вычислить *корреляционную матрицу*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1K} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{K1} & R_{K2} & \cdots & R_{KK} \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

где $R_{ij} = \left\langle [(\mathbf{s}_i - \langle \mathbf{s} \rangle)(\mathbf{s}_j - \langle \mathbf{s} \rangle)^{\mathrm{T}}] \right\rangle$, скобки $\langle \cdot \rangle$ обозначают усреднение по ансамблю реализаций.

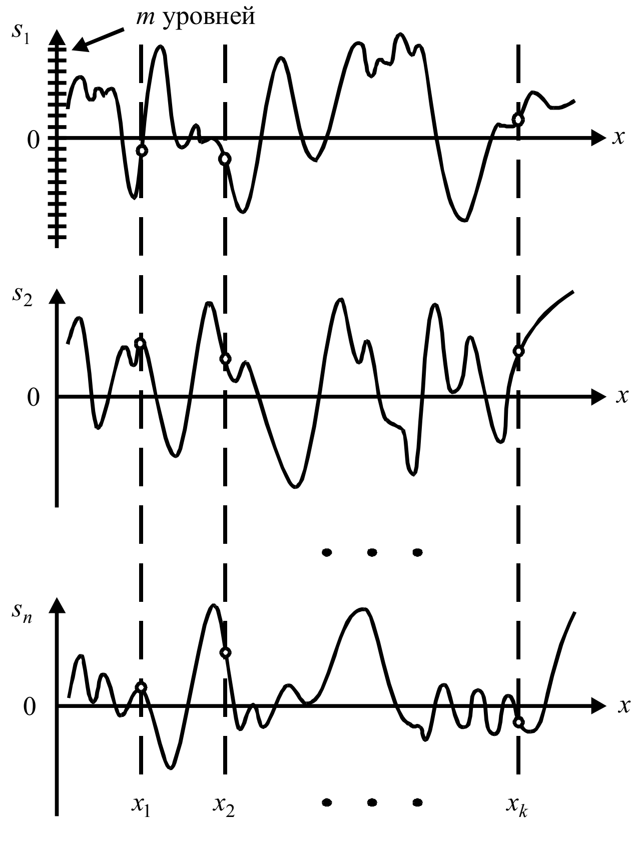

Рис. 1.5. Реализации $s_i(x)$, $i = 1,\dots,n$ и сечения в точках x_k, $k = 1,\dots,K$, случайного процесса $\{\mathbf{s}(x)\}$; реализации $s_i(x_k)$, при квантовании принимают одно из m возможных значений.

В теории стационарных случайных процессов одной из основополагающих является *теорема Винера–Хинчина*, устанавливающая взаимосвязь *корреляционной функции* $R(\chi)$, где χ – интервал, на котором вычисляется статистическая взаимосвязь значений сигнала, и *спектральной плотности* $G(u)$ сигнала, зависящей от частоты u, в форме

$G(u) = \mathrm{F}\{R(\chi)\}$,

где $\mathrm{F}\{\cdot\}$ – оператор преобразования Фурье.

Таким образом, можно заключить, что спектральная плотность мощности (т.е. распределение мощности сигнала по частотам) характеризует корреляционную функцию, для дискретных процессов – корреляционную матрицу (11).

В свою очередь, можно показать, что корреляционная матрица полностью определяет совместную вероятность значений совокупности отсчётов *гауссовского* процесса. При известной совместной вероятности можно вычислить энтропию (10).

Такие рассуждения позволяют выполнить математические преобразования и получить формулу, связывающую энтропию отсчётов гауссовского процесса и спектральную плотность, а именно

$$H(\mathbf{S}) = \sum_{u_i} \log G(u_i) \text{ ,} \tag{12}$$

где $G(u_i)$ – значения спектральной плотности для значений частоты u_i .

Замечания:

1. В последней формуле подразумевается, что вся мощность сигнала сосредоточена на частотах u_i (что характерно, например, для случайных сигналов в виде суммы периодических сигналов).
2. Следует различать понятие *спектра мощности* и *амплитудного спектра*. Последнее понятие используется для анализа *детерминированных* сигналов в частотной области. Эти две величины, как будет показано далее, имеют разные физические размерности.

Таким образом показано, что энтропия источника сообщений, рассматриваемых как реализации гауссовского случайного процесса, определяется спектральной плотностью процесса. Для гауссовского процесса энтропия вычисляется по формуле (12). Следовательно, информационные характеристики передаваемых сообщений определяются спектральными характеристиками сигналов.

1.5. Элементы спектральной теории сигналов

Спектральное представление позволяет перейти от описания сигналов в области независимой переменной (времени) к частотной области. Частотные спектры во многих случаях наиболее наглядно отображают свойства сигналов.

Ряды Фурье

Для периодического сигнала $s(x)$ справедливо выражение

$$s(x) = s(x \pm kT),\ k = 1,2,..., \tag{13}$$

где T – период повторения значений сигнала. Сигнал (13) можно разложить в ряд Фурье

$$s(x) = (a_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi u_n x + b_n \sin 2\pi u_n x)\ , \tag{14}$$

где $u_n = nu_1, u_1 = 1/T$ – фундаментальная частота ряда Фурье. Таким образом, сигнал $s(x)$ представлен суммой косинусоид и синусоид, частоты которых изменяются дискретно с шагом $\Delta u = u_1$. Коэффициенты a_n и b_n вычисляются в форме интегралов по интервалу длиной T, а именно:

$$a_n = (2/T)\int_0^T s(x)\cos(2\pi u_n x)\,dx,\ \ n = 1,2,... \tag{15}$$

$$b_n = (2/T)\int_0^T s(x)\sin(2\pi u_n x)\,dx,\ \ n = 1,2,... \tag{16}$$

Первое слагаемое в (14) представляет среднее значение сигнала

$$a_0/2 = (1/T)\int_0^T s(x)\,dx.$$

Выражение (14) можно переписать в виде

$$s(x) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(2\pi u_n x - \varphi_n)\ , \tag{17}$$

где $s_0 = a_0/2$, $s_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = \mathrm{arctg}(b_n/a_n)$, т.е. отдельная частотная составляющая имеет амплитуду s_n и начальную фазу φ_n.

Поскольку $\cos y = (1/2)[\exp(jy) + \exp(-jy)]$, формулу (17) можно представить в форме

$$s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(j2\pi u_n x)\ , \tag{18}$$

где $A_0 = a_0/2$,

$$A_n = (a_n - jb_n)/2 = (1/T)\int_0^T s(x)\exp(-j2\pi u_n x)\,dx,\ \ n = \pm1,\pm2,... \tag{19}$$

В (18) сигнал определен на положительных и отрицательных частотах u_n. Коэффициенты A_n, вообще говоря, являются комплексными:

$$A_n = |A_n|\exp(-j\varphi_n),\ \ n = \pm1,\pm2,..., \tag{20}$$

причём $A_{-n} = A_n^*$, где звёздочкой обозначено комплексное сопряжение.

Преобразование Фурье

Сигнал $s(x)$ может иметь непериодический характер, что приводит к необходимости обобщения ряда Фурье для случая $T \to \infty$ в форме интеграла Фурье

$$S(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \exp(-j2\pi ux)\, dx, \; -\infty < u < \infty, \tag{21}$$

который существует при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|s(x)\right| dx < \infty\,.$$

Формула (21) определяет преобразование Фурье или *спектр* сигнала. При известном спектре можно определить сигнал с помощью обратного преобразования Фурье

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(u) \exp(j2\pi ux)\, dx, \; -\infty < u < \infty. \tag{22}$$

Из (21) видно, что спектр действительного сигнала $s(x)$, вообще говоря, является комплексным, поэтому

$$S(u) = S_R(u) - jS_I(u),$$

где

$$S_R(u) = \left|S(u)\right| \cos\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \cos(2\pi ux)\, dx,$$

$$S_I(u) = \left|S(u)\right| \sin\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \sin(2\pi ux)\, dx$$

- действительная и мнимая части спектра соответственно. В полярных координатах

$$S(u) = \left|S(u)\right| \exp[-j\varphi(u)]\,, \tag{23}$$

где $\left|S(u)\right|$ есть амплитудный спектр, $\varphi(u)$ – фазовый спектр.

Основные свойства преобразования Фурье можно кратко сформулировать следующим образом.

1. Свойство линейности.

$$\mathrm{F}\{as_1(x) + bs_2(x)\} = aS_1(u) + bS_2(u) \tag{24}$$

для любых функций $s_1(x)$ и $s_2(x)$ и любых постоянных a и b.

2. Теорема сдвига.

$$\mathrm{F}\{s(x-\xi)\} = \exp(-j2\pi u\xi)\, S(u)\,. \tag{25}$$

Сдвиг сигнала в области независимой переменной вызывает изменение фазы, пропорциональное значению частоты каждой спектральной составляющей сигнала.

3. Повторное выполнение преобразования Фурье:

$$\mathrm{F}\{S(u)\} = s(-x) \tag{26}$$

восстанавливает исходный сигнал с инверсией знака независимой переменной.

4. Теорема о производной.

Если $\mathrm{F}\{s(u)\} = S(u)$, то

$$\mathrm{F}\{d^n s(x) / dx^n\} = (j2\pi u)^n S(u). \tag{27}$$

5. Свойство четности и нечетности.

Если $S(u) = S_R(u) - jS_I(u)$, то в случае, когда $s(x)$ четная функция, имеем $S(u) = S_R(u)$ – четная функция; при $s(x)$ нечетной $S(u) = S_I(u)$ – нечетная функция.

6. Свойство подобия.

$$\mathrm{F}\{s(ax)\} = (1/|\,a\,|)\, S(u/a), \tag{28}$$

где a – постоянная.

7. Сохранение энергии.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|S(u)\right|^2 du. \tag{29}$$

Из этого соотношения следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(x)\, s_2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(u)\, S_2(u)\, du$$

для любых сигналов $s_1(x)$ и $s_2(x)$, имеющих спектры $S_1(u)$ и $S_2(u)$.

8. Спектр свертки:

$$\mathrm{F}\big\{\, s_1(x) * s_2(x) \big\} = \mathrm{F}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi)\, s(x-\xi)\, d\xi \right\} = S_1(u)\, S_2(u). \tag{30}$$

Таким образом, преобразование Фурье, примененное к свертке двух сигналов, равно произведению спектров этих сигналов.

Дискретное преобразование Фурье

При обработке последовательности отсчётов сигнала интегральные соотношения следует заменить соответствующими операциями дискретного суммирования.

Алгоритмы преобразования Фурье *дискретной последовательности* отсчётов $s(p)$, имеющей *конечную длину*, $0 \le p \le N-1$, сводятся к вычислению *конечного числа* коэффициентов $S(q)$, $0 \le q \le Q-1$, согласно соотношению

$$S(q) = \sum_{p=0}^{N-1} s(p)\exp(-j2\pi pq/Q)\,. \tag{31}$$

Обратимся к выражению (21) и сравним его с (31). Формула (31) представляет собой *дискретную аппроксимацию* преобразования (21), при которой функция $s(x)$ заменяется ступенчатой функцией $s(p) = s(x_p)$ в пределах протяженности элемента дискретизации. Таким образом, следует помнить, что выражение (31) есть приближение, качество которого должно улучшаться при увеличении N и соответствующем уменьшении шага дискретизации Δx.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) обычно вычисляют при условии $Q = N$, т.е.

$$S(q) = \sum_{p=0}^{N-1} s(p)\, W_N^{pq}\,, \tag{32}$$

где $q = 0,1,\ldots, N-1$, $W_N = \exp(-j2\pi/N)$.

Можно доказать, что для ядра преобразования (32) выполняется следующее тождество:

$$\sum_{p=0}^{N-1} W_N^{pq} = \begin{cases} N, & q = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots, \\ 0, & q \ne 0, \pm N, \pm 2N, \ldots. \end{cases}$$

При этом обратное ДПФ (ОДПФ) определяется в форме

$$s(p) = (1/N)\sum_{p=0}^{N-1} S(q)\, W_N^{-pq}. \tag{33}$$

Свойства ДПФ можно получить из формул (24) – (30), имея в виду дискретный характер последовательности отсчётов сигнала.

Финитное преобразование Фурье

Всякий реальный сигнал имеет ограниченную протяженность. При этом вместо обычного преобразования Фурье

$$S(u) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\exp(-j2\pi ux)\, dx \tag{34}$$

имеем *финитное* преобразование в конечных пределах

$$S(u,2X) = \int_{-X}^{X} s(x)\exp(-j2\pi ux)\, dx,$$

где $2X$ – интервал регистрации сигнала.

Для случая *непрерывного* изменения независимой переменной x с учётом (30) можно записать:

$$S(u,2X)=\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,\mathrm{rect}(x/2X)\exp(-j\pi ux)\,dx = S(u)*\mathrm{sinc}(2uX)\,, \qquad (35)$$

где $\mathrm{rect}(x/2X)$ – прямоугольная функция протяженностью $2X$.

Отличие (35) от идеального преобразования Фурье (21) иллюстрируется на рис. 1.6 для отрезка сигнала протяженности L=$2X$. Заметим, что середина отрезка L при этом смещена по горизонтальной оси на интервал X. Согласно свойству преобразования Фурье (25), это вызывает фазовый сдвиг $2\pi uX$, пропорциональный значениям частоты u, но не изменяет модуль спектра.

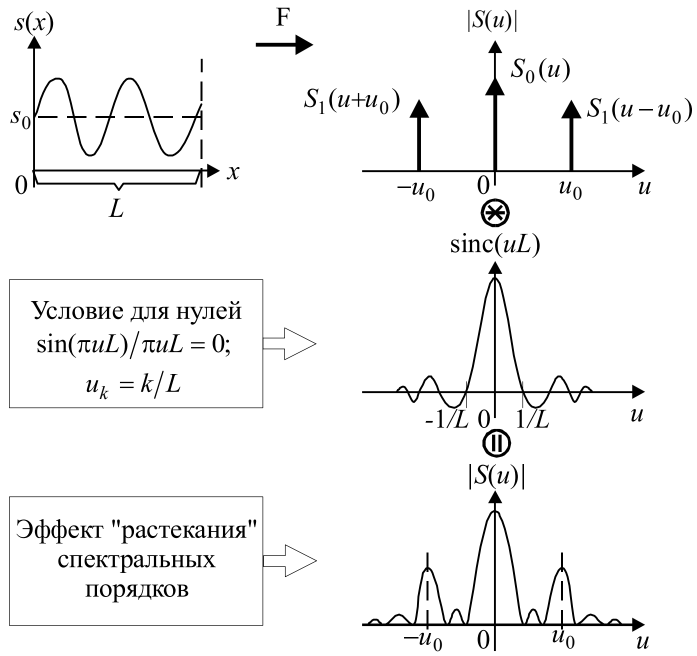

Рис. 1.6. Изменения спектра при ограниченной протяженности сигнала

Для случая дискретных отсчётов, взятых в точках $x_k = k\Delta x$, $k = 0, 1,..., 2X/\Delta x$, получим спектральные линии на дискретных частотах $u_n = n/2X$, $n = 0, 1,..., N$, $N = K$. Частота $u_1 = 1/2X$ называется фундаментальной частотой финитного преобразования Фурье.

При этом

$$S(u_n, 2X) = \int_{-X}^{X} s(x)\exp(-j2\pi u_n x)\,dx\,, \qquad (36)$$

т.е. финитное преобразование Фурье связано с коэффициентами A_n ряда Фурье, а именно:

$S(u_n, 2X) = 2A_n X$.

Иначе говоря, финитное преобразование Фурье сводится к нахождению коэффициентов ряда Фурье для функции $s(x)$, периодически продолженной с периодом $L = 2X$ (рис. 1.7). При нецелом числе периодов, укладывающихся на отрезке L, происходит искажение спектра.

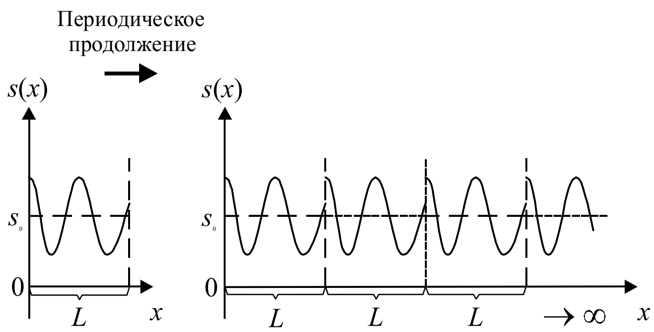

Рис. 1.7. Трансляция отрезков сигнала ограниченной протяженности

Математическое описание систем передачи и обработки сигналов

В системах передачи и обработки сигналов осуществляется преобразование входных сигналов $s_{\text{вх}}$ в выходные $s_{\text{вых}}$. Характеристики преобразования могут быть заданными (например, при фильтрации сигналов) или должны быть исследованы (например, при анализе характеристик линий передачи информации). Во всех случаях используются основные положения теории систем.

Наиболее важными являются *линейные системы*, подчиняющиеся принципу суперпозиции:

$$\mathrm{T}\{\alpha s_{\text{вх}_1} + \beta s_{\text{вх}_2}\} = \alpha \mathrm{T}\{s_{\text{вых}_1}\} + \beta \mathrm{T}\{s_{\text{вых}_2}\}\,, \qquad (37)$$

где α и β – постоянные, T – оператор системы.

Импульсной характеристикой (реакцией) системы, по определению, называется функция

$$h(x) = \mathrm{T}\{\delta(x)\}\,, \tag{38}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция. Обычно независимой переменной x является время.

Систему называют стационарной или *инвариантной во времени*, если при выполнении условия

$$s_{\text{вых}}(x) = \mathrm{T}\{s_{\text{вх}}(x)\} \tag{39}$$

следует, что

$$s_{\text{вых}}(x-\chi) = \mathrm{T}\{s_{\text{вх}}(x-\chi)\}\,,$$

где χ - произвольный сдвиг.

Импульсная характеристика инвариантной во времени системы с учетом (38), очевидно, подчиняется соотношению

$$h(x-\chi) = \mathrm{T}\{\delta(x-\chi)\}\,.$$

Входной сигнал можно представить последовательностью дельта-функций:

$$s_{\text{вх}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\chi)\,\delta(x-\chi)\,d\chi\,, \tag{40}$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\chi)\,d\chi = 1$.

Сигнал на выходе системы из (38) – (40) определяется выражением

$$s_{\text{вых}}(x) = \mathrm{T}\{s_{\text{вх}}(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\chi)\,\mathrm{T}\{\delta(x-\chi)\}\,d\chi\,.$$

В результате выходной сигнал определяется *интегралом свёртки*

$$s_{\text{вых}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\chi)\,h(x-\chi)\,d\chi = s_{\text{вх}}(x) * h(x)\,. \tag{41}$$

Пусть существует преобразование Фурье сигнала $\mathrm{F}\{s(x)\} = S(u)$ и импульсной характеристики системы $\mathrm{F}\{h(x)\} = H(u)$. Используя свойства преобразования Фурье, можно доказать *теорему о свёртке* (30):

$$s(x) * h(x) \overset{\mathrm{F}}{\Leftrightarrow} S(u)H(u)\,.$$

Поскольку $s_{\text{вых}}(x) = s_{\text{вх}}(x) * h(x)$, то в спектральной области

$$S_{\text{вых}}(u) = S_{\text{вх}}(u)\,H(u)\,. \tag{42}$$

Функция

$$H(u) = S_{\text{вых}}(u) / S_{\text{вх}}(u) \tag{43}$$

называется частотной характеристикой системы.

Детерминированные и стохастические сигналы

Преобразование Фурье (21) содержит полную информацию о сигнале $s(x)$ в частотном представлении. Если сигнал $s(x)$ является реализацией случайного процесса $\{s(x)\}$, то результат преобразования (21) будет изменяться от сигнала к сигналу («от опыта к опыту»). Неизменной характеристикой *ансамбля реализаций* $\{s(x)\}$ стационарного эргодического случайного процесса является спектральная плотность

$$G_s(u) = \lim_{X\to\infty} (1/X) \left\langle \left| S_k(u,2X) \right|^2 \right\rangle, \quad (44)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций (индексу k). Спектральная плотность характеризует значение среднего квадрата процесса: площадь под графиком спектральной плотности на произвольном частотном интервале (u_1, u_2) равна среднему квадрату процесса в этой полосе частот. Наряду с понятием спектральной плотности часто используют соответствующее понятие *энергетического спектра*.

Спектральная плотность стационарного эргодического случайного процесса связана с корреляционной функцией $R_s(\chi)$ этого процесса преобразованием Фурье:

$$G_s(u) = \mathrm{F}\{R_s(\chi)\} \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\chi) \exp(-j2\pi u\chi)\, d\chi\,, \quad (45)$$

где

$$R_s(\chi) = \lim_{X\to\infty} (1/X) \int_0^{\infty} s(x)\, s(x+\chi)\, dx\,. \quad (46)$$

Соотношение (45) носит название теоремы Винера-Хинчина. Поскольку автокорреляционная функция (46) является чётной функцией, спектральная плотность (45) является действительной чётной функцией.

Таблица 1. Основные величины и типичные единицы их измерения

Величина	Обозначение	Единица измерения
1. Сигнал	$s(x)$	В (Вольт)
2. Амплитудный спектр (АС)	$\lvert S(u,X)\rvert$	$\text{В}\cdot\text{с}$
3. Квадрат модуля АС	$\lvert S(u,X)\rvert^2$	$\text{В}^2\cdot\text{с}^2$
4. Спектральная плотность	$G_s(u)$	$\text{В}^2\cdot\text{с} = \text{В}^2/\text{Гц}$
5. Корреляционная функция	$R_s(u)$	В^2

1.6. Принципы дискретизации непрерывных сигналов

Пусть функция $s(x)$ определяет исходный непрерывный сигнал. Операция дискретизации заключается в выполнении преобразования вида

$$\hat{s}(x) = d(x)\,[s(x) * h(x)],$$

где в простейшем случае *апертурная функция элемента дискретизации* $h(x)$ имеет вид

$$h(x) = \mathrm{rect}(x/2b) = \begin{cases} 1, & |x| < b, \\ 0, & |x| \ge b, \end{cases} \tag{47}$$

$2b$ – ширина элемента дискретизации,

$$d(x) = d_0 \sum_{k=0}^{K-1} \delta(x - k\Delta x)$$

– функция дискретизации, Δx – шаг дискретизации, d_0 – нормирующий множитель, такой, что площадь под графиком $d(x)$ равна единице.

Вид функций $h(x)$ и $d(x)$ иллюстрируются на рис. 1.8.

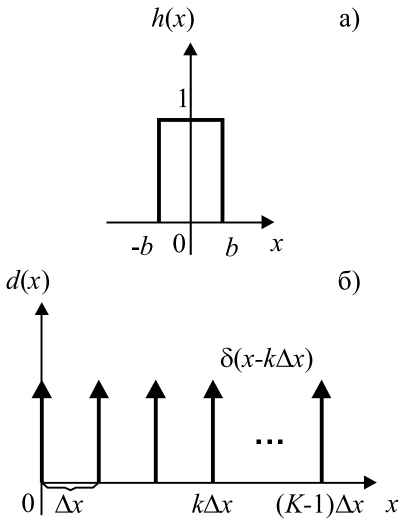

Рис. 1.8. Прямоугольная функция элемента дискретизации (а) и функция дискретизации (б)

Сигнал $s(x)$ можно представить последовательностью импульсов протяженностью $2b = \Delta x$, имеющих амплитуды, равные значениям сигнала в точках $(k+1)\,\Delta x$. Тогда получим ступенчатую функцию, показанную на рис. 1.9, а именно

$$\hat{s}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k\Delta x)\, h(x - k\Delta x + \Delta x/2)\,. \tag{48}$$

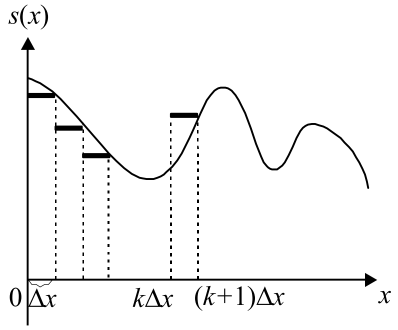

Рис. 1.9. Ступенчатая аппроксимация непрерывного сигнала

После перехода к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\hat{s} = \int_{0}^{\infty} s(\xi)\, h(x-\xi)\, d\xi = s(x) * h(x)\,. \tag{49}$$

Такое преобразование является операцией свертки, которая имеет следующие важные свойства:

- дистрибутивность
  $a(x) * [b(x) + c(x)] = a(x) * b(x) + a(x) * c(x)$
- коммутативность
  $a(x) * b(x) = b(x) * a(x)$
- ассоциативность
  $[a(x) * b(x)] * c(x) = a(x) * [b(x) * c(x)] = a(x) * b(x) * c(x)$.

Подчеркнем, что при условии существования интеграла (49) операция свертки не вносит ограничений на вид апертурной функции элемента дискретизации $h(x)$.

Процесс дискретизации удобно рассматривать в частотном представлении, получаемом в результате преобразования Фурье исходного сигнала. Функция дискретизации определяется в частотной области следующим выражением:

$$D(u) = \mathrm{F}\{d(x)\} = u_d \sum_{k=0}^{\infty} \delta(u - ku_d)\,, \tag{50}$$

где $\mathrm{F}\{.\}$ обозначает операцию преобразования Фурье, $u_d = 1/(\Delta x)$. Вид функции $D(u)$ показан на рис. 1.10. Таким образом, процесс выборки дискретных значений сигнала вызывает появление спектральных порядков ku_d, $k \geq 1$.

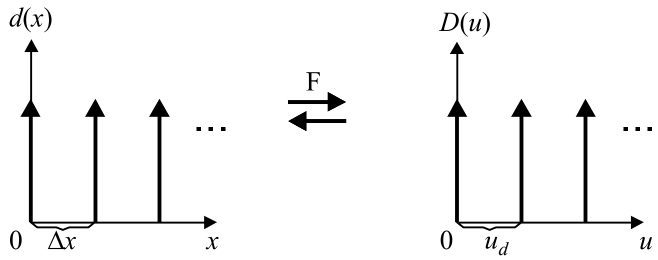

Рис. 1.10. Функция дискретизации и её частотное представление

Дискретизованный сигнал имеет вид произведения двух функций, поэтому, согласно теореме о свертке, его спектр равен свертке спектров: $\hat{S}(u) = S(u) * D(u)$. Поскольку с учетом (50) и свойств частотной симметрии преобразования Фурье (см. разд 1.5) можно записать, что

$$\hat{S}(u) = S(u) * u_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - ku_d)\,,$$

спектр дискретизованного сигнала представляет собой спектр исходного сигнала, периодически повторенного (перенесенного) по частотной оси с шагом u_d, как это иллюстрируется на рис. 1.11, включая диапазон отрицательных частот.

Теорема дискретизации формулируется следующим образом:

Для того, чтобы спектр исходного сигнала в области частот $(-u_M; u_M)$ не искажался в процессе дискретизации, необходимо и достаточно выполнение неравенства $u_d \geq 2u_M$, где u_M – наибольшая частота в спектре синала.

Спектр сигнала, очевидно, можно выразить в форме

$$\hat{S}(u) = u_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(u - ku_d)\,. \tag{51}$$

Выделим из этого спектра частотный интервал $(-u_d/2; u_d/2)$ и выполним обратное преобразование Фурье. В результате получим

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k/u_d)\,\mathrm{sinc}[u_d(x - k/u_d)]. \quad (52)$$

Отсюда следует *теорема Шеннона*: если для частоты дискретизации u_d справедливо неравенство $u_d \ge 2u_M$, то сигнал $s(x)$ восстанавливается *однозначно* по его дискретным значениям $s(k/u_d)$, $k = 0, \pm 1, ...$

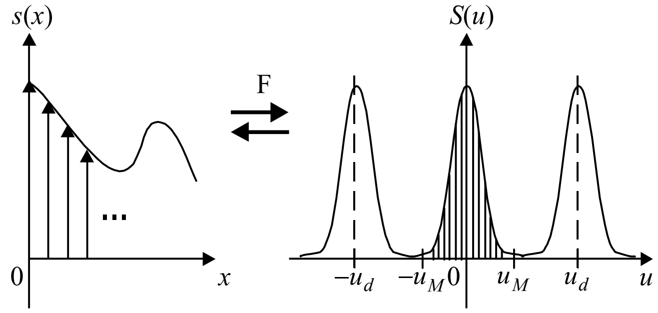

Рис. 1.11. Формирование спектра при дискретизации сигнала

Функция

$$\mathrm{sinc}[u_d(x - k/u_d)] = \frac{\sin[\pi u_d(x - k/u_d)]}{\pi u_d(x - k/u_d)}$$

называется *интерполяционной функцией Шеннона*.

Дискретизация узкополосных сигналов

Модель типичного узкополосного сигнала имеет вид

$$s(x) = s_0(x) + s_m(x)\cos(\varepsilon + 2\pi u_0 x) + n(x), \quad (53)$$

где $s_0(x)$ – фоновая составляющая, $s_m(x)$ – огибающая, изменяющиеся медленно по сравнению с периодом $1/u_0$, ε – начальная фаза в точке $x = 0$, u_0 – частота, $n(x)$ – аддитивный шум. В результате дискретизации получаем сигнал

$$\hat{s}(x) = d(x)\,[s(x) * h(x)],$$

при этом спектр сигнала определяется выражением

$$\mathrm{F}\{\hat{s}(x)\} = \hat{S}(u) = D(u) * [S_0(u) + S_1(u - u_0) + S_1^*(u - u_0) + N(u)]\,H(u). \quad (54)$$

Здесь $N(u)$ обозначает амплитудный спектр аддитивного шума, $H(u)$ – преобразование Фурье апертурной функции элемента дискретизации. Для функции вида (47) прямоугольной формы и $\Delta x = 2b$ нулевые значения $H(u)$ имеют место на частотах $u_s = 1/(2b)$.

Спектр дискретизованного сигнала имеет вид, показанный на рис. 1.12. При обработке спектра обычно выделяют составляющую $S_1(u-u_0)$.

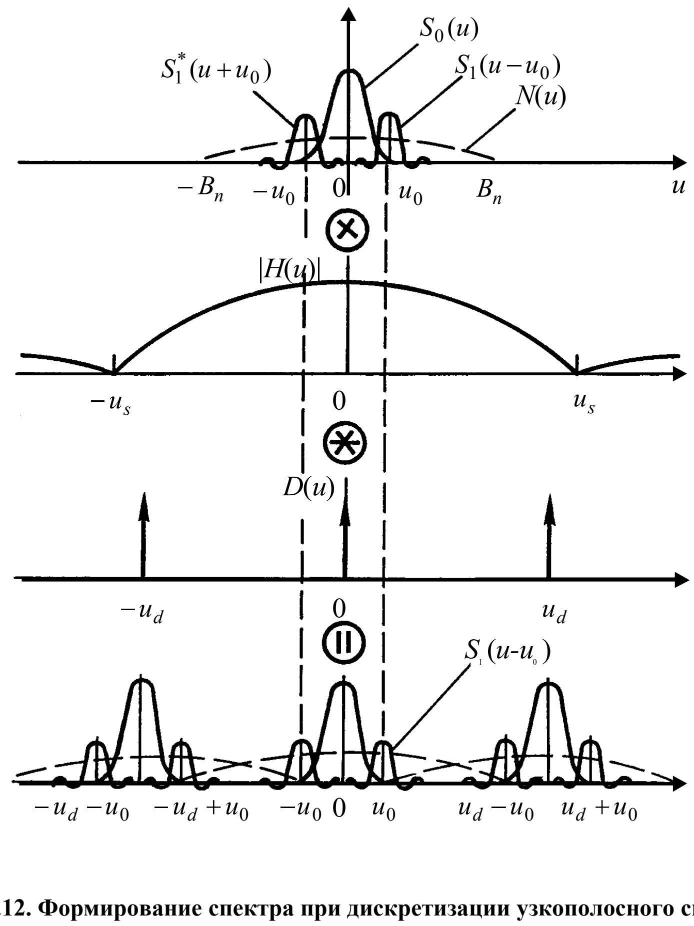

Рис. 1.12. Формирование спектра при дискретизации узкополосного сигнала

Рассмотрим методику выбора шага дискретизации узкополосного сигнала.

Если частота u_0 гармонической составляющей *априорно* известна, то шаг дискретизации Δx определяется согласно теореме дискретизации, а именно, нужно выполнить условие $u_0 < (1/2\Delta x)$, т.е. $\Delta x < 1/2u_0$. Таким образом, шаг дискретизации должен быть меньше половины периода гармонического сигнала.

Если сигнал $s(x)$ не является строго гармоническим и имеет протяженный спектр с граничной частотой u_M, то выбор шага дискретизации определяется по теореме дискретизации: $\Delta x < 1/2u_M$.

Для уменьшения влияния спектра шума, попадающего из соседних спектральных порядков (рис. 1.12), нужно настолько уменьшить шаг дискретизации, чтобы он не превышал значения $1/(2u_{n_M})$, где u_{n_M} – составляющая шума с наибольшей частотой. Следует иметь в виду, что вследствие стохастического характера шума можно строго определить его *спектр мощности*, но не амплитудный спектр. Поэтому результат преобразования Фурье шума может существенно изменяться от реализации к реализации. Некоррелированный шум имеет спектр бесконечной протяженности. Поэтому перед дискретизацией сигнала *необходимо* выполнить низкочастотную фильтрацию для получения «окрашенного» шума с граничной частотой $u_{n_M} \le u_d/2$.

Влияние формы элемента дискретизации

Операция дискретизации определяется формулой
$\hat{s}(x) = d(x)[s(x) * h(x)]$.

Выше был рассмотрен случай ступенчатой аппроксимации нулевого порядка, как это показано на рис. 1.9. Функция $h(x)$, вообще говоря, может иметь произвольную форму. Однако в любом случае нужно иметь в виду, что форма и протяженность функции $h(x)$ влияют на спектр сигнала за счет умножения спектра этого сигнала на функцию $H(u) = \mathrm{F}\{h(x)\}$ (рис. 1.12).

Приведем простой пример. Пусть $h(x) = \mathrm{rect}(x/2b)$. Соответствующая функция в спектральной области будет равна

$$H(u) = \mathrm{sinc}(2ub) = \frac{\sin(2\pi ub)}{2\pi ub}.$$

В этом несложно убедиться непосредственным интегрированием функции косинуса:

$$(1/2b)\int_{-b}^{b} \cos(2\pi ux)\,dx = \frac{\sin(2\pi ub)}{2\pi ub}.$$

Поэтому составляющие спектра сигнала при $u > 0$ будут ослаблены вплоть до полного подавления на частоте $u_s = 1/2b$ (рис. 1.12).

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

Влияние размера элемента дискретизации на спектральную составляющую с частотой u тем меньше, чем меньше отношение $2b/T$, где $T = 1/u$ – период этой составляющей.

Во избежание энергетических потерь при дискретизации непрерывного сигнала уменьшение размера элемента дискретизации должно сопровождаться соответствующим повышением частоты дискретизации.