Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
«Физические основы информационно-телекоммуникационных систем»

Гурбатов С.Н.
Грязнова И.Ю.
Демин И.Ю.
Клемина А.В.
Курин В.В.
Прончатов-Рубцов Н.В.

УМК "ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД"
ЭЛЕКТРОННЫЙ ЗАДАЧНИК
«ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД: ГИДРОМЕХАНИКА И АКУСТИКА»

(Электронное методическое пособие)

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Учебная дисциплина: «Основы механики сплошных сред»

Специальности: «010801 Радиофизика и электроника», «010802 Фундаментальная радиофизика»
Направления: «010800.62 Радиофизика», «010700.62 Физика»

Нижний Новгород
2010

Предисловие

Механика сплошных сред – это обширная часть теоретической физики, включающая в себя теорию движения жидкостей и газов (гидродинамику) и твердых тел (теорию упругости). Однако в настоящее время благодаря ряду своих специфических особенностей эти разделы механики сплошных сред превратились в самостоятельные науки. Если теория упругости строится на решении линейных дифференциальных уравнений в частных производных, то гидродинамика, напротив, базируется на нелинейных уравнениях, что делает возможным их прямое решение лишь в немногих случаях. В одном учебном пособии достаточно сложно охватить весь спектр задач механики сплошных сред, поэтому данный сборник задач посвящен в основном проблемам гидродинамики и некоторым аспектам введения в теорию волн.

Содержание предлагаемого учебного пособия базируется на материале лекций и практических занятий по «Основам механики сплошных сред» и «Основам акустики». Данные курсы разработаны преподавателями кафедры акустики Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского и в течение ряда лет читались студентам старших курсов радиофизического факультета. Основная цель данного сборника виделась авторам в том, чтобы сообщить студентам необходимый минимум знаний для решения гидродинамических задач и подготовить их для активной работы над современными проблемами.

Структура учебного пособия позволяет, с одной стороны, овладеть краткими теоретическими основами того или иного раздела курса, с другой стороны, на примере задач с приведенными решениями, получить представление об универсальных методах их решения, и, наконец, выработать самостоятельные навыки расчетов и оценок. Задачник состоит из девяти глав, каждую главу предваряет краткое теоретическое вступление, затем подробно разбираются примеры решения задач, а задачи для самостоятельной проработки снабжены необходимыми пояснениями и ответами.

1. Лагранжев и Эйлеров способы описания движения жидкости. Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости

Основы теории

Движение жидкости описывается Эйлеровым способом, если все величины, характеризующие жидкость (скорость движения частиц $\vec{v}$, давление p, плотность ρ, температура T и др.) заданы как функции координат и времени. При этом, фиксируя некоторую точку пространства, можно проследить за изменением во времени соответствующих величин в этой точке, а, фиксируя момент времени, - узнать изменение этих величин от точки к точке. Однако никакой информации о том, какая именно частица жидкости находится в данный момент в данной точке и как она перемещается в пространстве, при Эйлеровом способе описания движения жидкости мы не имеем.

В основу Лагранжевого способа описания течений, напротив, положено описание движения отдельных жидких частиц. При этом все величины, в том числе и координаты движущейся частицы, определяются как функции времени t и некоторых переменных ξ_i ($i = 1,2,3$), идентифицирующих определенную частицу: $x_i = x_i(\xi_k, t)$, $p = p(\xi_k, t)$, $\rho = \rho(\xi_k, t)$ и т.д. В качестве переменных ξ_k обычно используют начальные координаты частицы жидкости $\xi_i = x_i(\xi_k, t_0)$. Таким образом, при Лагранжевом описании фиксируется внимание на определенных частицах жидкости и прослеживается, как изменяются со временем их местоположение, скорость, а также давление, плотность, температура и другие величины в их окружении.

Отметим, что эти два способа описания течения жидкости равноправны. Мы в основном будем пользоваться Эйлеровой формой описания движения.

Жидкость, для которой можно пренебречь процессами вязкости и теплопроводности, называют идеальной жидкостью. В ней отсутствует теплообмен между различными участками жидкости, это означает, что все процессы протекают при постоянной энтропии.

Состояние движущейся жидкости определяется пятью скалярными величинами: тремя компонентами скорости $\vec{v}$ и какими-либо двумя термодинамическими величинами, например, давлением p и плотностью ρ. Поэтому полная система гидродинамических уравнений должна содержать пять скалярных уравнений. Для идеальной жидкости это уравнение Эйлера (уравнение движения жидкости в поле объемной внешней силы $\vec{f}$)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f}\,, \tag{1.1}$$

уравнение неразрывности (закон сохранения вещества)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \tag{1.2}$$

и уравнение состояния, связывающее термодинамические величины. Если жидкость является баротропной, т.е. давление зависит только от плотности, то уравнение состояния имеет вид

$$p = p(\rho)\,. \tag{1.3}$$

Примеры решения задач

1. Доказать, что полная производная по времени от скалярной функции $U = U(x, y, z, t)$ связана с частной производной следующим образом:

$$\frac{dU}{dt} = (\vec{v}\nabla)U + \frac{\partial U}{\partial t}\,.$$

Решение: Поскольку скалярное поле U определяется тремя координатами x, y, z и временем t, то его полная производная по времени по определению равна:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Заметив, что $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$, последние три слагаемые можно объединить с помощью дифференциального оператора $(\vec{v}\nabla)$, представляющего собой скалярное произведение вектора скорости и оператора Гамильтона:

$$(\vec{v}\nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

2. Получить уравнение неразрывности (1.2) в дифференциальной и интегральной форме.

Решение: Рассмотрим некоторый объем жидкости V, состоящий все время из одних и тех же частиц, т.е. движущийся вместе с жидкостью. Очевидно, что масса жидкости в этом объеме будет сохраняться с течением времени, т.е.

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_V \rho dV = 0,$$

где ρ - плотность жидкости. Поменяв порядок дифференцирования и интегрирования, воспользовавшись результатом задачи 1.9, получим:

$$\iiint\limits_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v}\right] dV = 0,$$

где $\vec{v}$ - скорость течения жидкости.

Поскольку объем V был выбран произвольно, то приравняв нулю подынтегральное выражение, получаем искомое уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0.$$

Его можно представить также в другом виде (см. задачу 1.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\rho + \rho\nabla\vec{v} = 0$$

или, объединяя последние слагаемые, можно записать:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 .$$

Для того чтобы получить интегральную форму уравнения неразрывности, проинтегрируем последнее выражение по фиксированному объему V и воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского:

$$\iiint\limits_V div(\rho \vec{v}) dV = \oint\!\!\oint\limits_S \vec{n} \rho \vec{v} dS ,$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S, ограничивающей объем V. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V \rho dV = -\oint\!\!\oint\limits_S \vec{n} \rho \vec{v} d\vec{S} ,$$

т.е. изменение массы жидкости внутри фиксированного объема равно массе жидкости (с обратным знаком), вытекающей в единицу времени из объема через его поверхность. Заметим, что этот физический факт можно было бы взять за исходный и с помощью обратных преобразований получить дифференциальную форму уравнения неразрывности [1].

3. Получить уравнение Эйлера (1.1).

Решение: Рассмотрим объем жидкости, состоящий все время из одних и тех же частиц, и запишем для него II закон Ньютона:

$$\frac{d}{dt} \iiint\limits_V \rho \vec{v} dV = \vec{F} + \vec{F}_S ,$$

где $\vec{F} = \iiint\limits_V \rho \vec{f} dV$ - внешняя объемная сила,

$\vec{F}_S = -\oint\!\!\oint\limits_S \vec{n} p dS = -\iiint\limits_V \nabla p dV$ - сила, действующая на объем V со стороны окружающей среды через ограничивающую поверхность S. Таким образом, имеем

$$\iiint_V \left[\frac{d(\rho\vec{v})}{dt} + \rho\vec{v}(\nabla\vec{v}) \right] dV = \iiint_V \left[-\nabla p + \rho\vec{f} \right] dV .$$

Поскольку объем V был выбран произвольно,

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{v}(\nabla\vec{v}) = -\nabla p + \rho\vec{f} .$$

Воспользовавшись уравнением неразрывности (1.2), получаем

$$\vec{v} \frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{v}(\nabla\vec{v}) = 0 ,$$

и окончательно имеем

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{f} .$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Доказать, что для векторного поля $\vec{A}$ справедливо соотношение:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v}\nabla)\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} .$$

1.2. Вычислить градиент скалярного центрально-симметричного поля $U = f(|\vec{r}|)$.

Ответ: $\nabla U = \dfrac{df}{dr}\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

1.3. Используя теорему Гаусса-Остроградского, получить формулы Грина.

1.4. Доказать, что потенциальное поле является безвихревым.

1.5. Доказать, что вихревое поле не содержит источников.

1.6. Доказать, что поле скорости $\vec{V} = 2xz\vec{I}_x + y^2\vec{I}_y + x^2\vec{I}_z$ потенциально, и найти его потенциал φ.

Ответ: $\varphi = x^2 z + \dfrac{y^3}{3} + \varphi_0$, где $\varphi_0 = \varphi(0,0,0)$.

1.7. Показать, что для якобиана преобразования от эйлеровых координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ к лагранжевым $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ $J = \dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$ справедливо следующее соотношение:

$$\frac{dJ}{dt} = J div\vec{v},$$

где $div\vec{v} = \dfrac{\partial v_k}{\partial x_k}$ (по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование).

1.8. Пользуясь решением предыдущей задачи, получить следующее выражение для субстанциональной производной по времени от интеграла от произвольной скалярной (или векторной) функции Φ по некоторому объему V, состоящему из одних и тех же частиц, т.е. движущемуся вместе с жидкостью:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \Phi dV = \iiint_V \left[\frac{d\Phi}{dt} + \Phi div\vec{v}\right] dV.$$

1.9. Доказать, что поле скорости несжимаемой жидкости соленоидально:

$$div\vec{v} = 0.$$

1.10. Записать уравнение неразрывности в цилиндрической и сферической системах координат.

1.11. Масса жидкости движется так, что каждая частица описывает окружность, перпендикулярную к постоянной оси и с центром на ней. Показать, что уравнение неразрывности принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial \theta} = 0,$$

где ω - угловая скорость для частицы, положение которой определяется цилиндрическими координатами r, θ, z.

1.12. Масса жидкости движется так, что траектории частиц расположены на поверхностях коаксиальных цилиндров. Записать уравнение неразрывности.

Ответ: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$

1.13. Частицы жидкости движутся в плоскости, проходящей через ось z. Записать уравнение неразрывности.

Ответ: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} + \dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$

1.14. Частицы жидкости движутся в пространстве симметрично по отношению к неподвижному центру так, что скорость каждой частицы направлена либо от центра, либо к нему и зависит только от расстояния r от центра. Записать уравнение неразрывности.

Ответ: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial \rho}{\partial r} + \dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial(v_r r^2)}{\partial r} = 0.$

1.15. Траектории частиц жидкости расположены на конусах, коаксиальных с осью z и имеющих общую вершину. Показать, что уравнение неразрывности в сферических координатах можно записать в виде:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r}+\frac{2\rho v_r}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi}=0.$$

1.16. Пусть существует функция φ такая, что $\vec{v}=grad\varphi$. Написать уравнение неразрывности для потенциального движения сжимаемой и несжимаемой среды в виде уравнения для потенциала φ.

Ответ: Для несжимаемой среды: $\Delta\varphi=0$; для сжимаемой среды: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\nabla\varphi)$=0.

1.17. Записать уравнение неразрывности для одномерных движений с плоской, цилиндрической и сферической симметрией.

Указание: При таких движениях все параметры зависят лишь от одной пространственной переменной r и времени t, причем поверхности r = const в первом случае - плоскости, во втором - цилиндры, в третьем - сферы; кроме того, для скорости отлична от нуля только составляющая вдоль координатной линии r.

Ответ: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^n}\frac{\partial(\rho v_r r^n)}{\partial r}=0$, где n=0,1,2 соответственно для движений с плоской, цилиндрической и сферической симметрией.

1.18. Записать уравнение Эйлера в цилиндрической и сферической системах координат.

1.19. Используя векторное тождество $(\vec{v}\nabla)\vec{v}=\frac{1}{2}\nabla v^2-[\vec{v},rot\vec{v}]$, преобразовать уравнение Эйлера к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{v}=rot[\vec{v},rot\vec{v}].$$

1.20. Записать уравнение Эйлера в форме Громэко - Лэмба:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad\left(\frac{v^2}{2} + w - gz\right) = [\vec{v}, rot\vec{v}],$$

где w - функция энтальпии, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения.

1.21. Показать, ограничиваясь одномерным течением идеальной жидкости, что в Лагранжевых переменных a, t, где a - x-координата частиц жидкости в некоторый начальный момент времени $t = t_0$, уравнение неразрывности и уравнение Эйлера имеют следующий вид:

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = \rho_0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial a}\right)_t,$$

где $\rho_0 = \rho(a)$ - заданное начальное распределение плотности.

1.22. Получить закон изменения энергии единицы объема жидкости в дифференциальной и интегральной форме.

1.23. Получить закон изменения импульса единицы объема жидкости в дифференциальной и интегральной форме.

1.24. Баротропный газ, подчиняющийся закону Бойля - Мариотта ($p = k\rho$), движется при постоянной температуре по прямолинейной трубке постоянного поперечного сечения. Пренебрегая влиянием силы тяжести, вывести дифференциальное уравнение для скорости v, считая, что она во всех точках одного и того же поперечного сечения в момент времени t одинакова и направлена вдоль трубки.

Ответ: $$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(2v\frac{\partial v}{\partial t}+v^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

1.25. Показать, что для сжимаемой жидкости, подчиняющейся закону Бойля - Мариотта ($p=k\rho$), которая движется по прямолинейной трубке постоянного поперечного сечения так, что скорость частиц жидкости во всех точках одного и того же поперечного сечения в момент времени t одинакова и направлена вдоль трубки, справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(v^2+k\right)\rho\right].$$

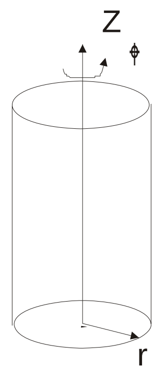
Влиянием силы тяжести пренебречь.

1.26. Дано поле скорости: $v_x=\dfrac{x}{1+t}$, $v_y=\dfrac{2y}{1+t}$, $v_z=\dfrac{3z}{1+t}$.

Найти компоненты ускорения.

Ответ: $\dfrac{dv_x}{dt}=0$, $\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{2y}{(1+t)^2}$, $\dfrac{dv_z}{dt}=\dfrac{6z}{(1+t)^2}$.

1.27. Цилиндрический стакан радиуса R с несжимаемой однородной жидкостью плотности ρ вращается в поле силы тяжести с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси. Уровень жидкости в стакане при $\Omega=0$ равен $H(\Omega=0)=H_0$. Помещая начало цилиндрической системы координат в нижней точке оси вращения, определить распределение давления жидкости $p(r,z)$, форму свободной поверхности $z(r)$ и полную силу давления на дно сосуда F. Атмосферное давление p_a.



Ответ: $p(r,z) = p_a + \rho g(H_0 - z) + \dfrac{\rho\Omega^2}{4}(2r^2 - R^2)$,

$$z(r) = H_0 + \frac{\Omega^2}{4g}(2r^2 - R^2),$$

$$F = \pi R^2(p_a + \rho g H_0).$$

1.28. При каком условии свободная поверхность жидкости в задаче 1.30 пересекает дно сосуда?

Ответ: $\Omega^2 a^2 / 4g > H_0$.

При этом свободная поверхность пересекает дно сосуда при $r = r_1$, где $r_1^2 = R^2\left(1 - \sqrt{H_0/H_*}\right)$, $\quad H_* = \Omega^2 a^2 / 4g$.

Тогда при $r > r_1$

$$p = p_a + \rho g\left[\frac{2H_*(r^2 - r_1^2)}{R^2} - z\right],$$

$$z(r) = \frac{2H_*(r^2 - r_1^2)}{R^2}.$$

А при $r \le r_1 \quad p = p_a, \quad z(r) = 0$.

Контрольные вопросы

1. Понятие «сплошности» среды.
2. Эйлеров способ описания движения жидкости.
3. Лагранжев способ описания движения жидкости.
4. Понятие субстанциальной и локальной производной.

2. Гидростатика

Рассмотрим случай покоящейся жидкости. Из уравнения Эйлера (1.1), положив $\vec{v} = 0$, получим уравнение гидростатики

$$\nabla p = \rho \vec{f} \, . \qquad (2.1)$$

При этом, если внешние силы потенциальны ($\vec{f} = -\nabla U$), то уравнение (2.1) принимает вид $\nabla p = -\rho \nabla U$. Заметим, что последнее уравнение имеет решение только в том случае, когда векторы $\nabla \rho$ и ∇U параллельны.

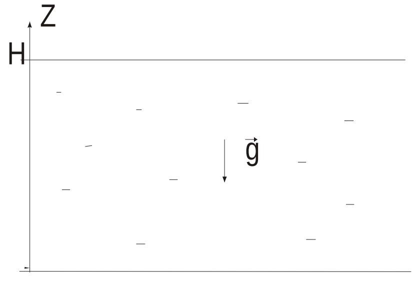
Примером потенциальной силы является сила тяжести. При этом $U = gz$ (ось z направим вертикально вверх). И уравнение, описывающее механическое равновесие жидкости (газа) в поле силы тяжести, выглядит следующим образом:

$$\nabla p = \rho \vec{g} \, . \qquad (2.2)$$

Поскольку $\left[\nabla \rho, \vec{g} \right] = 0$, то ρ и p являются функциями координаты z, а они, в свою очередь, однозначно определяют температуру. Следовательно, при механическом равновесии в поле силы тяжести распределения давления, температуры и плотности зависят только от высоты.

Примеры решения задач

1. Найти распределение давления в покоящейся тяжелой несжимаемой однородной жидкости, занимающей область $0 \le z \le H$, на свободной поверхности которой ($z = H$) действует атмосферное давление $p(z = H) = p_a$.



Решение: Запишем уравнение гидростатики (2.2). Направим ось z декартовой системы координат вертикально вверх. В проекциях на оси декартовой системы координат уравнение (2.2) примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g .$$

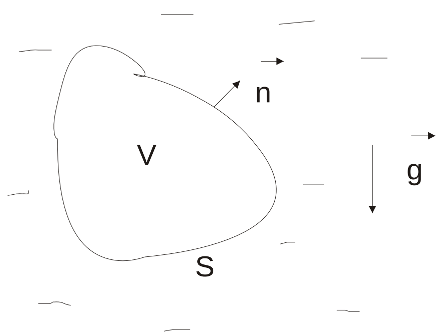
Поскольку по условию задачи $\rho = const$, то

$$p = -\rho g z + const .$$

Постоянная интегрирования определяется из граничного условия: $p|_{z=H} = p_a = -\rho g H + const$. Следовательно, $const = p_a + \rho g H$, и при произвольном z давление определяется формулой

$$p = p_a + \rho g (H - z).$$

2. Доказать, что на тело, погруженное в тяжелую идеальную однородную неподвижную жидкость, со стороны жидкости действует подъемная сила, равная весу жидкости, вытесненной этим телом (закон Архимеда).



Решение: Рассмотрим произвольное тело объемом V, ограниченное поверхностью S, помещенное в идеальную однородную жидкость, находящуюся в поле силы тяжести. Со стороны жидкости на элемент поверхности тела dS действует сила $d\vec{F} = -p\vec{n}dS$, где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности. Полная сила, действующая на тело со стороны окружающей жидкости равна

$$\vec{F} = -\oiint_S p\vec{n}dS .$$

Согласно следствию из теоремы Гаусса-Остроградского $\oiint\limits_S p\vec{n}dS = \iiint\limits_V \nabla p dV$, следовательно, $\vec{F} = -\iiint\limits_V \nabla p dV$. Воспользуемся уравнением гидростатики (2.2) и условием однородности жидкости: $\rho = const$, окончательно получаем:

$$\vec{F} = -\rho\vec{g}\iiint\limits_V dV = -\rho\vec{g}V ,$$

что и требовалось доказать.

3. Определить зависимость давления идеального газа от высоты в поле силы тяжести в приближении изотермической атмосферы.

Решение: Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$p = \frac{R}{\mu}\frac{m}{V}T = \frac{R}{\mu}\rho T ,$$

где R - универсальная газовая постоянная, μ - молярная масса газа.

Для изотермической атмосферы ($T = const$) проекция уравнения гидростатики (2.2) на вертикальную ось z, направленную вверх, будет иметь вид:

$$\frac{RT}{\mu}\frac{d\rho}{dz} = -g\rho .$$

Следовательно, плотность атмосферы спадает по экспоненциальному закону с высотой

$$\rho = \rho_0 \exp\left\{-\frac{\mu g}{RT}z\right\} ,$$

и для давления получаем известную барометрическую формулу:

$$p = p_0 \exp\left\{-\frac{\mu g}{RT} z\right\},$$

здесь ρ_0 и p_0 - соответственно плотность и давление атмосферы при $z = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Написать замкнутую систему уравнений для покоящейся идеальной несжимаемой жидкости (уравнения гидростатики).

2.2. Вывести формулу для давления p на глубине h в жидкости с плотностью $\rho = const$, если жидкость вместе с сосудом движется:

а) с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх;

б) с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз;

в) с ускорением $\vec{g}$, направленным вниз.

Ответ: а) $p = p_a + \rho(g + a)h$;

б) $p = p_a + \rho(g - a)h$;

в) $p = p_a$.

2.3. Сосуд с жидкостью, находящийся в покое, получает на горизонтальной поверхности ускорение $\vec{a}$ вправо. Под каким углом к горизонту будет располагаться поверхность жидкости?

Ответ: $\theta = arctg(a/g)$.

2.4. С какой силой действует вода на прямоугольную плотину высотой h и шириной b, когда водохранилище заполнено водой доверху?

Ответ: $F = \frac{1}{2}\rho g h^2 b$.

2.5. Найти силу $\vec{F}$, действующую на квадратную стенку аквариума, до краев заполненного водой. На какой высоте H от дна находится точка приложения этой силы?

Ответ: $\vec{F} = \vec{n}\dfrac{\rho g a^3}{2}$, $\quad H = \dfrac{a}{3}$, где a - длина стороны квадрата, $\vec{n}$ - вектор нормали к стенке.

2.6. Уровень воды за плотиной постоянной ширины b находится на высоте H. Докажите, что обусловленный силой давления вращающий момент, действующий на плотину, имеет плечо $H/3$. Какую минимальную постоянную толщину d должна иметь свободно стоящая бетонная плотина высотой H, чтобы не опрокинуться? Плотность бетона ρ_0.

Ответ: $d = H\left(\rho/3\rho_0\right)^{1/2}$.

2.7. Определить зависимость давления идеального газа от высоты в поле силы тяжести, если температура газа изменяется по закону $T = T(z)$. Рассмотреть частные случаи:

а) $T = T_0(1 - z/H)$, $z < H$;

б) $T = T_0(1 - z^2/H^2)$, $z < H$.

Ответ: $p = p_0 \exp\left\{-\dfrac{g\rho_0 T_0}{p_0}\int\limits_0^z \dfrac{dz}{T(z)}\right\}$,

а) $p = p_0\left(1 - z/H\right)^{g\rho_0 H/p_0}$;

б) $p = p_0\left[\dfrac{1 - z/H}{1 + z/H}\right]^{g\rho_0 H/2p_0}$.

2.8. Найти распределение давление и плотности в политропной атмосфере, для которой давление p и плотность ρ связаны соотношением $p = p_0 \left(\rho \middle/ \rho_0 \right)^{\gamma}$, $\gamma > 1$. Определить высоту атмосферы.

Ответ: $p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} gz \right)^{\gamma / \gamma - 1}$,

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0 g}.$$

2.9. Определить зависимость давления внутри Земного шара от расстояния до центра, считая вещество Земли однородной несжимаемой жидкостью плотности ρ и пренебрегая вращением Земли. Оценить в том же приближении давление в центре Земли $p_ц$. Гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 / c^2 кг$, радиус Земли $R = 6400 км$, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g_0 = 9.81 м / c^2$, атмосферное давление $p_a = 10^5 Па$.

Ответ: $p(r) = p_a + \frac{g_0 \rho}{2R} \left(R^2 - r^2 \right)$,

$$p_ц = p_a + \frac{3 g_0^{\ 2}}{8 \pi G} \approx 10^6 атм.$$

2.10. Рассчитать полную массу Земной атмосферы, считая ее изотермической и пользуясь известными значениями давления p_0 и плотности ρ_0 на уровне моря.

Ответ: $m = \frac{4 \pi p_0}{g} \left[R^2 + \frac{2 p_0}{g \rho_0} \left(R + \frac{p_0}{g \rho_0} \right) \right]$.

2.11. Баротропная жидкость описывается уравнением состояния $p = \lambda \rho^k$, где λ и k - постоянные. Жидкость остается в покое в поле силы тяжести, действующей в направлении оси z. Найти зависимость $p = p(z)$, если $p = p_0$ при $z = 0$.

Ответ: $p = \left[p_0^{\frac{k-1}{k}} + \frac{k-1}{k} g\lambda^{-\frac{1}{k}} z \right]^{\frac{k}{k-1}}$.

2.12. Полусфера радиуса R с вертикальной осью наполнена до краев жидкостью плотности ρ. Определить результирующую силу давления на четверть полусферы, отсекаемую двумя вертикальными взаимно перпендикулярными плоскостями.

Ответ: $F = \frac{\rho g R^3}{6}\sqrt{8+\pi^2}$.

2.13. Показать, что при малом смещении элемента воды из своего равновесного положения вниз или вверх в океане с постоянной стратификацией

- он будет совершать колебания с частотой Брента-Вяйсяля $N = \left[\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right]^{1/2}$, если $\frac{d\rho}{dz} > 0$ (ось z направлена вниз, g - ускорение свободного падения, ρ - плотность воды);
- его отклонение экспоненциально растет, т.е. механическое равновесие жидкости является неустойчивым (конвективная неустойчивость), если $\frac{d\rho}{dz} < 0$.

Контрольные вопросы

1. Уравнение гидростатики.
2. Условие гидродинамического равновесия.
3. Частота Брента – Вяйсяля.

3. Уравнение Бернулли и закон сохранения импульса

Уравнение, полученное Даниилом Бернулли в 1738 году и носящее его имя, проще всего вывести из уравнения Эйлера, датированного 1757 годом. Для этого запишем уравнение (1.1) в форме Громэко - Лэмба:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+grad\left(\frac{v^2}{2}+w-gz\right)=\left[\vec{v},rot\vec{v}\right], \tag{3.1}$$

где w - функция энтальпии, а направление оси z совпадает с направлением вектора $\vec{g}$. Рассмотрим частные случаи.

- Если движение стационарное $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$ и безвихревое (потенциальное) $rot\vec{v}=0$, то

$$\frac{v^2}{2}+w-gz=const, \tag{3.2}$$

причем постоянная сохраняется во всем потоке. Если при этом жидкость однородна и несжимаема, то получаем классическое уравнение, предложенное Д. Бернулли для описания стационарного потенциального движения однородной несжимаемой жидкости:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}-gz=const, \tag{3.3}$$

- Если движение жидкости стационарное и вихревое $rot\vec{v}\neq 0$, то

$$\frac{v^2}{2}+w-gz=const_l, \tag{3.4}$$

при этом постоянная различна для разных линий тока. Напомним, что линией тока называют линию, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором скорости $\vec{v}$ в этой точке.

- Если движение нестационарное $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$ и безвихревое $rot\vec{v} = 0$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w - gz = F(t), \tag{3.5}$$

где φ - потенциал скорости $(\vec{v} = \nabla \varphi)$, $F(t)$ - произвольная функция времени.

Для вывода закона сохранения импульса, рассмотрим импульс единицы объема $\rho \vec{v}$ и найдем производную по времени от его i-ой компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{3.6}$$

Из уравнения Эйлера (1.1) следует, что первое слагаемое уравнения (3.6) равно $f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$, где f_i - внешняя сила, действующая на единицу объема. Второе слагаемое в (3.6) несложно получить из уравнения неразрывности (1.2): $-v_i \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$. Вводя тензор плотности потока импульса $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$, где δ_{ik} - символ Кронекера, выражение (3.6) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = f_i - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{3.7}$$

здесь по дважды встречающемуся индексу подразумевается суммирование. Теперь проинтегрируем равенство (3.7) по произвольному фиксированному объему V, ограниченному поверхностью S с внешней нормалью $\vec{n}$, используя теорему Гаусса-Остроградского:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho v_i dV = \iiint\limits_V f_i dV - \oiint\limits_S \Pi_{ik} n_k dS. \tag{3.8}$$

Таким образом, изменение импульса в объеме V связано с действием внешних объемных сил и потоком импульса через граничную поверхность S. В векторном виде выражение (3.8) можно представить следующим образом:

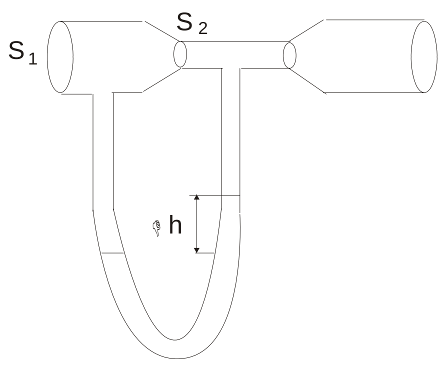
$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho\vec{v} dV = \iiint\limits_V \vec{f} dV - \oiint\limits_S \left(p\vec{n} + \rho\vec{v}(\vec{v}\vec{n})\right) dS. \tag{3.9}$$

Если движение жидкости стационарно и отсутствуют массовые силы, то поток тензора плотности импульса через любую взятую в жидкости замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oiint\limits_S \left(p\delta_{ik} + \rho v_i v_k\right) n_k dS = 0. \tag{3.10}$$

Примеры решения задач

1. Несжимаемая однородная жидкость плотности ρ движется по трубке переменного сечения (площади поперечных сечений S_1 и S_2 известны). С трубкой соединен манометр U-образной формы, содержащий ртуть плотности ρ_{pm} (трубка Вентурра). Разность уровней ртути в манометре Δh. Определить скорость течения жидкости по трубе.



Решение: Обозначим p_1, v_1 соответственно давление и скорость жидкости в трубе с поперечным сечением S_1, а в сечении S_2 - p_2 и v_2 (см. рисунок). Выберем линию тока из сечения S_1 в сечение S_2, вдоль нее будет справедливо уравнение Бернулли:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}.$$

Из закона сохранения массы жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени следует, что

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Решая эти два уравнения относительно v_1, получаем:

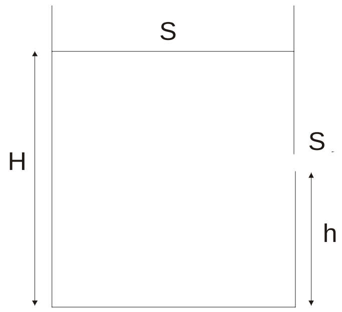
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right]}}.$$

Поскольку разность уровней ртути в манометре измеряет разность давлений $p_1 - p_2 = \rho_{pm} g \Delta h$, окончательно имеем:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_{pm} g \Delta h}{\rho\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right]}}.$$

2. Найти скорость v_0 истечения тяжелой несжимаемой жидкости из малого отверстия в стенке широкого сосуда. Считать, что давление на свободной поверхности и в струе жидкости на выходе из сосуда равно атмосферному - p_a, а площадь свободной поверхности S много больше площади отверстия

S_0. Уровень жидкости в сосуде относительно дна - H, расстояние от отверстия до дна - h (см. рисунок).



Решение: Выбираем линию тока, идущую от поверхности к отверстию. На поверхности и в струе непосредственно за отверстием давление одинаково - p_a, а скорость снижения уровня жидкости в сосуде пренебрежимо мала ($v \approx 0$), поскольку $S_0 << S$. Направим ось z вертикально вверх, т.е. против направления вектора ускорения свободного падения $\vec{g}$. При таких условиях уравнение Бернулли принимает вид:

$$\frac{p_a}{\rho} + gH = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_a}{\rho} + gh,$$

откуда следует известная формула Торричелли

$$v_0 = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Для стационарного течения жидкости показать, что уравнение Бернулли является следствием законов сохранения энергии и массы жидкости, протекающей по трубке тока.

3.2. Показать, что для равновесных обратимых изэнтропических процессов справедливо следующее соотношение: $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla w$.

3.3. Чему равна скорость вытекающей из сосуда жидкости (см. условие предыдущей задачи), если учесть скорость снижения уровня воды в сосуде? Определить расстояние L, на котором вытекающая жидкость достигнет плоскости основания сосуда. При каком $h = h^*$ это расстояние будет максимальным?

Ответ: $v_0 = \sqrt{\dfrac{2g(H-h)}{1-\dfrac{S_0^2}{S^2}}}$;

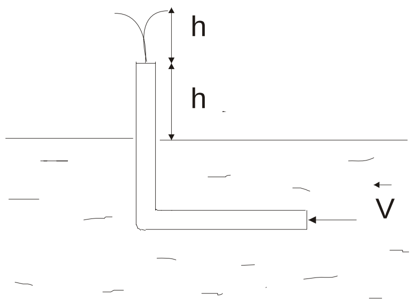
$$L = 2\sqrt{\dfrac{h(H-h)}{1-\dfrac{S_0^2}{S^2}}};$$

$$h^* = H/2.$$

3.4. Почему струя воды из крана сужается книзу?

3.5. Струя воды из крана сужается книзу. Выведите формулу для диаметра струи в зависимости от расстояния от крана. Начальная скорость вытекающей воды - v_0, диаметр отверстия крана - D.

3.6. Изогнутую трубку опустили в поток воды как показано на рисунке. Скорость потока $v = 2.5 м/с$. Закрытый верхний конец имеет небольшое отверстие и находится на высоте $h_0 = 12 см$. На какую высоту h поднимется струя воды, вытекающая из отверстия?



Ответ: $h = \dfrac{v^2}{2g} - h_0 = 20 см$.

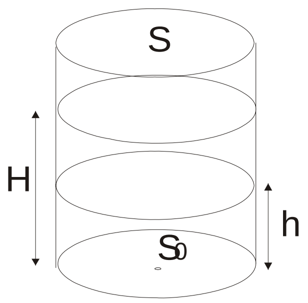
3.7. Чему равна подъемная сила крыла, обусловленная эффектом Бернулли, если площадь крыла равна S_0, а скорости потока над крылом и под ним равны соответственно v_1 и v_2?

3.8. Чему рана скорость истечения газов из сопла ракеты? Плотность газа - ρ, давление газа внутри ракеты - p, атмосферное давление - p_a. Площадь сопла S_0 много меньше площади поперечного сечения S камеры сгорания. Чему равна тяга двигателя, создаваемая выходящими из ракеты газами?

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{2(p - p_0)}{\rho}}$,

$$F = 2S_0(p - p_0)$$

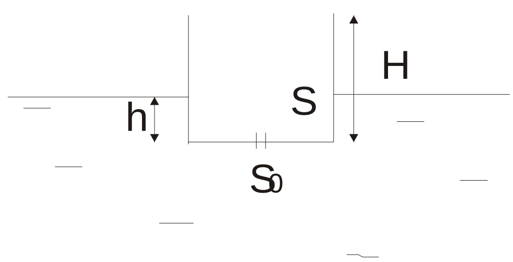
3.9. В вертикально стоящий цилиндрический сосуд налита идеальная жидкость до уровня H относительно дна сосуда. Площадь дна сосуда равна S. Определить время t, за которое уровень жидкости в сосуде опустится до высоты h относительно дна сосуда, если в дне сосуда сделано малое отверстие площадью S_0. Определить также время T, за которое из сосуда выльется вся жидкость.



Ответ: $t = \sqrt{\dfrac{2}{g}}\sqrt{\left(\dfrac{S}{S_0}\right)^2 - 1}\left[\sqrt{H} - \sqrt{h}\right]$;

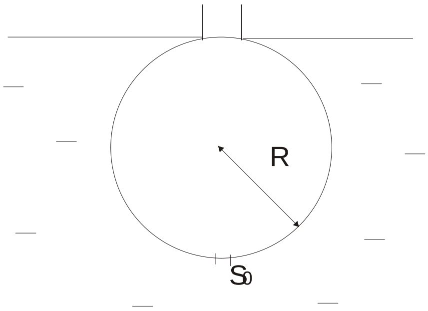
$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\sqrt{\left(\frac{S}{S_0}\right)^2 - 1}\,.$$

3.10. Прямоугольная коробка плавает на поверхности воды, погружаясь под действием собственного веса на глубину h. Площадь дна коробки равна S, высота - H. Через какое время коробка утонет, если в центре ее дна проделать малое отверстие площадью S_0 и с помощью боковых направляющих сохранять неизменной ориентацию коробки?



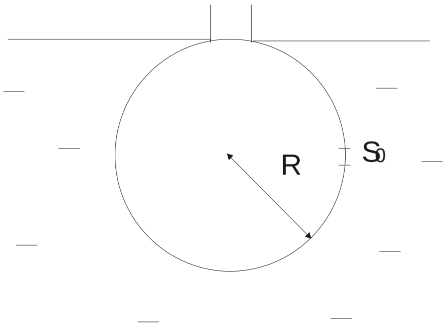
Ответ: $t = \frac{S}{S_0} \frac{H-h}{\sqrt{2gh}}$.

3.11. Через какое время наполнится водой шаровая колба радиусом R, если в центре ее нижнего основания сделано малое отверстие площадью S_0? Колба погружена в воду до нижнего основания ее горлышка и жестко закреплена.

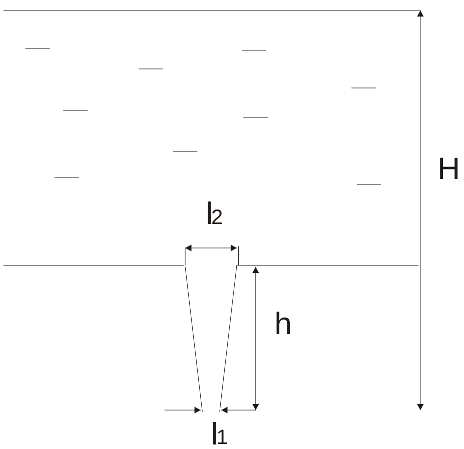


Ответ: $t = \frac{16}{15} \frac{\pi R^2}{S_0} \sqrt{\frac{R}{g}}$

3.12. Через какое время наполнится водой шаровая колба радиусом R, если в центре ее боковой поверхности сделано малое отверстие площадью S_0? Колба погружена в воду до нижнего основания ее горлышка и жестко закреплена. Интересно сравнить результат с ответом предыдущей задачи.



3.13. В широкий сосуд с плоским дном налита идеальная жидкость. В дне сосуда сделана узкая и длинная щель, в которую вставлена насадка, образованная двумя плоскостями, наклоненными друг к другу под малым углом. Расстояние между ними в нижней части насадки равно l_1, а в верхней - l_2. Определить распределение давления жидкости в насадке, если атмосферное давление равно p_a, длина насадки - h, расстояние между нижним концом насадки и уровнем жидкости - H.



Ответ: $p = p_a - \rho g x + \rho g H\left[1 - \left(\frac{hl_1}{hl_1 + x(l_2 - l_1)}\right)^2\right].$

3.14. Вода вытекает из широкого резервуара через вертикальную коническую трубу, вставленную в его дно. Длина трубы l, диаметр ее верхнего основания d_1, нижнего - d_2, $d_1 > d_2$. При каком уровне H воды в резервуаре давление в верхнем сечении трубы будет равно p, если атмосферное давление равно p_a.

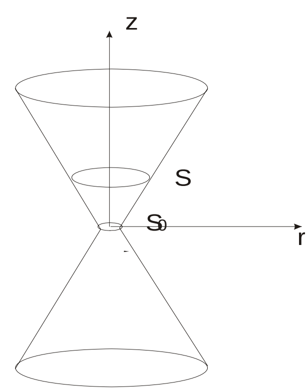
Ответ: $H = \dfrac{(p_a - p)/\rho g - l\left(d_2/d_1\right)^4}{1 - \left(d_2/d_1\right)^4}.$

3.15. Определить $S(z)$ - зависимость площади сечения сосуда от вертикальной координаты при условии, что скорость изменения уровня жидкости в сосуде $\frac{dz}{dt}$ при ее истечении через отверстие является постоянной. Коэффициент истечения жидкости через отверстие считать постоянным и равным K. Площадь отверстия S. Высота отверстия над нулевым уровнем z_0.

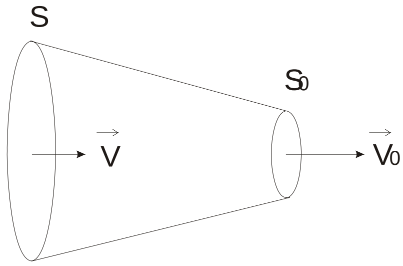
Ответ: $S(z) = \dfrac{KS\sqrt{2g}}{\frac{dz}{dt}}\sqrt{z - z_0}.$

3.16. Определить форму сосуда, употребляемого для водяных часов (клепсидры). Скорость опускания уровня считать постоянной и равной v. Площадь отверстия S_0.

Ответ: $r(z) = \sqrt[4]{\dfrac{S_0^2}{\pi^2} + \dfrac{2gS_0^2 z}{\pi^2 v^2}}.$



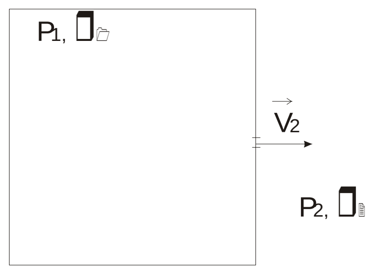
3.17. При установившемся истечении газа из тонкой конической трубки траектории частиц представляют собой прямые, сходящиеся в вершине конуса. Предполагая, что движение совершается изотермически ($p = k\rho$), найти соотношение между скоростями V и V_0 в сечениях, площади которых S и S_0.



Ответ: $S_0 V_0 e^{-V_0^2/2k} = SVe^{-V^2/2k}$.

3.18. Показать, что при установившемся течении идеальной жидкости (газа) в тонкой трубке тока величина ρVS во всех сечениях одинакова. Здесь ρ - плотность, V - скорость, S - площадь поперечного сечения.

3.19. Газ (идеальная жидкость) плотности ρ_1, находящийся в сосуде под давлением p_1, адиабатически вытекает через малое отверстие в стенке сосуда. Определить скорость истечения газа, если давление в окружающей среде равно p_2, плотность - ρ_2.



Ответ: $V_2^2 = \dfrac{2\gamma}{\gamma - 1}\left[\dfrac{p_1}{\rho_1} - \dfrac{p_2}{\rho_2}\right]$,

где γ - показатель адиабаты.

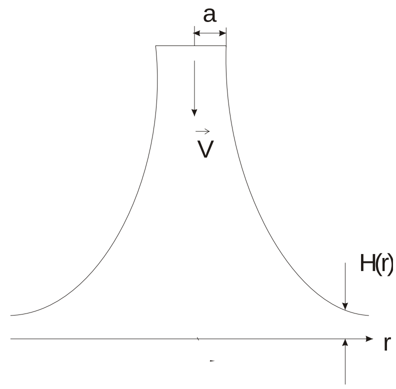
3.20. Выразить скорость истечения газа в предыдущей задаче через скорость звука в газе.

Ответ: $V_2^2 = 2\left(c_1^2 - c_2^2\right)/(\gamma - 1)$.

3.21. Найти массу газа, вытекающего в единицу времени $\frac{dm}{dt}$ через отверстие площадью S_0 в условиях задачи 3.21. Коэффициент истечения газа равен единице.

Ответ: $\frac{dm}{dt} = \rho_1 c_1 S_1 \left[\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}}$.

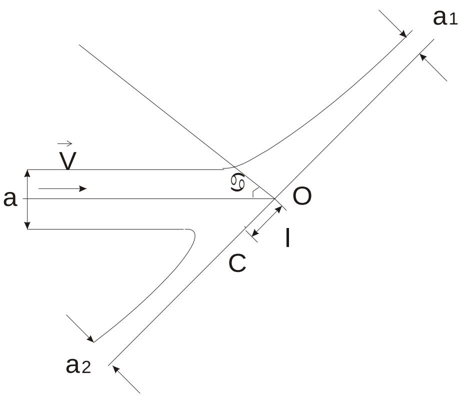
3.22. На горизонтальную поверхность вертикально падает круглая струя радиуса a со скоростью v. После падения струя растекается по горизонтальной плоскости. Пренебрегая влиянием силы тяжести, определить скорость растекания струи, толщину струи H в зависимости от r и силу избыточного давления струи на стенку F.



Ответ: $H(r) = a^2 / 2r$

$$F = \rho v^2 \pi a^2 .$$

3.23. Плоская струя воды ширины a, текущая со скоростью v, одинаковой для всех точек поперечного сечения, встречается под углом α с плоской бесконечной пластиной и разветвляется на две струи, линии тока которых по мере удаления от места разветвления асимптотически становятся параллельными пластине. Определить ширину этих струй a_1 и a_2 на бесконечности, полную силу избыточного давления струи на стенку F и расстояние l от точки O пересечения пластинки с осью неразветвленной струи до центра давления C.



Ответ: $a_1 = \frac{1}{2}a\left(1+\sin\alpha\right), \quad a_2 = \frac{1}{2}a\left(1-\sin\alpha\right),$

$$F = \rho v^2 a\cos\alpha,$$

$$l = \frac{1}{2}atg\alpha.$$

3.24. Газ, находящийся в сосуде под давлением p_0, адиабатически вытекает через малое отверстие радиуса a в стенке сосуда. Давление в окружающей среде p, перемешивания с воздухом не происходит. Далее струя газа ударяется о плоскую стенку, расположенную перпендикулярно к струе, и растекается по ней. Найти силу избыточного давления струи на стенку.

Указание: воспользоваться решениями задач 3.21 и 3.24.

3.25. Идеальная однородная несжимаемая жидкость плотности ρ вытекает из широкого резервуара через плоскую насадку. Ширина насадки a_0, расположена она под углом α к горизонту на высоте h относительно земли. Уровень жидкости в резервуаре H относительно земли. После удара о землю струя жидкости разветвляется на две струи, линии тока которых по мере удаления от места разветвления становятся горизонтальными. Определить ширину струй a_1 и a_2.

Указание: для нахождения скорости движения жидкости на разной высоте использовать уравнение Бернулли.

Контрольные вопросы

1. Закон сохранения импульса.
2. Тензор плотонсти потока импульса и его представление в декартовой системе координат.
3. Уравнение Бернулли для стационарного случая.
4. Уравнение Бернулли для нестационарного случая.

4. Потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости

Для описания движения идеальной несжимаемой жидкости запишем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g},$$

$$div\vec{v} = 0.$$

Используя векторное тождество $(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2} grad v^2 - \vec{v} \times rot\vec{v}$ в уравнении Эйлера, и применив к нему операцию rot, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{v} = rot\left[\vec{v}, rot\vec{v}\right],$$

$$div\vec{v} = 0.$$

Если движение жидкости потенциальное, то $rot\vec{v} = 0$, и система принимает вид:

$$rot\vec{v} = 0,$$

$$div\vec{v} = 0.$$

Введем потенциал скорости Φ: $\vec{v} = grad\Phi$. Тогда имеем

$$rotgrad\Phi = 0,$$

$$divgrad\Phi = 0.$$

Таким образом, решение задач о потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости сводится к решению одного скалярного уравнения

$$\Delta\Phi = 0 \tag{4.1}$$

с учетом граничных условий. Уравнение (4.1) носит название уравнения Лапласа, хотя еще Д'Аламбер и Эйлер в 1761 году занимались решением подобных уравнений для задач гидродинамики. При соприкосновении идеальной жидкости с твердым телом должно выполняться так называемое граничное условие «непроникания»:

$$\vec{v}\vec{n}\Big|_S = 0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = 0, \tag{4.2}$$

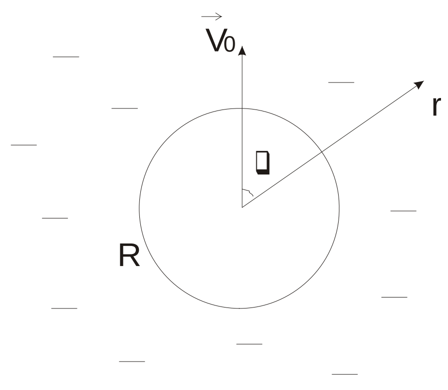
если тело покоится ($\vec{n}$ - нормаль к поверхности раздела), и

$$\vec{v}\vec{n}\Big|_S = \vec{v}_0\vec{n} \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = \vec{v}_0\vec{n}, \tag{4.3}$$

если тело движется со скоростью $\vec{v}_0$.

Примеры решения задач

1. Сфера радиуса R движется с постоянной скоростью $\vec{V}_0$ в идеальной несжимаемой жидкости. Поставить краевую задачу для уравнения Лапласа. Получить выражение для потенциала Φ и скорости частиц жидкости $\vec{v} = grad\Phi$.



Решение: Воспользуемся сферической системой координат (r,θ,φ), начало которой в данный момент времени совпадает с центром сферы, угол θ будем отсчитывать от направления вектора скорости $\vec{V}_0$. Запишем уравнение Лапласа:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0.$$

В силу симметрии решение задачи не должно зависеть от азимутального угла φ, следовательно,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)=0.$$

Для корректного решения задачи необходимо поставить два граничных условия:

1. $\vec{v}\big|_{r\to\infty}=0$,
2. $\left.\dfrac{(\vec{v}\vec{r})}{r}\right|_{r=R}=\left.\dfrac{(\vec{V}_0\vec{r})}{r}\right|_{r=R}$.

Первое из них отражает тот факт, что частицы жидкости на бесконечности остаются в покое, второе – это граничное условие “непроникания” (4.3) – равенство нормальных к поверхности сферы составляющих скорости частиц жидкости и точек сферы.

Для функции потенциала скорости Φ граничные условия можно переписать следующим образом:

1. $\Phi\big|_{r\to\infty}=const$,
2. $\left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=R}=V_0\cos\theta$.

Решение для функции потенциала будем искать в виде $\Phi(r,\theta)=U(r)\cos\theta$, поскольку при этом автоматически выполняется граничное условие на поверхности шара. Подставляя данный вид $\Phi(r,\theta)$ в уравнение Лапласа, получаем уравнение для функции $U(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)-2U=0.$$

Это уравнение решаем, полагая $U \sim r^k$. Несложно получить, что для данной задачи $k_1=1$, $k_2=-2$. Следовательно, $U=Ar+\frac{B}{r^2}$, где A и B - постоянные, которые необходимо определить из граничных условий.

Поскольку $\Phi=\left(Ar+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$, из первого граничного условия следует, что $A=0$, из второго находим: $B=-\frac{V_0R^3}{2}$. Таким образом,

$$\Phi(r,\theta)=-\frac{V_0R^3}{2r^2}\cos\theta.$$

Для определения компонент вектора скорости, необходимо вспомнить, что $\vec{v}=grad\Phi=\vec{I}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\vec{I}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$. Тогда

$$v_r=\frac{V_0R^3}{r^3}\cos\theta,$$

$$v_\theta=\frac{V_0R^3}{2r^3}\sin\theta,$$

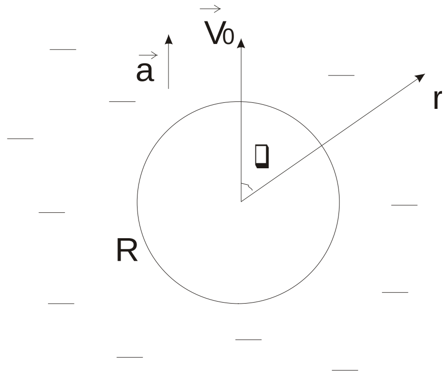
$$v_\varphi=0.$$

Ответ можно выразить через радиус-вектор $\vec{r}$:

$$\Phi=-\frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\left(\vec{V}_0\vec{r}\right);$$

$$\vec{v}=-\frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\vec{V}_0+\frac{3}{2}\frac{R^3}{r^3}\frac{\left(\vec{V}_0\vec{r}\right)\vec{r}}{r^2}.$$

2. Найти присоединенную массу шара радиуса R, движущегося равноускоренно в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ.



Решение: Введем понятие присоединенной массы. Пусть шар массой m движется с постоянным ускорением $\vec{a}$. Тогда в момент времени t его скорость равна $\vec{V}_0(t) = \vec{a}t$, при этом предполагается, что $V_0(t=0) = 0$. Путь, пройденный телом за это время, запишем как $L(t) = \dfrac{V_0^2(t)}{2a}$. Работа внешней силы F, идущая на повышение кинетической энергии шара и жидкости, находится следующим образом: $A(t) = F \cdot L(t) = \dfrac{FV_0^2(t)}{2a}$. Поскольку в начальный момент времени шар и жидкость покоились, то есть их суммарная кинетическая энергия была равна нулю, имеем:

$$\frac{FV_0^2}{2a} = \frac{mV_0^2}{2} + \iiint \rho \frac{v^2}{2} dV,$$

здесь v - скорость движения жидкости, а интегрирование ведется по всему объему жидкости (для данной задачи $r > R$). Отсюда следует, что силу F можно представить как

$$F = (m+M)a,$$

где $M = \dfrac{\rho}{V_0^2} \iiint v^2 dV$ - присоединенная масса.

Для вычисления присоединенной массы шара можно воспользоваться результатом решения задачи 4.6.

Ответ: $M = \dfrac{2}{3}\rho\pi R^3$.

3. Каково ускорение сферического газового пузырька в начале его всплытия в идеальной однородной тяжелой несжимаемой жидкости?

Решение: В начале всплытия на пузырек массы m действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила Архимеда $-m_1\vec{g}$ и сила сопротивления жидкости $-M\dfrac{d\vec{U}}{dt}$, где M - присоединенная масса пузырька, m_1 - масса жидкости в объеме пузырька. Уравнение его движения имеет вид:

$$(m+M)\frac{d\vec{U}}{dt}=(m-m_1)\vec{g},$$

следовательно,

$$\frac{d\vec{U}}{dt}=\vec{g}\,\frac{m-m_1}{m+M}.$$

Пренебрегая массой пузырька, приближенно получим, что $\dfrac{d\vec{U}}{dt}\approx -2\vec{g}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Доказать, что для того, чтобы движение идеальной баротропной жидкости было потенциальным (безвихревым), объемные силы должны иметь потенциал. Показать, что в этом случае уравнения движения имеют интеграл

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+W-U=C(t)\text{ -}$$

интеграл Коши-Лагранжа, где Φ - потенциал скорости: $\vec{v}=grad\Phi$, U - потенциал массовых сил: $\vec{F}=gradU$, $W=\int dp/\rho$, $C(t)$ - произвольная функция времени.

4.2. Сформулировать условия, при которых интеграл Коши-Лагранжа (см. предыдущую задачу) переходит в уравнение Бернулли.

4.3. Написать систему уравнений, определяющую потенциал скоростей φ и давление p при стационарном потенциальном течении однородной несжимаемой жидкости.

Ответ: $\Delta\Phi = 0$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left(grad\Phi\right)^2 + \dfrac{p}{\rho} - U = 0$.

4.4. Показать, что функция

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi r},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является потенциалом скорости несжимаемой жидкости, имеющим особенность в начале координат ($r = 0$). Изучить это движение, найти вектор скорости. Вычислить объем жидкости Q, протекающей за единицу времени через поверхность сферы радиуса r с центром в начале координат.

Указание: проверить, что при $r \neq 0$ функция Ф удовлетворяет уравнению Лапласа.

Ответ: $\vec{v} = \dfrac{q}{4\pi r^3}\vec{r}$, $Q = q$.

4.5. Доказать, что функция

$$\Phi = A(-x^2 - y^2 - 2z^2)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа. Найти компоненты скорости.

Ответ: $v_x = -2Ax$, $v_y = -2Ay$, $v_z = -4Az$.

4.6. Пусть поле скорости неограниченного объема идеальной несжимаемой жидкости обусловлено движением в ней твердого тела, форма и размеры которого известны.

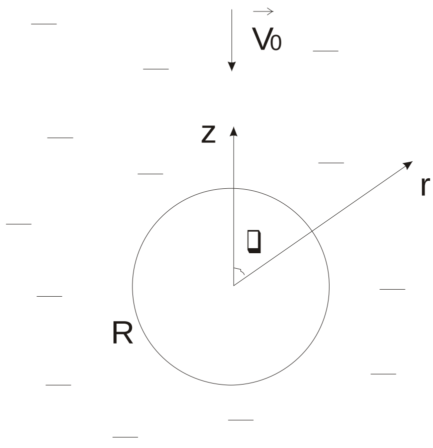
а) Сформулировать краевую задачу для потенциала поля скорости, считая, что движение потенциально и непрерывно всюду вне тела, а на бесконечности среда покоится.

б) Показать, что поле скоростей жидкости в каждый момент времени определяется только распределением скорости точек поверхности тела в этот момент и не зависит, например, от ускорения тела.

в) Справедливо ли свойство поля скорости, указанное в п. б), для давления?

Ответ: В каждый момент времени t значение φ определяется из решения внешней задачи Неймана всюду вне тела: $\Delta\varphi = 0$, $\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\right|_{dS} = \vec{U}\vec{n}$, $(grad\varphi)_\infty = 0$, где $\vec{U}$ - скорость поверхности тела dS, и поэтому зависит лишь от формы тела и нормальной составляющей скорости точек его поверхности. Последнее утверждение справедливо также для $\vec{v} = grad\varphi$, но в общем случае не справедливо для $\frac{d\vec{v}}{dt}$, а, следовательно, и для давления.

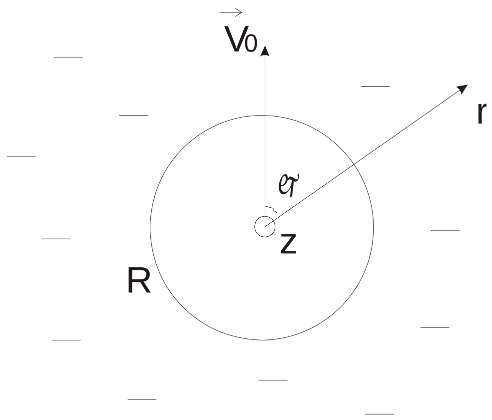
4.7. Решить задачу об обтекании неподвижной сферы радиуса R потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью $-\vec{V}_0$. Получить выражение для тангенциальной и радиальной компонент скорости движения частиц жидкости.



Ответ: $v_r = -V_0\cos\theta\left(1 - R^3/r^3\right)$,

$$v_\theta = V_0\sin\theta\left(1 + \frac{1}{2}R^3/r^3\right).$$

4.8. Круговой цилиндр радиуса R движется с постоянной скоростью $\vec{V}_0$ в идеальной несжимаемой жидкости в направлении, перпендикулярном его оси. Поставить краевую задачу для уравнения Лапласа. Получить выражение для потенциала Φ и компонент скорости частиц жидкости.



Ответ: $\Phi(r,\varphi) = -\dfrac{V_0 R^2}{r}\cos\varphi$;

$$v_r = \frac{V_0 R^2}{r^2}\cos\varphi,$$

$$v_\theta = \frac{V_0 R^2}{r^2}\sin\varphi,$$

$$v_z = 0.$$

4.9. Найти распределение давления на поверхности сферы радиуса R, обтекаемой потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ, имеющим на бесконечности скорость $\vec{V}_0$ и давление p_0. Определить полную силу $\vec{F}$, действующую со стороны потока на сферу.

Ответ: $p = p_0 + \dfrac{1}{2}\rho V_0^2\left(1 - \dfrac{9}{4}\sin^2\theta\right)$; $F = 0$.

4.10. Шар радиуса R и массой m движется поступательно и прямолинейно вдоль оси x со скоростью $U(t)$ в покоящейся идеальной несжимаемой жидкости. Используя интеграл Коши - Лагранжа, найти силу сопротивления жидкости движению шара F и общую кинетическую энергию системы (шар и жидкость) K.

Ответ: $F = -\dfrac{M}{2}\dfrac{dU}{dt}$; $K = \left(m + \dfrac{M}{2}\right)\dfrac{U^2}{2}$, где $M = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$.

4.11. Показать, что при равномерном движении шара в покоящейся идеальной несжимаемой жидкости шар не испытывает сопротивления (парадокс Д'Аламбера - Эйлера).

4.12. а) В бесконечной цилиндрической трубе, заполненной несжимаемой идеальной жидкостью, с постоянной скоростью движется твердое тело. Далеко перед и за телом жидкость покоится, движение жидкости в системе, связанной с телом, установившееся, массовые силы отсутствуют. Действует ли на тело сила реакции жидкости: сопротивление, подъемная сила?

б) Пусть в трубе движется не одно, а несколько тел с одинаковыми скоростями. Остальные условия те же, что и в п. А). Что можно сказать о силе реакции жидкости на эти тела?

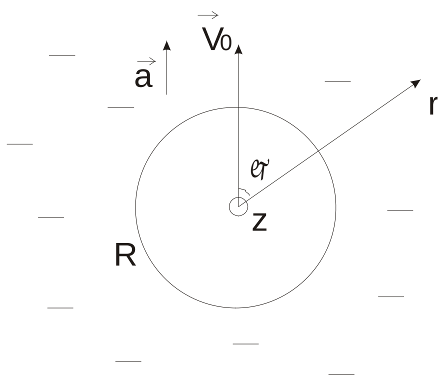
в) За движущимся в трубе телом образовалась конечная полость, заполненная газом, паром или жидкостью. Чему равно сопротивление тела?

Ответ: а) Сопротивление — это составляющая силы, действующей со стороны жидкости на тело, параллельная скорости тела; подъемная сила — составляющая, перпендикулярная этой скорости. В рассматриваемом случае сопротивление равно нулю (парадокс Д'Аламбера- Эйлера), подъемная сила может отличаться от нуля.

б) Суммарное сопротивление всех тел равно нулю.

в) Сопротивление тела вместе с полостью равно нулю.

4.13. Найти присоединенную массу на единицу длины кругового цилиндра радиуса R, движущегося с ускорением в идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ в направлении, перпендикулярном его оси.



Ответ: $M = \rho\pi R^2$.

4.14. Тонкостенная сфера (сферический буй) массой m и радиусом R находится в равновесии в стратифицированной жидкости плотностью $\rho(z)$ на горизонте

z_0. Определить период малых колебаний буя ω, учитывая присоединенную массу.

Ответ: $\omega^2(z_0) = \frac{2}{3}\frac{g}{\rho(z_0)}\frac{d\rho}{dz}\Big|_{z=z_0} = \frac{2}{3}N^2(z_0)$, где $N(z_0)$ - частота Брента-Вяйсяля.

4.15. Пусть жидкость вращается вокруг вертикальной оси так, что частота вращения цилиндрического слоя радиусом r равна $\Omega(r)$. При какой зависимости $\Omega(r)$ движение будет потенциальным?

Ответ: $\Omega(r) = \Omega_0 \frac{a^2}{r^2}$, где $\Omega_0 = \Omega(a)$, a - произвольно.

4.16. Найти форму свободной поверхности при потенциальном вращении жидкости в поле силы тяжести.

Указание: использовать решение задачи 4.14 и уравнение Бернулли.

4.17. Показать, что если река имеет закругление, то скорость течения больше около внутреннего берега, а уровень воды – около внешнего. Считать, что оба берега имеют общий центр кривизны, движение идеальной однородной несжимаемой жидкости установившееся и безвихревое.

4.18. Вычислить силу, действующую со стороны жидкости на шар, движущийся в ней со скоростью $\vec{U}$, если

а) $\vec{U} = const$;

б) $\vec{U} = \vec{U}(t)$.

Обтекание шара считать безотрывным. На бесконечности жидкость покоится.

Ответ: а) $\vec{F} = 0$; б) $\vec{F} = -M\frac{d\vec{U}}{dt}$, где M - присоединенная масса шара.

4.19. Определить величину и направление силы $\vec{F}$, действующей со сторонв жидкости на единицу длины бесконечного кругового цилиндра, движущегося перпендикулярно своей оси со скоростью $\vec{U}$, если

а) $\vec{U} = \vec{U}(t)$, $\Gamma = 0$;

б) $\vec{U} = const$, $\Gamma = \Gamma_0 \neq 0$.

Здесь Γ- циркуляция скорости по контуру, охватывающему цилиндр. Обтекание цилиндра считать безотрывным.

Ответ: а) $\vec{F} = -M \dfrac{d\vec{U}}{dt}$;

б) $\vec{F} = \rho \vec{\Gamma} \times \vec{U}$,

где M - присоединенная масса цилиндра, $\vec{\Gamma}$ - вектор, направленный по оси цилиндра, $\left|\vec{\Gamma}\right| = \Gamma_0$.

Контрольные вопросы

1. Уравнение движения идеальной жидкости. Его представлен6ие в векторонрй форме и в поекциях в декартовой системе координат.
2. Условия потенциального течения жидкости.
3. Потенциальное обтекание шара.
4. Парадок Даламбера – Эйлера.
5. Понятие присоедененной массы.
6. Присоеденная масса сферы и единицы длины бесконечного кругового цилиндра.

5. Плоское потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости. Функция тока. Комплексный потенциал

Полнее всего теория потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости разработана в случае плоского потенциального течения (когда от одной координаты, например, от z, ничего не зависит, и v_z=0).

Введем новую функцию $\psi(x,y,t)$ - функцию тока – так, чтобы уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

удовлетворялось автоматически. Для этого положим:

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (5.1)$$

Термин «функция тока» обусловлен тем, что линиями тока течения являются линии $\psi=const$.

В случае потенциального течения, когда $rot\vec{v}=0$, функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\psi=0. \qquad (5.2)$$

Введем для плоского течения функцию потенциала скорости φ: $\vec{v}=grad\varphi$. Тогда

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \qquad (5.3)$$

Несложно показать, что линии тока ($\psi = const$) ортогональны изопотенциальным линиям ($\varphi = const$).

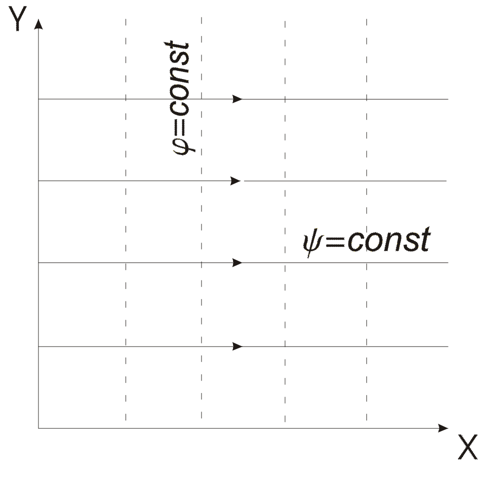
Соотношения (5.1) и (5.2) с математической точки зрения совпадают с условиями Коши - Римана, выражающими собой тот факт, что функция

$$F(z) = \varphi + i\psi \tag{5.4}$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$, т.е. обладает свойством дифференцируемости. Функцию $F(z)$ называют комплексным потенциалом, а функцию $W = \frac{dF}{dz}$ - комплексной скоростью. Следовательно, любой аналитической функции комплексной переменной можно поставить в соответствие некое плоское потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости. Впервые подобный подход к решению данного класса задач был предложен Д'Аламбером и Эйлером в середине XVIII века, а современное изложение дано в 1876 г. Кирхгофом.

Примеры решения задач

1. Изучить движение жидкости, описываемое комплексным потенциалом



$F(z) = az$,

где a - вещественная постоянная. Найти линии тока и эквипотенциальные линии.

Решение: Поскольку $z = x + iy$, то

$$F(z) = ax + iay.$$

С другой стороны, комплексный потенциал выражается через потенциал скорости φ и функцию тока ψ формулой (5.4).

Следовательно, в данной задаче

$$\varphi = ax,$$

$$\psi = ay.$$

Компоненты вектора скорости можно найти либо через функцию потенциала, используя выражения (5.3), либо через функцию тока, используя соотношения (5.1).

Несложно вычислить, что

$$v_x = a\,,$$

$$v_y = 0\,.$$

Для полного решения задачи следует нарисовать на плоскости xy линии тока, указывая стрелочками направление скорости течения жидкости, и линии равного потенциала, обозначаемые, как правило, пунктиром (см. рисунок). Очевидно, что данный комплексный потенциал определяет “однородный поступательный поток” жидкости.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Доказать, что при плоском потенциальном движении несжимаемой жидкости функция тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

5.2. Показать, что линии $\psi = const$ являются линиями тока.

Указание: учесть, что для линии тока $y = y(x)$ справедливо соотношение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}\,.$$

5.3. Доказать, что линии тока ($\psi = const$) и эквипотенциальные линии ($\varphi = const$) образуют два семейства ортогональных линий.

5.4. Найти выражение для комплексной скорости W через компоненты вектора скорости v_x, v_y.

5.5. Доказать, что при плоском потенциальном течении несжимаемой жидкости имеет место соотношение

$$\oint_L W dz = \Gamma + iQ,$$

где W - комплексная скорость, Γ и Q - соответственно циркуляция скорости и расход жидкости по любому замкнутому контуру L, принадлежащему области, занятой жидкостью.

5.6. Выразить через функцию тока $\psi(x,y)$ расход жидкости Q через криволинейную дугу, соединяющую точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Ответ: $Q = \psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1)$.

5.7. Выразить через потенциал скорости $\varphi(x,y)$ циркуляцию скорости Г по кривой, соединяющей точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Ответ: $\Gamma = \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)$.

5.8. Изучить движение жидкости, определяемое комплексным потенциалом

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z,$$

где q - вещественная постоянная. Найти компоненты скорости v_r, v_θ (r, θ - полярные координаты), циркуляцию скорости и расход жидкости через окружность с центром в начале координат. Найти линии тока и эквипотенциальные линии.

5.9. Изучить движение жидкости, определяемое комплексным потенциалом

$$F(z) = \frac{\gamma}{2\pi i} \ln z,$$

где γ - вещественная постоянная. Найти компоненты скорости v_r, v_θ (r, θ - полярные координаты), циркуляцию скорости и расход жидкости через окружность с центром в начале координат. Найти линии тока и эквипотенциальные линии.

5.10. Показать, что для плоских течений несжимаемой жидкости вектор скорости $\vec{v}$ связан с функцией тока $\psi(x, y)$ следующим соотношением:

$$\vec{v} = rot(\psi\vec{z}_0),$$

где $\vec{z}_0$ - единичный вектор нормали к плоскости (x, y).

5.11. Изучить движение жидкости, определяемое комплексным потенциалом

$$F(z) = \frac{\beta}{2\pi}\ln z,$$

где β - комплексное число. Найти компоненты скорости v_r, v_θ (r, θ - полярные координаты), циркуляцию скорости и расход жидкости через окружность с центром в начале координат. Найти линии тока и эквипотенциальные линии.

5.12. Изучить движение жидкости, определяемое комплексным потенциалом

$$F(z) = -\frac{c}{z},$$

где c - вещественная постоянная. Найти линии тока, эквипотенциальные линии и скорость течения жидкости.

5.13. Изучить движение жидкости, определяемое комплексным потенциалом

$$F(z) = az^2,$$

где a - вещественная постоянная. Найти линии тока и эквипотенциальные линии.

5.14. Рассмотреть движение жидкости, определяемое комплексным потенциалом

$$F(z) = az^{1/2},$$

где $a > 0$, в области, получающейся, если вдоль положительной оси OX поставить стенку. Показать, что линиями тока служат параболы.

5.15. Показать, что комплексный потенциал

$$F(z) = az^n,$$

где $a > 0$, $n > 1/2$, соответствует обтеканию угла с раствором $\alpha = \pi/n$. Найти скорость течения в точке $z = 0$.

5.16. Провести полный анализ течения, соответствующего потенциальному обтеканию кругового цилиндра с циркуляцией, которое имеет комплексный потенциал

$$F(z) = v_\infty(z + R^2/z) - \left(i\kappa/2\pi\right)\ln z,$$

где R - радиус цилиндра, v_∞ - скорость натекающего потока на бесконечности, κ - вещественная постоянная (для определенности $\kappa > 0$). Найти компоненты скорости v_r, v_θ. Определить величину скорости $|\vec{v}|$ и давление p на поверхности цилиндра.

5.17. Качественно представить картину линий тока течения, которому соответствует комплексный потенциал

$$F(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right).$$

Ответ: Течение является суперпозицией поступательного потока и течения от диполя, помещенного в точке $z = 0$.

Линии тока:

$$\psi = U\left(r - a^2/r\right)\sin\theta = const, \quad z = re^{i\theta}.$$

Уравнение обтекаемого контура $r = a$.

5.18. Качественно представить картину линий тока течения, которому соответствует комплексный потенциал

$$F(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{z+a}{z-a}.$$

Ответ: Течение является суперпозицией поступательного потока и течений, создаваемых источником, расположенным в точке $z = -a$, и стоком в точке $z = a$.

Линии тока:

$$\psi = Uy - \frac{Q}{2\pi} arctg\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = const.$$

Обтекаемый контур $\psi = 0$ представляет собой овал, проходящий через точки $z_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + Qa/\pi U}$.

При $a \to 0$ и $Qa = const$ получим функцию тока

$$\psi = Uy\left(1 - \frac{b^2}{x^2 + y^2}\right),$$

соответствующую обтеканию кругового цилиндра. Здесь $b^2 = \dfrac{Qa}{\pi U}$.

5.19. Проверить, что комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра, заданного уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, имеет вид:

$$F(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - iV\left(z - \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z}{a},$$

где U, V, Γ — действительные постоянные. Какой физический смысл имеют эти постоянные?

5.20. Показать, что поле скорости с потенциалом

$$\varphi = c(x - ae^{ky}\sin(kx)), \quad c, a, k = const,$$

определяет течение несжимаемой жидкости. Найти функцию тока и комплексный потенциал этого течения. Какой физический смысл имеют параметры c, a, k ?

Ответ: $\psi = c(y - ae^{ky}\cos kx)$, $F(z) = c(z - aie^{-ikz})$.

Контрольные вопросы

1. Определение функции тока.
2. Определение комплексного потенциала.
3. Примеры плоских потенциальных течений.
4. Определение комплексной скорости.

6. Вихревое движение жидкости

Движение жидкости называется вихревым, если хотя бы в части объема, занимаемого жидкостью, $rot\vec{v} \neq 0$. Рассмотрим основные свойства вихревого движения.

Выберем замкнутый контур, состоящий из фиксированных частиц, и, следовательно, перемещающийся вместе с ними (жидкий контур), и найдем полную производную от циркуляции скорости вдоль этого контура:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_L \vec{v}d\vec{r} = \oint_L \left[\frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \vec{v} d\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right],$$

поскольку контур меняется со временем. Из уравнения Эйлера (1.1) имеем

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} = -\nabla(w+U).$$

Далее несложно показать, что $\nabla(w+U)d\vec{r} = d(w+U)$, а $\vec{v}d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$.

Таким образом,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L d\left(\frac{v^2}{2} - w - U \right) = 0,$$

так как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала всегда равен нулю. Следовательно, циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, перемещающемуся вместе с жидкостью, сохраняется:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v}d\vec{r} = const. \qquad (6.1)$$

Поскольку эту теорему о циркуляции скорости впервые доказал в 1869 году Томсон (лорд Кельвин), она носит название теоремы Томсона.

Зная теорему Томсона, несложно доказать три другие теоремы о вихрях, которые исторически были получены несколько ранее (в 1858 году) Гельмгольцем и Лагранжем.

Первая теорема Гельмгольца (или теорема Лагранжа): элементы идеальной жидкости, лишенные вихрей в начальный момент времени, будут лишены их и в дальнейшем. Под «вихрем» или «вектором вихря» понимают векторную величину $\vec{\Omega} = rot\vec{v}$.

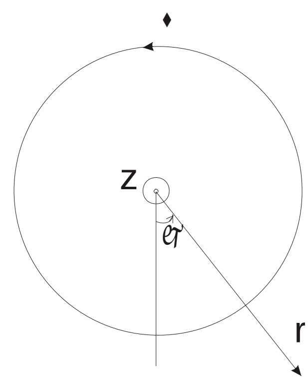
Введем понятие вихревой линии и вихревой трубки. Вихревой линией называют линию, касательная к которой в каждой точке коллинеарна вектору вихря. Из вихревых линий можно образовать вихревую трубку. Для этого надо взять замкнутый контур и через каждую его точку провести вихревую линию.

Вторая теорема Гельмгольца: вихревая линия состоит все время из одних и тех же частиц, т.е. движется вместе с жидкостью.

Третья теорема Гельмгольца: поток вихря через поперечное сечение вихревой трубки $\oiint_S \vec{n}\vec{\Omega}dS$ остается постоянным вдоль данной вихревой трубки. Следовательно, вихревые линии всегда замкнуты или начинаются и кончаются на бесконечности, а также на стенках или на поверхности жидкости.

Примеры решения задач

1. Определить поле вихрей скорости в жидкости, вращающейся вокруг вертикальной оси OZ с угловой скоростью ω .



Решение: Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z . По условию задачи вектор скорости движения жидкости будет равен $\vec{v} = v_\varphi \vec{I}_\varphi$. Поскольку угловая скорость $\omega = const$, то

$$\vec{v} = \omega r \vec{I}_\varphi .$$

Запишем вихрь скорости $\vec{\Omega} = rot\vec{v}$ в цилиндрической системе координат:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial z}\right]\vec{I}_r + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\vec{I}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right]\vec{I}_z .$$

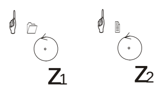
Учтем, что $v_r = v_z = 0$, а v_φ зависит только от расстояния до оси вращения r. Тогда

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r}\vec{I}_z .$$

Подставив $\vec{v} = \omega r \vec{I}_\varphi$, окончательно получаем:

$$\vec{\Omega} = 2\omega \vec{I}_z .$$

2. Рассмотреть движение двух точечных вихрей, описываемых комплексными потенциалами:



$$F_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\ln(z - z_1),$$

$$F_2 = \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\ln(z - z_2).$$

Решение: Запишем общий комплексный потенциал в плоскости xy:

$$F = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\ln(z - z_1) + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\ln(z - z_2)$$

Здесь и далее примем обозначения $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Исследуем перемещение вихревых линий в пространстве.

$$v_x - i v_y = \frac{dF}{dz} = \frac{\Gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{z - z_1} + \frac{\Gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{z - z_2} .$$

Таким образом,

$$\frac{d\bar{z}}{dt}=\frac{\Gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{z-z_1}+\frac{\Gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{z-z_2}$$

Учтем, что вихрь в точке $z=z_1$ перемещается только под действием поля скорости второго вихря в этой точке.

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt}=\frac{\Gamma_2}{2\pi i}\frac{1}{z_1-z_2};$$

$$\frac{d\bar{z}_2}{dt}=\frac{\Gamma_1}{2\pi i}\frac{1}{z_2-z_1}.$$

Выделим в этих уравнениях действительные и мнимые части.

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{\Gamma_2}{2\pi}\dfrac{y_1-y_2}{r^2}\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{\Gamma_1}{2\pi}\dfrac{y_1-y_2}{r^2}\\ \dfrac{dy_1}{dt}=\dfrac{\Gamma_2}{2\pi}\dfrac{x_1-x_2}{r^2}\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-\dfrac{\Gamma_1}{2\pi}\dfrac{x_1-x_2}{r^2}\end{cases}$$

Здесь введено обозначение $r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$.

Умножим первое уравнение полученной системы на Γ_1, второе – на Γ_2 и сложим, в результате получим:

$$\Gamma_1\frac{dx_1}{dt}+\Gamma_2\frac{dx_2}{dt}=0,$$

следовательно,

$$\Gamma_1x_1+\Gamma_2x_2=const.$$

Аналогично поступим с третьим и четвертым уравнениями системы.

$$\Gamma_1\frac{dy_1}{dt}+\Gamma_2\frac{dy_2}{dt}=0,$$

$$\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2 = const\,.$$

Введем понятие центра инерции системы двух вихрей (x_c, y_c) следующим образом:

$$\frac{\Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = x_c\,, \qquad \frac{\Gamma_1 y_1 + \Gamma_2 y_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = y_c\,.$$

Тогда можно сделать вывод, что центр инерции системы двух вихрей (x_c, y_c) при их движении остается неподвижным.

Кроме того, можно показать, что расстояние между вихрями остается постоянным. Для этого вернемся к полученной ранее системе уравнений. Вычитая из первого второе, а из третьего четвертое, имеем:

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi}\frac{y_1 - y_2}{r^2}\,;$$

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi}\frac{x_1 - x_2}{r^2}\,.$$

Умножим первое из этих уравнений на $(x_1 - x_2)$, а второе – на $(y_1 - y_2)$ и сложим полученные выражения, в результате получим:

$$(x_1 - x_2)\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + (y_1 - y_2)\frac{d(y_1 - y_2)}{dt} = 0\,.$$

Следовательно,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = const\,,$$

то есть,

$$r = const\,.$$

Таким образом, при движении вихри вращаются вокруг центра инерции с сохранением расстояния между ними.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Доказать теорему Лагранжа: элементы идеальной жидкости, лишенные вихрей в начальный момент времени, будут лишены их и в дальнейшем.

6.2. Доказать вторую теорему Гельмгольца: вихревая линия состоит все время из одних и тех же частиц, т.е. движется вместе с жидкостью.

6.3. Доказать третью теорему Гельмгольца: поток вихря через поперечное сечение вихревой трубки остается постоянным вдоль данной вихревой трубки.

6.4. Сформулировать условия стационарности вихревых движений в идеальной жидкости.

Ответ: $div\vec{v} = 0$, $rot[\vec{\Omega}\vec{v}] = 0$, $\vec{\Omega} = rot\vec{v}$.

6.5. Для однородной идеальной несжимаемой жидкости в поле потенциальных массовых сил из уравнения Эйлера вывести уравнение Гельмгольца:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega}\nabla)\vec{v},$$

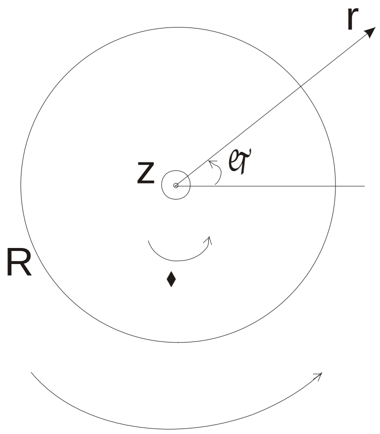
где $\vec{\Omega} = rot\vec{v}$.

Указание: Записать уравнение Эйлера в форме Громэко - Лэмба и применить к нему операцию rot.

6.6. Определить поле вихрей скорости при сдвиге, принимая координатную плоскость OXZ за плоскость сдвига и считая, что скорости точек параллельны оси OX так, что $v_x = Cy$, $v_y = 0$, $v_z = 0$.

Ответ: $\vec{\Omega} = -\vec{I}_z C$.

6.7. Доказать, что тангенциальный разрыв, когда один слой жидкости движется относительно другого с постоянной во всех точках скоростью U, является примером стационарного вихревого движения.



6.8. Бесконечный жидкий круговой цилиндр радиуса R вращается как целое с угловой частотой ω. Считая движение жидкости вне цилиндра потенциальным, найти распределение скорости движения жидкости $\vec{v}\ (r)$ в зависимости от расстояния от оси цилиндра.

Указание: использовать решение задачи 4.15.

Ответ: $v_\varphi = \omega r$, $v_r = v_z = 0$ при $r < R$;

$$v_\varphi = \frac{\omega R^2}{r},\ v_r = v_z = 0 \text{ при } r > R.$$

6.9. Бесконечный жидкий круговой цилиндр радиуса R вращается как целое с угловой частотой ω. Считая движение жидкости вне цилиндра потенциальным, найти распределение давления $p(r)$ в зависимости от расстояния от оси цилиндра, если на бесконечном удалении от оси цилиндра давление равно p_∞. Плотность жидкости ρ.

Указание: воспользоваться решением задачи 6.8.

Ответ: $p(r) = p_\infty - \dfrac{\rho\omega^2 R^4}{2r^2}$ при $r < R$;

$$p(r) = p_\infty - \rho\omega^2 R^2 + \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} \text{ при } r > R.$$

6.10. Скорости частиц жидкости пропорциональны расстояниям частиц от оси OX и параллельны последней, так что $v_x = c\sqrt{y^2 + z^2}$, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Определить поле вихрей.

Ответ: вихревые линии – окружности $y^2 + z^2 = const$, $x = const$; величина вихря везде одинакова $\Omega = c$.

6.11. Рассмотреть, как будут двигаться точечные вихри в следующих ситуациях:

а) два вихря с одинаковыми по величине и направлению циркуляциями:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2,$$

рассмотреть случаи $\Gamma_1 = \Gamma_2 > 0$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2 < 0$, определить координаты центра инерции системы;

б) два вихря с одинаковыми по величине, но противоположными по направлению циркуляциями:

$$\Gamma_1 = -\Gamma_2;$$

в) вихрь вблизи твердой стенки;

г) два вихря с циркуляциями:

$$\Gamma_1 = a\Gamma_2,$$

рассмотреть случаи $a > 1$ и $a < -1$.

Ответ: а) вихри вращаются вокруг центра масс (x_c, y_c), координаты которого определяются соотношениями $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

б) вихри двигаются поступательно с постоянной скоростью перпендикулярно к прямой, соединяющей их.

Контрольные вопросы

1. Определение вихревого движения жидкости.
2. Примеры стационарных вихревых движений жидкости.
3. Циркуляция скорости. Теорема Томпсона о циркуляции.
4. Элементарные вихревые движения и их взаимодействия.

7. Поверхностные гравитационные волны

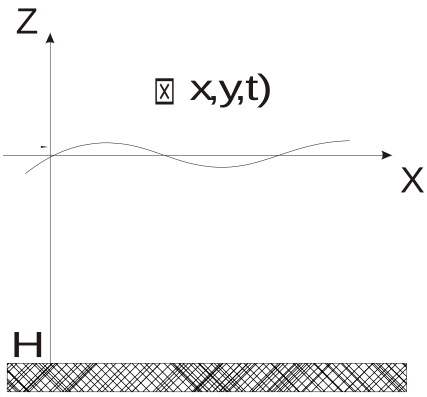
Гравитационные волны возникают под действием силы тяжести. Если каким-либо образом поверхность жидкости выведена из состояния равновесия, то сила тяжести, играя роль возвращающей силы, будет стремиться вернуть эту поверхность в ее равновесное положение и заставит каждую частицу колебаться. Движение будет распространяться вдоль всей поверхности в виде волн, называемых гравитационными.

Воспользуемся следующими приближениями: поверхность жидкости будем считать плоской (z=0) и неограниченной, а жидкость несжимаемой и однородной $\rho = \rho_0 = const$ (следовательно, уравнение неразрывности (1.2) будет иметь вид $div\vec{v} = 0$). Если амплитуда колебаний в волне много меньше длины волны, то уравнение Эйлера (1.1) можно линеаризовать:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nabla(gz)\,. \qquad (7.1)$$

Очевидно, что в этом случае движение в поверхностной волне является потенциальным и удовлетворяет уравнению Лапласа (4.1) для потенциала скорости φ ($\vec{v} = grad\varphi$):

$$\Delta\varphi = 0\,. \qquad (7.2)$$



Получим теперь граничные условия, которые должны выполняться на поверхности жидкости и на дне водоема. Пусть давление на свободной поверхности P_0, а возвышение возмущенной поверхности описывается выражением $\xi = \xi(x, y, t)$. При этом скорость возвышения поверхности $\dfrac{d\xi}{dt}$ должна совпадать с вертикальной скоростью частиц среды v_z, на ней находящихся, поскольку эти частицы не могут ни опережать поверхность, ни отставать от нее.

Из уравнения (7.1) несложно получить линеаризованный вид интеграла Коши (нестационарной формы уравнения Бернулли):

$$\nabla\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{p}{\rho_0}+gz\right]=0\,.$$

Тогда на поверхности жидкости имеем

$$`\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\rho_0\xi\Big|_{z=\xi}=-P_0\,.$$

Постоянную P_0 можно устранить переопределением потенциала φ, прибавив к последнему независящую от координат величину $P_0 t/\rho_0$. Тогда

$$g\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=\xi}=0\,.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$g\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\Big|_{z=\xi}=0\,.$$

Считая возмущение поверхности ξ малым, можно заменить в граничном условии на поверхности $z=\xi$ на $z=0$, а также линеаризовать выражение для вертикальной компоненты скорости частиц среды: $v_z=\dfrac{d\xi}{dt}\cong\dfrac{\partial\xi}{\partial t}$. Поскольку, с другой стороны, $v_z=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, окончательно получаем

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{z=0}=0\,. \tag{7.3}$$

В качестве второго граничного условия возьмем условие «непроникания» (4.2) на неподвижной поверхности дна при $z=-H$:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0\,. \tag{7.4}$$

Таким образом, гравитационные волны на поверхности жидкости глубиной H описываются уравнением (7.2) с граничными условиями (7.3) и (7.4).

Примеры решения задач

1. Получить дисперсионное уравнение для гравитационной поверхностной волны.

Решение: Будем искать решение уравнения (7.2) в виде плоской неоднородной гармонической волны, распространяющейся по оси x, амплитуда которой зависит от z:

$$\varphi(x,y,z,t)=\Phi(z)\exp\{i(kx-\omega t)\}.$$

Подставив данный вид решения в уравнение Лапласа (7.2), получаем

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}-k^2\Phi=0\,.$$

Решением данного уравнения, удовлетворяющим граничному условию на дне

$$\left.\frac{d\Phi}{dz}\right|_{z=-H}=0\,,$$

является функция $\Phi(z) = Ach(k(z+H))$, где $A = const$.

Подстановка последнего выражения в граничное условие при $z = 0$ показывает, что поверхностная гравитационная волна существует не при произвольных значениях k и ω, а только при удовлетворяющих дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = gkth(kH).$$

Следовательно, закон дисперсии определяется соотношением между глубиной бассейна H и длиной распространяющейся волны λ.

2. Пусть при $x = 0$ возбуждается спектрально-узкий пакет гравитационных поверхностных волн на глубокой воде, содержащий $N >> 1$ периодов колебаний частотой ω_0, модулированный медленно меняющейся функцией времени

$$W\big|_{x=0} = F(t)\exp\{-i\omega_0 t\},$$

где $F(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T = \dfrac{2\pi N}{\omega_0}$. Определить:

а) число гребней волны N_1 на поверхности, которое увидит неподвижный наблюдатель,

б) сколько колебаний N_2 совершит наблюдатель, находящийся в лодке, при прохождении данного волнового пакета.

Решение: Пакет волн распространяется с групповой скоростью, то есть

$$W(x,t) = F(t - {}^{x}\!/_{v_{гр}})\exp\{i(k_0 x - \omega_0 t\},$$

где $k_0 = {}^{\omega_0^2}\!/_{g}$.

Для стороннего наблюдателя в момент времени t пакет будет занимать в пространстве интервал длиной $L = Tv_{гр}$, на котором уложится число волн

$$N_1 = \frac{Lk_0}{2\pi} = \frac{Tk_0 v_{гр}}{2\pi}.$$

Поскольку $T = 2\pi \frac{N}{\omega_0}$, то

$$N_1 = N \frac{v_{гр}}{v_ф}.$$

Для волн на глубокой воде (см. задачу 7.3) $v_{гр} = {}^{v_ф}\!/_{2}$, следовательно,

$$N_1 = \frac{N}{2}.$$

Для наблюдателя, находящегося в лодке в точке x, время прохождения пакета равно T, за которое лодка совершит

$$N_2 = \frac{T\omega_0}{2\pi} = N$$

колебаний.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Показать, что если для поверхностных гравитационных волн выполняется условие $a << \lambda$ (a - амплитуда волны, λ - длина волны), то движение жидкости потенциально.

Указание: показать, что в этом случае в уравнении Эйлера можно пренебречь нелинейным членом по сравнению с нестационарным.

a. Получить закон дисперсии волн на глубокой воде. Найти фазовую и групповую скорости волн.

Ответ: $\omega = \sqrt{kg}$, $v_{ф} = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$, $v_{гр} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}}$.

7.2. Показать, что при распространении волны на глубокой воде частицы жидкости в волне двигаются по окружностям с радиусом, экспоненциально убывающим по направлению вглубь жидкости.

7.3. Получить выражение для фазовой и групповой скорости гравитационных волн на мелкой воде ($\lambda >> H$, где H - глубина канала).

Ответ: $v_{ф} = v_{гр} = \sqrt{gH}$.

7.4. Сравнить траектории колеблющихся частиц жидкости в потоке конечной глубины у дна и у поверхности жидкости.

7.5. Используя закон дисперсии для гравитационных волн (см. задачу 7.1) на неограниченной поверхности жидкости, глубина которой равна H, получить выражение для их групповой скорости.

Ответ: $v_{гр} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{kth(kH)}}\left(th(kH) + \dfrac{kH}{ch^2(kH)} \right)$.

7.6. Используя закон дисперсии для гравитационно-капиллярных волн:

$$\omega^2 = \left[gk + \gamma k^3 \right] th(kH),$$

где $\gamma = \alpha / \rho_0$ (α - коэффициент поверхностного натяжения), H - глубина водоема, получить выражение для их групповой и фазовой скорости. Построить графики $v_{гр} = v_{гр}(\lambda)$, $v_{ф} = v_{ф}(\lambda)$.

7.7. Определить собственные частоты колебаний жидкости в бассейне глубины H , длины a и ширины b .

Ответ: $\omega_{nm}^2 = gk_{nm}th(k_{nm}H)$, где $k_{nm} = \pi\sqrt{\dfrac{n^2}{a^2} + \dfrac{m^2}{b^2}}$.

7.8. Показать, что для периода T океанских волн на глубокой воде справедливо соотношение

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}},$$

где λ - длина океанской волны.

7.9. Найти скорость распространения $v_{гр}$ и период колебаний T для океанских волн с длиной волны λ =145 м.

Ответ: $v_{гр}$ = 15м/с, T =9,6 с.

7.10. Океанские волны перемещаются со скоростью 10 м/с. Найти длину этих волн и их период.

Ответ: λ = 64 м, T = 6,4 с.

7.11. Заметили, что поплавок поднимается и опускается на волне 15 раз в минуту. Найти длину волн и скорость их распространения, считая глубину жидкости очень большой.

Ответ: λ = 25 м, v = 6,25 м/с.

Контрольные вопросы

1. Поверхностные гравитационные волны.
2. Дисперсионные уравнения для длинных, коротких, гравитационно-капиллярных волн.
3. Фазовые скорости длинных, коротких, гравитационно-капиллярных волн.

8. Течение вязкой несжимаемой жидкости

На течение реальной жидкости существенное влияние оказывает вязкость. Еще в начале XX века Джон фон Нейманн отмечал, что красивые математические задачи, решенные в рамках приближения идеальной жидкости, ничего общего с движениями реальных жидкостей не имеют. Он называл теоретиков, которые занимались подобными расчетами, людьми, изучающими “сухую воду”. Первые опыты, показывающие влияние сил вязкости на сопротивление при малых скоростях, принадлежат Кулону и Дюбуа. Основы учения о движении вязкой жидкости были заложены в 1821 г. французским ученым Навье и получили завершение в 1845 г. в работах Стокса.

В этом разделе мы выведем уравнения, описывающие течение “мокрой воды”. Для этого запишем закон сохранения импульса (3.7) в случае отсутствия внешних сил:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{8.1}$$

где $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k$ - тензор плотности потока импульса. Действие вязких сил можно учесть, вводя в Π_{ik} дополнительное слагаемое σ_{ik}, называемое тензором вязких напряжений и характеризующее величину i-ой компоненты вязкой силы, действующей на единичную площадку, ориентированную перпендикулярно k-ой оси. Тогда тензор плотности потока импульса примет вид:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma_{ik}. \tag{8.2}$$

Поскольку трение может возникнуть только в случае, когда различные участки жидкости движутся с разными скоростями, σ_{ik} должен зависеть от градиентов скорости:

$$\sigma_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \xi\delta_{ik}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \tag{8.3}$$

где η и ξ - коэффициенты вязкости. Для несжимаемой жидкости $div\vec{v} = 0$ (см. задачу 1.11), и второе слагаемое в (8.3) обращается в нуль.

Уравнение движения вязкой жидкости, называемое уравнением Навье-Стокса, можно получить при подстановке выражения для тензора плотности потока импульса в виде (8.2) с учетом (8.3) в уравнение (8.1) и полагая, что динамический коэффициент вязкости η не зависит от координат. Для несжимаемой жидкости имеем:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}, \tag{8.4}$$

где $\nu = \eta/\rho$ - кинематическая вязкость жидкости.

Частицы вязкой жидкости прилипают к поверхности обтекаемого тела, поэтому их скорость на границе равна нулю (это так называемое граничное условие “прилипания”). Тогда из (8.1)-(8.2) несложно вычислить силу, действующую на твердое тело со стороны установившегося (стационарного) потока вязкой жидкости:

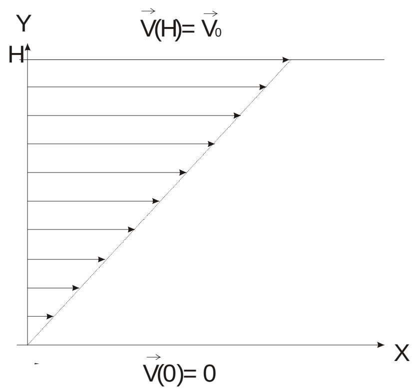
$$F_i = -\iint_S pn_i dS + \iint_S \sigma_{ik} n_k dS,$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности тела S. Здесь первое слагаемое представляет собой результирующую сил давления жидкости на тело, а второе определяет вязкую силу. Следовательно, вязкая сила, действующая на единицу поверхности тела, равна

$$f_i\big|_S = \sigma_{ik} n_k\big|_S. \tag{8.5}$$

Примеры решения задач

1. Определить движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными пластинами, находящимися на расстоянии H друг от друга (течение Куэтта). Верхняя пластина движется со скоростью $\vec{v}_0$, нижняя – неподвижна. Найти плотность силы f, действующей на единицу площади нижней пластины со стороны жидкости.



Решение: Выберем систему координат: пусть ось x совпадает с направлением скорости $\vec{v}_0$, а ось y направлена перпендикулярно пластинам, начало координат возьмем на нижней неподвижной пластине.

В силу симметрии задачи скорость и давление в произвольной точке жидкости могут зависеть только от координаты y: $v_x = v = v(y)$, $p = p(y)$.

Спроецируем уравнение Навье - Стокса (8.4) на оси x и y с учетом стационарности движения ($\partial/\partial t = 0$):

$$y)\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

следовательно, $p = p_0 = const$;

$$x)\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

следовательно, $v = Ay + B$.

Постоянные A и B определяются из граничных условий “прилипания”:

1) $v\big|_{y=0} = 0$,

2) $v\big|_{y=H} = H$.

Отсюда легко получаем, что $B = 0$, $A = v_0/H$. Таким образом, скорость движения жидкости в течении Куэтта равна

$$v = \frac{v_0}{H} y .$$

Теперь полученный нами линейный профиль скорости необходимо схематически изобразить на рисунке линиями со стрелочками, показывающими направление скорости (см. рисунок).

Сила $\vec{f}$, действующая на единицу площади нижней пластины со стороны жидкости, имеет две компоненты. Нормальная составляющая определяется силой давления:

$$f_y = -p .$$

Тангенциальная компонента - это вязкая сила, которая, согласно (8.5), равна

$$f_x = f_в = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = \eta \frac{v_0}{H} .$$

Замечание. В гидродинамике важным является понятие о коэффициенте сопротивления, характеризующем отношение вязкой силы к так называемому скоростному напору $\frac{1}{2}\rho v_{cp}^2$:

$$C_D = \frac{2f}{\rho v_{cp}^2} ,$$

где v_{cp} - средняя (или некоторая характерная) скорость потока: $v_{cp} = \frac{1}{H}\int\limits_0^H v dy$.

В случае течения Куэтта $v_{cp} = {v_0}/{2}$, и коэффициент сопротивления равен

$$C_D = \frac{4\nu}{v_{cp} H} = \frac{4}{\mathrm{Re}} .$$

Здесь $\mathrm{Re} = {v_{cp} H}/{\nu}$ - число Рейнольдса.

Задачи для самостоятельного решения

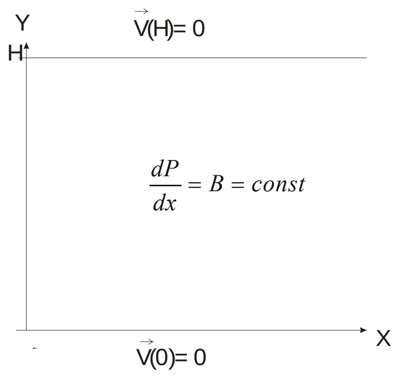
8.1. Вывести уравнение движения несжимаемой жидкости с учетом вязких сил (уравнение Навье - Стокса).

8.2. Спроецировать уравнение Навье - Стокса (8.4) в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

8.3. Показать, что для вязкой несжимаемой жидкости, в случае потенциальности внешних сил, вектор угловой скорости частиц $\omega = \frac{1}{2} rot\vec{v}$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + rot[\vec{\omega}, \vec{v}] = \nu \Delta \vec{\omega}.$$

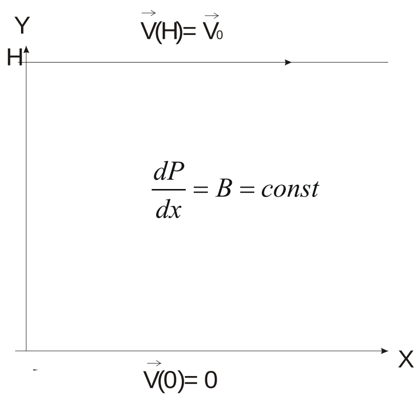
8.4. Исследовать стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между



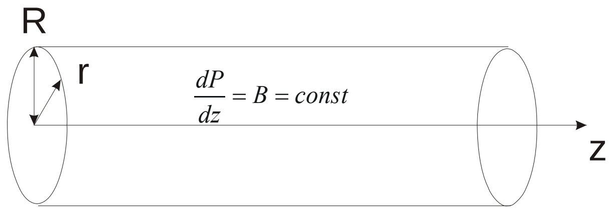
двумя неподвижными бесконечными пластинами, находящимися на расстоянии H друг от друга, поддерживаемое продольным градиентом давления $\frac{dP}{dx} = B = const$, созданным внешними силами (течение Пуазейля). Определить профиль скорости v, плотность вязкой силы $f_в$, действующей на единицу площади каждой пластины со стороны протекающей жидкости, среднюю скорость потока $v_{ср}$ и коэффициент сопротивления C_D.

Ответ: $v = -\frac{1}{2\eta} By(H - y)$; $f_в = -B\frac{H}{2}$; $v_{ср} = -\frac{1}{12\eta} BH^2$; $C_D = \frac{12}{\mathrm{Re}}$.

8.5. Определить установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными пластинами, находящимися на расстоянии H друг от друга. Верхняя пластина движется со скоростью $\vec{v}_0$, нижняя – неподвижна. Задан продольный градиент давления $\dfrac{dP}{dx} = B = const$, созданный внешними силами. Исследовать (и нарисовать) профиль течения при различных значениях B и определить силы вязкости, действующие на единицу площади каждой пластины со стороны протекающей жидкости.



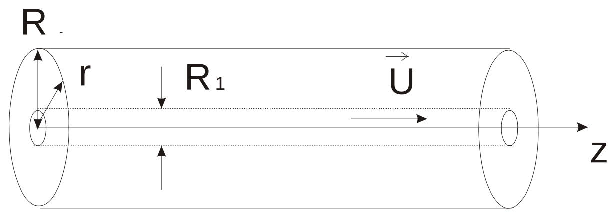
8.6. Определить установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в круговой трубе радиуса R, которое поддерживается продольным градиентом давления $\dfrac{dP}{dz} = B = const$, созданным внешними силами. Исследовать профиль скорости, найти плотность вязкой силы $f_в$, действующей на единицу площади трубы стороны протекающей жидкости, среднюю скорость потока v_{cp} и коэффициент сопротивления C_D. Определить объем жидкости Q, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени (расход жидкости).



Ответ: $v = -\dfrac{B}{4\eta}\left(R^2 - r^2\right)$; $f_в = -\dfrac{BR}{2}$; $v_{cp} = -\dfrac{1}{8\eta}BR^2$; $C_D = \dfrac{16}{\mathrm{Re}}$;

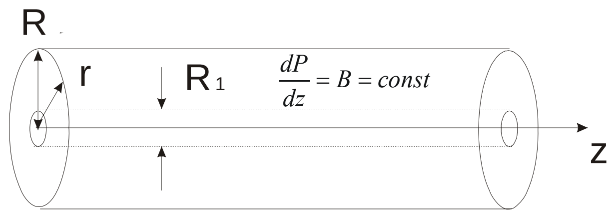
$Q = \dfrac{\pi}{8\eta}\left|\dfrac{dP}{dz}\right|R^4$.

8.7. Цилиндр радиуса R_1 движется со скоростью U внутри коаксиального с ним цилиндра радиуса R_2 параллельно своей оси. Определить движение жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами. Найти плотности вязких сил $f_в$, действующих на единицу площади каждого из цилиндров со стороны протекающей жидкости.



Ответ: $v_z = U \dfrac{\ln\left(r/R_2 \right)}{\ln\left(R_1/R_2 \right)}$.

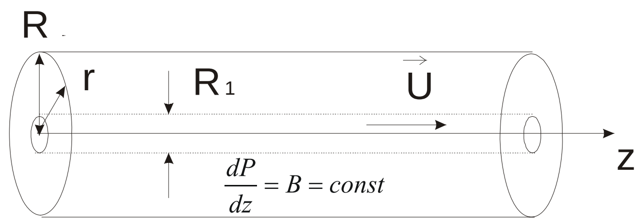
8.8. Рассчитать профиль скорости для течения Пуазейля между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2, если задан продольный градиент давления $\dfrac{dP}{dz} = B = const$, созданный внешними силами. Найти расход жидкости Q.



Ответ: $v = -\dfrac{B}{4\eta} R_1^2 \left(1 - \dfrac{r^2}{R_1^2} + \dfrac{\left(\alpha^2 - 1\right)\ln\left(r/R_1 \right)}{\ln\alpha} \right)$;

$$Q = \frac{\pi}{8\eta}\left|\frac{dP}{dz}\right| R_1^4 \left(\alpha^2 - 1\right)\left(1 - \alpha^2 - \frac{\alpha^2 - 1}{\ln\alpha} \right), \text{ где } \alpha = \frac{R_2}{R_1}.$$

8.9. Рассчитать профиль скорости для течения Пуазейля между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2, если задан продольный градиент давления $\frac{dP}{dz} = B = const$, созданный внешними силами. Внешний цилиндр покоится, а внутренний движется со скоростью U. Найти плотности вязких сил $f_в$, действующих на единицу длины каждого из цилиндров со стороны протекающей жидкости. Определить, при каком значении B эти силы равны нулю.



8.10. Определить установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости по трубе, если ее поперечное сечение – эллипс: $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$; $\frac{dP}{dx} = B = const$. Найти расход жидкости Q.

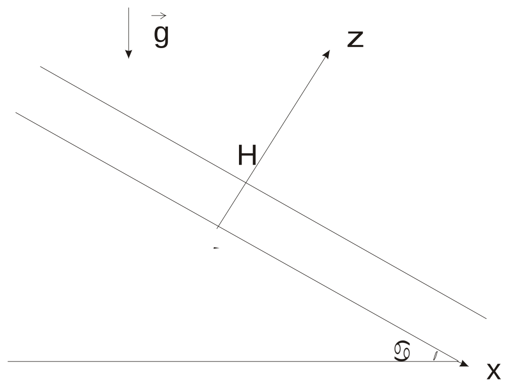
Ответ: $v = -\frac{B}{2\eta}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)$;

$$Q = \frac{\pi}{4\eta}\left|\frac{dP}{dx}\right|\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

8.11. Для стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в длинной горизонтальной цилиндрической трубе произвольного поперечного сечения заданной площади под действием постоянного продольного перепада давления $-\frac{dp}{dz} = b = const$ (течение Пуазейля), используя теорию размерности, получить формулы для объемного расхода жидкости Q и максимальной по сечению скорости $v_{\max}$.

Ответ: $Q = \dfrac{bR^4}{\eta}\varphi(\alpha_i)$, $\quad v_{\max} = \dfrac{bR^2}{\eta} f(\alpha_i)$, где R - характерный размер поперечного сечения трубы, α_i - безразмерные параметры, задающие его форму.

8.12. Слой вязкой несжимаемой жидкости толщины H ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу – неподвижной плоскостью, наклоненной под углом α к горизонту. Определить движение жидкости, возникающее под влиянием силы тяжести: найти давление p, скорость v и количество жидкости Q, протекающее в единицу времени через поперечное сечение слоя (на единицу длины по y).



Указания: Уравнение Навье - Стокса (8.4) с учетом силы тяжести принимает вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} + \vec{g}\,.$$

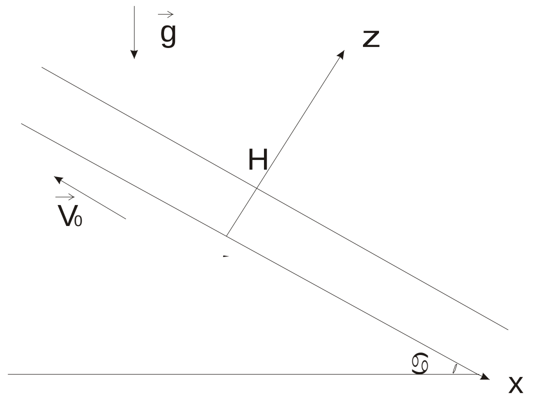
На свободной поверхности при $z = H$ должны выполняться граничные условия: $p = p_0$, $f_в = \eta\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$.

Ответ: $p = p_0 + \rho g\cos\alpha(H - z)$;

$$v = \frac{g\sin\alpha}{\nu} z\left(H - \frac{z}{2}\right);$$

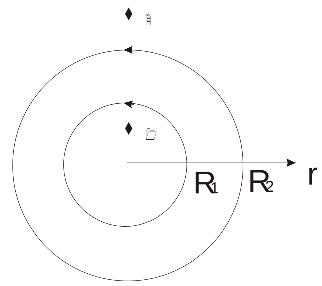
$$Q = \frac{gH^3\sin\alpha}{3\nu}.$$

8.13. Слой вязкой несжимаемой жидкости толщины H ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу – плоскостью, наклоненной под углом α к горизонту и двигающейся со скоростью $\vec{V}_0$. Определить движение жидкости, возникающее под влиянием силы тяжести: найти давление p, скорость v и объемный расход жидкости Q, (на единицу длины по y). При каком значении $\vec{V}_0$ объемный расход жидкости Q=0?



8.14. Рассчитать с учетом силы тяжести течение Пуазейля в круглой трубе, образующая которой наклонена к горизонту под углом α .

8.15. Найти профили скорости v и давления p в случае течения Куэтта между двумя соосными цилиндрами радиусов R_1 и R_2, вращающихся вокруг общей оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно.



Ответ: $v = \dfrac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \dfrac{R_1^2 R_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2} \dfrac{1}{r}$;

$$p(r) = p(R_1) + \rho R_1^2 \left[2\Omega_0 \Omega_p \ln \frac{r}{R_1} + \frac{\Omega_0^2}{2} \left(\frac{r^2}{R_1^2} - 1 \right) + \frac{\Omega_p^2}{2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) \right],$$

где $\Omega_0 = \dfrac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$, $\Omega_p = \dfrac{R_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}$.

8.16. Используя решение задачи 8.15, определить силу трения f , действующую на единицу поверхности внутреннего цилиндра и момент вязких сил M , действующий на единицу длины цилиндра.

Ответ: $f = -2\eta \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{R_2^2 - R_1^2} R_2^2$;

$$M = -\frac{4\pi\eta(\omega_1 - \omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

8.17. Скорость течения в центре трубы диаметра D и длины L равна v_0. Определить разность давлений на концах трубы Δp и объемный расход жидкости Q, если известна вязкость жидкости η.

Ответ: $\Delta p = \dfrac{16\eta L v_0}{D^2}$;

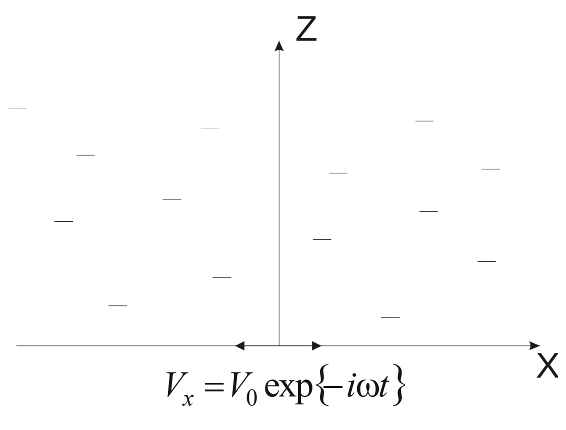
$$Q = \frac{\pi v_0 D^2}{8}.$$

8.18. Чему должна равняться разность давлений на концах нефтепровода длины L и радиуса R, чтобы нефть плотностью ρ и вязкостью η поступала в количестве Q?

Ответ: $\Delta p = \dfrac{8\eta L Q}{\pi R^4}$.

8.19. Бесконечная пластина, расположенная в плоскости xy и ограничивающая полупространство $z > 0$, заполненное однородной несжимаемой вязкой жидкостью, совершает гармонические колебания:

$$V_x = V_0 \exp\{-i\omega t\};\ V_y = V_z = 0.$$



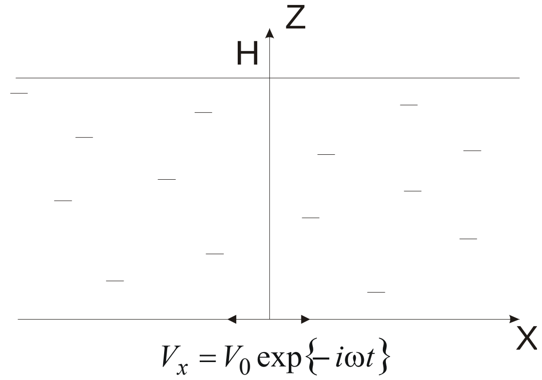
Получить выражение для скорости частиц жидкости $v = v_x(z)$, определить толщину скин-слоя δ и плотность вязкой силы, действующей на пластину, f.

Ответ: $v = V_0 \exp\left\{-\sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu}}z\right\}\exp\left\{i\left(\sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu}}z - \omega t\right)\right\}$;

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}};$$

$$f = V_0\sqrt{\omega\eta\rho}\exp\left\{-i\left(\omega t - \frac{3}{4}\pi\right)\right\}.$$

8.20. Получить выражение для вязких волн между параллельными стенками, отстоящими друг от друга на расстояние H, если одна из стенок покоится, а другая колеблется в своей плоскости по закону



$$V_x = V_0 \exp\{-i\omega t\};\ V_y = V_z = 0.$$

Найти амплитуду вязкой силы F, действующую на единицу площади неподвижной стенки.

Ответ: $v = V_0 \dfrac{\sin[k(H-z)]}{\sin[kH]}\exp\{-i\omega t\}$,

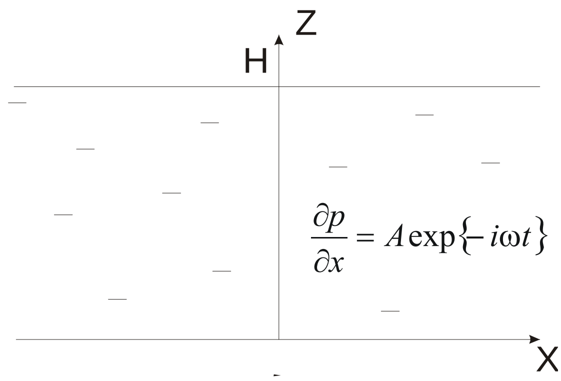
где $k = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu}}(1+i)$;

$$F = \frac{\eta V_0 \alpha}{H}\sqrt{2\left(ch^2\alpha - \cos^2\alpha\right)},\ \text{где}\ \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}H.$$

8.21. Слой вязкой несжимаемой жидкости толщины H соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей в своей плоскости гармонические колебания с частотой ω. Определить скорость движения жидкости при условии, что верхняя поверхность слоя является свободной.

Указание: корректно записать граничное условие на свободной поверхности (см. задачу 8.12).

8.22. Определить движение жидкости между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии H друг от друга, при наличии продольного градиента давления, изменяющегося со временем по гармоническому закону:



$$\frac{\partial p}{\partial x} = A \exp\{-i\omega t\}.$$

Ответ: $v = \dfrac{iA}{\omega\rho}\left[\dfrac{\sin[kz] + \sin[k(H-z)]}{\sin[kH]} - 1\right]\exp\{-i\omega t\}$,

где $k = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\nu}}(1+i)$.

8.23. Получить выражение для силы сопротивления, которую испытывает шар радиуса R при движении со скоростью U в вязкой несжимаемой жидкости в случае малых чисел Рейнольдса (формулу Стокса).

8.24. Шарик плотности ρ_1 падает в вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ_2 и вязкостью ν. Определить установившуюся скорость движения U, если радиус шарика равен R. Оценить число Рейнольдса Re.

Ответ: $U = \dfrac{2}{9}\dfrac{R^2 g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 \nu}$; $\qquad \mathrm{Re} = \dfrac{4}{9}\dfrac{R^3 g}{\nu^2}\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)$.

8.25. Оценить, для каких размеров песчинки, падающей в воде, можно использовать формулу Стокса.

Указание: Воспользоваться решением задачи 8.25, положив при этом $\rho_1/\rho_2 \approx 2$, $\nu = 0{,}01$ см^2/с, $\mathrm{Re} < 1$.

8.26. Капля воды падает с установившейся скоростью в воздухе. Оценить, для каких размеров капель можно использовать формулу Стокса для вычисления силы сопротивления.

Указание: Воспользоваться решением задачи 8.25, положив при этом $\rho_1/\rho_2 \approx 780$, $\nu = 0{,}15$ см^2/с, $\mathrm{Re} < 1$.

8.27. Образовавшийся в стакане жидкости пузырек радиуса R всплывает к поверхности со скоростью U. Оценить вязкость жидкости.

Ответ: $\nu = \dfrac{2}{9}\dfrac{R^2 g}{U}$.

Контрольные вопросы

1. Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости. Его представление в векторной форме и в проекциях в декартовой системе координат.
2. Тензор вязких напряжений. Его физический смысл и представление в декартовой системе координат.
3. Колебательные движения вязкой несжимаемой жидкости. Вязкие волны. Понятие скин - слоя
4. Пограничный слой.

9. Линейная акустика идеальной среды

Исходя из основных уравнений гидродинамики (см. главу 1), получим уравнение для звуковых волн малой амплитуды в идеальной среде.

Для этого запишем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 \tag{9.1}$$

и уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \tag{9.2}$$

где p - давление, ρ - плотность, $\vec{v}$ - скорость частицы.

Представим переменные p и ρ в виде:

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \tag{9.3}$$

где p_0, ρ_0 — постоянные равновесные давление и плотность, p', ρ' - их изменения в звуковой волне ($p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$).

Подставляя (9.3) в (9.1) и (9.2) и пренебрегая малыми величинами второго порядка относительно p', ρ' и скорости $\vec{v}$, получим линеаризованные уравнения для акустических величин:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 div(\vec{v}) = 0, \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \tag{9.5}$$

Звуковая волна в идеальной жидкости есть адиабатическое движение. При этом давление p зависит только от одной термодинамической величины, например от плотности ρ (баротропная среда): $p = p\,(\rho)$. Поэтому

$$p' = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_s \rho', \tag{9.6}$$

где s - энтропия. Тогда из (9.4) получим

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_s div(\vec{v}) = 0. \tag{9.7}$$

Введем потенциал скорости φ :

$$\vec{v} = grad\varphi. \tag{9.8}$$

Из уравнения (9.5) имеем

$$p' = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{9.9}$$

а из (9.7) - (9.9) находим волновое уравнение для потенциала φ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \tag{9.10}$$

в котором Δ - оператор Лапласа, c - скорость звука,

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}. \tag{9.11}$$

В случае плоской волны, распространяющейся по оси x, уравнение (9.10) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \tag{9.12}$$

Заметим, что условие применимости линеаризованных уравнений движения $p' \ll p_0$, $\rho' \ll \rho_0$ эквивалентно малости скорости движения частиц жидкости в волне по сравнению со скоростью звука: $v \ll c$, т.е. малости числа Маха (М = $v/c \ll 1$).

Найдем решение волнового уравнения для бегущей плоской волны и покажем, что звуковая волна является продольной.

Уравнение (9.12) имеет общее решение

$$\varphi(x,t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct),$$

где F_1 и F_2 - произвольные функции. Рассматривая, например, волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x, для потенциала скорости $\varphi(x,t)$ имеем

$$\varphi(x,t) = F(x - ct), \tag{9.13}$$

и, следовательно, картина возмущений распространяется в среде со скоростью c, называемой скоростью звука. Из формул (9.13) и (9.8) видно, что в бегущей волне колебательная скорость имеет единственную компоненту $v_x = v$. Это означает, что частицы среды в волне колеблются вдоль направления ее распространения, т.е. звуковая волна является продольной. При этом колебательная скорость v связана с приращениями давления p' и плотности ρ' простыми алгебраическими соотношениями.

Используя формулы (9.8) и (9.9), из (9.13) получаем

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(x - ct), \qquad p^{'} = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 c F(x - ct), \tag{9.14}$$

и, следовательно,

$$p^{'} \Big/ v^{'} = \rho_0 c. \tag{9.15}$$

Соотношение (9.15) иногда называют акустическим законом Ома, а величину $\rho_0 c$ - волновым сопротивлением.

Используя линеаризованное уравнение состояния (9.6), для возмущений плотности ρ' и колебательной скорости имеем

$$\frac{\rho^{'}}{\rho_0} = \frac{v}{c}, \tag{9.16}$$

Градиент акустического давления, как видно из формулы (9.5), коллинеарен вектору колебательной скорости и в силу продольного характера звуковой волны - направлению на источник звука. Таким образом, используя приемники градиента давления, можно определить направление прихода акустической волны.

Рассмотрим решение волнового уравнения для плоской монохроматической волны и определим соотношения между амплитудами давления и смещения, колебательной скорости и ускорения частиц. Решение волнового уравнения для давления в гармонической волне можно записать в виде

$$p'(x,t) = p'_o \cos(\omega t - kx), \tag{9.28}$$

где p'_o - амплитуда давления, ω - частота, $k = \omega / c$ —волновое число. Из (9.15) следует, что колебательная скорость находится в фазе с давлением

$$v(x,t) = v_o \cos(\omega t - kx), \qquad v_o = p'_o / (\rho_0 c) \tag{9.29}$$

Для амплитуды смещения частиц $\xi_0 = \int v dt$ и ускорения $\ddot{\xi}_0 = \partial v / \partial t$ имеем

$$\xi_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{p_0^{'}}{\rho_0 c\omega}, \qquad \ddot{\xi}_0 = \omega v_0 = \frac{p_0^{'}\omega}{\rho_0 c}. \qquad (9.30)$$

Часто используется эффективное среднеквадратичное давление $p_{эф}$, определяемое через среднее от квадрата звукового давления за один период волны $T = 2\pi/\omega$:

$$p_{эф}^2 = \frac{1}{T}\int p^2 dt = \frac{p_0^{'2}}{2}.$$

Следовательно,

$$p_{эф} = p_0^{'} \Big/ \sqrt{2}.$$

Для объемной плотности энергии и интенсивности (силы звука) плоской звуковой волны получим следующие выражения

$$E = \rho_0 v^2 = p^{'2} \Big/ (\rho_0 c^2), \qquad J = p^{'} v = cE = \rho_0 c\, v^2 = p^{'2} \Big/ (\rho_0 c). \qquad (9.31)$$

В гармонической волне (9.28) средняя за период сила звука равна

$$\bar{J} = p_0^{'2} \Big/ (2\rho_0 c) = p_{эф}^{'2} \Big/ (\rho_0 c) = \rho_0 c\, v^2 / 2. \qquad (9.32)$$

Примеры решения задач

1. В атмосферной акустике принято характеризовать уровень интенсивности $B = 10 \lg (J/J_{cm})$ относительно стандартного нулевого уровня с интенсивностью $J_{cm} = 10^{-12}$ Вт/м^2 . Чему равняется среднее звуковое давление p_{cm} в воздухе при нормальных условиях (атмосферное давление 10^5 Па, t = 0 °C) волны нулевой интенсивности (c = 332 м/с, ρ_0 = 1,26 кг/м3)?

Записать выражение для уровня звукового давления относительно стандартного давления $p_{ст}$.

Решение. Для эффективного звукового давления получаем

$$p_{ст} = (J_{ст}\,\rho_0 c)^{1/2} \approx 2{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{Па}.$$

Уровень звука при этом записывается как

$$B = 10\ \lg\,(J/J_{ст}) = 20\ \lg\,(p/p_{ст}).$$

2. Амплитуда звукового давления $p'_0 = 0{,}1$ Па. Найти уровень интенсивности в воздухе при температуре 20 °C и давлении 1 атм.

Решение. Используя определения

$$B = 10\ \lg\,(J/J_{ст}), \qquad J = p'^{\,2}_0/(2\rho_0 c), \qquad J_{ст} = 10^{-12}\ \text{Вт/м}^2,$$

и подставляя значения ρ_0 и c при t = 20 °C ($\rho_0 = 1{,}29$ кг/м^3 и $c = 340$ м/с), имеем $J = 1{,}14 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^2 . Следовательно, $B = 70{,}6$ дБ.

3. В гидроакустике уровень звукового давления принято отсчитывать относительно давления $p_н = 1$ мкПа $= 10^{-6}$ Па, $B_н = 20\ \lg\,(p/p_н)$. Найти формулу пересчета от $B_н$ к стандартному уровню интенсивности $J_{ст} = 10^{-12}$ Вт/м^2, соответствующему в воде ($\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $c = 1500$ м/с) эффективному давлению $p_{эф}$.

Решение. Найдем значение стандартного нулевого уровня:

$$J_{ст} = p_{эф}^2/(\rho_0 c).$$

Отсюда $p_{эф} = 1{,}22 \cdot 10^{-3}$ Па. Следовательно,

$$B_н = 20\ \lg(p/10^{-6}), \qquad B = 20\ \lg[p/(1{,}22 \cdot 10^{-3})],$$

из которых получаем

$$B_н = B - 61{,}72.$$

4. Найти условие, при котором распространение звуковой волны можно рассматривать как адиабатический процесс.

Решение. Распространение звуковой волны сопровождается изменением температуры. Температура увеличивается в тех областях, где среда подвергается адиабатическому сжатию, и уменьшается в областях адиабатического разрежения. Процесс распространения звука можно считать адиабатическим, если за время, равное периоду звуковой волны, тепло не успеет диффундировать на расстояния порядка длины волны λ. Иными словами, "длина температурной волны" λ_T (масштаб диффузии, соответствующий частоте f) должна быть малой по сравнению с длиной акустической волны $\lambda = c/f$.

Длина температурной волны $\lambda_T = 2\sqrt{\pi\chi / f}$ находится из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T(x = 0, t) = T_0 e^{-i\omega t},$$

решение которого при $x > 0$ имеет вид:

$$T = T_0 \exp(-kx) \exp(-i\omega t + ikx),$$

где $k = 2\pi/\lambda_T$_, χ - коэффициент температуропроводности.

Условие адиабатичности $\lambda > \lambda_T$ будет выполнено для частот

$$f < c^2 / (4\pi\chi),$$

Оценки показывают, что это условие хорошо выполняется в жидкостях и газах, вплоть до очень высоких частот. Так, в воздухе (числовые значения параметров $\chi = 2{,}8 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, $c = 330$ м/с) звук распространяется адиабатически при частотах $f \le 10^{12}$ Гц.

5. Выразить адиабатический модуль объемной упругости K_a, связывающий приращения давления и плотности

$$p' = K_a \rho' / \rho_0 = \beta^{-1} \rho' / \rho_0$$

через скорость звука c. Здесь где β_a - адиабатический коэффициент сжатия.

Решение. Согласно (9.6), малые возмущения давления и плотности в звуковой волне связаны соотношением

$$p' / \rho' = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_s = c^2.$$

Из формул задачи (9.10) получаем

$$K_a = \rho_0 c^2.$$

Таким образом, измеряя скорость звука и плотность среды, можно найти ее объемный модуль упругости. Такой способ оказывается наиболее эффективным для слабо сжимаемых сред - жидкостей и твердых тел. Заметим, что число Маха $M = v/c$ может быть также записано как

$$M = p'/\rho_0 = p'/K_a..$$

Поэтому величину K_a иногда называют характерным внутренним давлением среды.

6. Вывести формулу для скорости звука в идеальном газе.

Решение. Уравнение адиабатического процесса в идеальном газе имеет вид

$$p/\rho^{\gamma} = const = p_0/\rho_0^{\gamma},$$

где p_0 , ρ_0 - равновесные значения давления и плотности, $\gamma = c_p / c_v$ — показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Для того чтобы найти $(\partial p/\partial \rho)_s$, представим плотность и давление в виде (9.3). Тогда, линеаризуя предыдущее выражение, получаем

$$p' = (\gamma p_0/\rho_0)\rho' .$$

Используя уравнение состояния идеального газа, имеем

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu},$$

где R = 8,314 Дж/(моль*К) - универсальная газовая постоянная, μ - молекулярная масса, T - температура в Кельвинах.

Из приведенных выше формул для скорости звука следует:

$$c = \left[\gamma \frac{p_0}{\rho_0}\right]^{1/2} = \left[\gamma \frac{RT_0}{\mu}\right]^{1/2}.$$

Эта формула известна как формула Лапласа, так как именно Лаплас показал необходимость введения множителя γ для адиабатического распространения звука.

7. Какова скорость звука внутри цилиндра двигателя внутреннего сгорания сразу же после вспышки, когда давление p равно 200 атм и температура 1000 °С, если для газовой смеси $\gamma = c_p / c_v = 1{,}35$, а плотность смеси при 0 °С и атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па равна $\rho_0 = 0{,}0014$ г/см^3 ?

Решение. Считая процесс адиабатическим, находим плотность газовой смеси после вспышки $\rho = \rho_0 (p/p_0)^{1/\gamma}$.

Откуда скорость звука $c = (\gamma p/\rho)^{1/2} \approx 620$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Смещение частиц в плоской бегущей в воздухе звуковой волне имеет вид:

$$\xi(x,t)=5\bullet 10^{-8}\sin(1980t-6x)\ [м].$$

Найти: частоту колебаний; скорость распространения волны; длину волны; амплитуду скорости колебания каждой частицы; ускорение; амплитуду звукового давления. Для воздуха $\rho_0 c = 420$ *кг/(м²с).*

Ответ : $f = 315$ Гц, $c = 330$ м/с, $\lambda = 1$ м, $v_0 = 9{,}9\bullet 10^{-5}$ м/с, $a_0 = 0{,}2$ м/с^2, $p_0' = 0{,}04$ Па.

9.2. Плоская волна с амплитудой акустического давления $2*10^{-5}$ Па при 1000 Гц (порог слышимости) распространяется в воздухе. Найти значения амплитуды скорости и смещения частиц.

Ответ: $v_0 = 4{,}8\bullet 10^{-8}$ м/с, $\xi_0 = 7{,}6\bullet 10^{-12}$ м.

9.3. Сравнить колебательные скорости частиц в бегущей звуковой волне в воде и воздухе при одинаковом акустическом давлении. (Принять $\rho_0 c$ для воды равным $1{,}5\bullet 10^6$ кг/(м$^2\bullet$с), для воздуха 420 кг/(м$^2\bullet$с).

Ответ: $v_{возд} / v_{вода} \approx 3600$.

9.4. Амплитуда звукового давления в плоской гармонической волне равна $p'_0 = 2\bullet 10^{-4}$ Па . Вычислить амплитуды колебательной скорости и смещения, средние интенсивность и плотность энергии волны в воздухе на частоте $f = 1$ кГц .

Ответ: $v_0 = 4{,}7\bullet 10^{-7}$ м/с, $\xi_0 = 7\bullet 10^{-11}$ м, $J = 4{,}8\bullet 10^{-11}$ Вт/м^2 , $E = 1{,}4\bullet 10^{-13}$ Дж/м^3 .

9.5. Интенсивность звука J равна 0,1 Вт/м^2. Вычислить объемную плотность энергии E , давление p'_0 , смещение ξ_0 , скорость v_0 частиц в плоской волне на частоте f = 10 кГц в воде и в воздухе. Скорость звука в воде 1500 м/с, в воздухе 340 м/с.

Ответ: в воде: 6,7•10^{-5} Дж/м^3, 5,5•10^2 Па, 5,8•10^{-9} м, 3,7•10^{-4} м/с;

в воздухе: 3•10^{-4} Дж/м^3, 9,2 Па, 3,5•10^{-7} м, 2,2•10^{-2} м/с.

9.6. Интенсивность звука равна 2•10^{-4} Вт/м^2. Найти уровень интенсивности относительно стандартного нулевого уровня J_{cm} =10^{-12} Вт/м^2.

Ответ: B = 83 дБ.

9.7. Рассчитать адиабатический модуль объемной упругости (внутреннее давление) для воздуха (c = 330 м/с, ρ_0 = 1,3 кг/м^3, γ = 1,4) и воды (c = 1500 м/с, ρ_0 = 1000 кг/м^3).

Ответ. Для воздуха $K_a = \rho_0 c^2$ = 1,4•10^5 Па.

В случае идеального газа (см.задачу 9.12) внутреннее давление K_a связано с равновесным давлением p_0 формулой $p_0 = K_a / \gamma$, откуда p_0 = 1 атм.

В случае воды получаем гораздо большую величину K_a = 2,25•10^{9}Па = 23•10^3 атм. Поэтому для волн, распространяющихся в воде, линейное приближение справедливо в гораздо более широком диапазоне приращения давления, чем для волн, распространяющихся в воздухе.

9.8. Получить приближенную формулу для скорости звука в воздухе, учитывая, что γ = 1,4 и μ = 28,8 г/моль.

Ответ. Скорость звука (м/с) рассчитывается по формуле

$$c \approx 20 T_0^{1/2},$$

где T_0 - температура в Кельвинах.

9.9. При какой температуре скорость звука в воздухе удвоится по сравнению со скоростью при 0°С и при какой станет в два раза меньше? Скорость звука при t =0°С равна $c_0 = 330$ м/с.

Ответ. $c = 2\, c_0$ при t = 819°С,

c = $c_0 /2$ при t = - 205°С (если бы воздух оставался идеальным газом).

9.10. В два свистка одинаковой длины вдуваются: воздух, охлажденный до температуры жидкого воздуха (t_1 = -180°С), и теплый воздух. Один свисток издает звук на октаву выше, чем другой. Какова должна быть температура воздуха t_2, вдуваемого во второй свисток?

Ответ. Отношение резонансных частот свистков пропорционально отношению скоростей звука в них, отсюда получаем t_2 = 99°С.

9.11. Рассчитать "звуковой барьер" самолета (когда скорость его равна скорости звука) на высоте 9 км, где температура -70°С, и сравнить его со звуковым барьером при 0°С на уровне моря. Зависит ли барьер от атмосферного давления?

Ответ. Около 1000 и 1200 км/ч независимо от давления.

9.12. При интерференции двух плоских звуковых волн, излучаемых двумя одинаковыми закрытыми трубами длиной l=60 см, вследствие различия температуры воздуха в них создается 1 биение в секунду. Температура воздуха в трубе, дающей более низкий тон, равна 16 °С.

Какова температура воздуха в другой трубе? Считать, что генерируется первая мода колебаний закрытой трубы, т.е. длина волны звука $\lambda=l/2$.

Ответ: t_2 = 16,5 °С .

Контрольные вопросы

1. Основные уравнения гидродинамики сжимаемой жидкости в линейном приближении.
2. Звуковые волны.
3. Энергия и импульс звуковых волн.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. М.:Наука, 1986. 736 с.
2. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.:Наука, 1982. 335 с.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1, 2. М.:Наука, 1963.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / М.:Наука, 1973. 847 с.
5. Акустика в задачах. / Под ред. Гурбатова С.Н., Руденко О.В. М.:Наука, Физматлит, 1996. 336 с.
6. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1, 2: / Под ред. Эглит М. Э. М.: “Московский Лицей”, 1996.

Оглавление