

**МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ

И.С. Загузов, К.А. Поляков

**Математическое моделирование течений вязкой жидкости
вблизи твердых поверхностей**

**Учебное пособие для студентов
механико - математического факультета
специальности «прикладная математика»**

**Издательство "Самарский университет"
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра математического моделирования в механике

И.С. Загузов, К.А. Поляков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
ВБЛИЗИ ТВЕРДЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Учебное пособие

ББК 22.253

3 148

УДК 532.517

Загузов И.С., Поляков К.А. Математическое моделирование течений вязкой жидкости вблизи твердых поверхностей. Самара: Изд-во Самарского университета, 1999.с.

ISBN. 5-230-06019-0

В учебном пособии к спецкурсу "Математические модели в теории пограничного слоя" даны теоретические основы аэрогидромеханических течений несжимаемой вязкой жидкости вблизи ограниченных твердых поверхностей. Приведены математические модели течения вязкой жидкости в ламинарном пограничном слое и осредненного турбулентного движения. Рассмотрены решения актуальных задач течений в трубах и обтеканий профилей тел произвольной формы.

Пособие предназначено для студентов механико - математических факультетов университетов (специальность - прикладная математика) и может быть полезным для научных работников в области аэрогидромеханики.

Рецензенты: Шахматов Евгений Владимирович, доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе Самарского государственного аэрокосмического университета,
Астафьев Владимир Иванович, доктор физико - математических наук, профессор, проректор по научной работе Самарского государственного университета.

3 $\frac{1603040100-}{6К4(03)99}$ без объявл,

ISBN. 5-230-06019-0

© Загузов И.С., Поляков К.А. 1999

ВВЕДЕНИЕ

В конце XIX столетия наука о движении жидкости распалась на две ветви, почти не связанные между собой. С одной стороны, достигла большого совершенства теоретическая гидродинамика, исходившая из уравнений Эйлера для движения идеальной жидкости. Однако результаты этой так называемой классической гидромеханики во многом резко противоречили опыту. Особенно резкое противоречие получалось в весьма важных вопросах о потере давления в трубах и каналах и о сопротивлении, которое оказывает жидкость движущемуся в ней телу; поэтому классическая гидромеханика имела для практики лишь небольшое значение, что и побудило создать для решения важных проблем, выдвигавшихся быстро развивавшейся техникой, свою собственную науку о движении жидкости, так называемую гидравлику. Эта наука, принявшая резко выраженный эмпирический характер, опиралась на большое число экспериментальных результатов и очень сильно отличалась от теоретической гидродинамики как своими методами, так и своей целью.

В начале настоящего столетия Л.Прандтль нашел путь, позволивший вновь соединить в одно целое указанные выше далеко отошедшие друг от друга ветви науки о движении жидкости. Кроме того, связав теорию с практикой, Л.Прандтль положил начало направлению, дальнейшее развитие которого в современной гидродинамике привело на протяжении первой половины настоящего столетия к неожиданным успехам. В этом состоит большая заслуга Л.Прандтля. Правда, уже давно было известно, что резкое расхождение между результатами классической гидродинамики и действительностью возникало в очень многих случаях вследствие пренебрежения в теоретических исследованиях вязкостью жидкости. Тогда же были составлены уравнения движения жидкости с учетом трения, так называемые уравнения Навье - Стокса для движения вязкой жидкости. Однако эти уравнения вследствие больших математических трудностей не удалось применить к теоретическому исследованию движений жидкости с трением (за исключением немногих частных случаев). Между тем для воды и воздуха, т.е. для жидкостей, особенно важных в технике, коэффициент вязкости весьма мал, и, следовательно, силы трения, обусловленные вязкостью, получаются в целом очень небольшими по сравнению с остальными силами (силою тяжести и силами давления); поэтому долгое время не удавалось понять, каким образом малые силы трения, которые в классической теории считалось возможным отбрасывать, оказывали тем не менее

решающее влияние на процесс движения.

В 1904 г. Л. Прандтль в своем докладе "О движении жидкости при очень малом трении", прочитанном на математическом конгрессе, указал путь, сделавший доступными теоретические, исследования течений жидкости с трением в практически важных случаях. А именно, исходя из теоретических соображений и некоторых простых экспериментов, Л. Прандтль показал, что течение в окрестности тела можно разделить на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела (пограничный слой), где трение играет существенную роль, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать. Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением. Свои теоретические соображения Л. Прандтль уже тогда подтвердил некоторыми очень простыми опытами в небольшом, построенном им самим, гидроканале. Таким образом, гипотеза Л. Прандтля положила начало восстановлению утраченной связи между теорией и практикой. Теория пограничного слоя Прандтля оказалась чрезвычайно плодотворной и сразу же после своего опубликования дала мощный толчок к дальнейшему развитию теоретических исследований[1]. Под влиянием задач, поставленных в нашем столетии расцветом авиационной и космической техники, новая теория весьма быстро развивалась и вскоре превратилась, вместе с другими важными теориями - теорией крыла и теорией движения газа при больших скоростях, - в основу современной механики жидкости и газа.

В качестве областей применения теории пограничного слоя упомянем о вычислении сопротивления, возникающего при обтекании тела вследствие трения жидкости о поверхность тела (корабля, профиля крыла, фюзеляжа самолета или корпуса ракеты и т.д.). Особенностью пограничного слоя является его свойство допускать при некоторых обстоятельствах возникновение возвратного течения в непосредственной близости от стенки. С этим свойством связаны отрыв пограничного слоя от тела и возникновение более или менее сильных вихрей на кормовой части обтекаемого тела. Эти явления обуславливают значительное изменение распределения давления вдоль поверхности обтекаемого тела по сравнению с распределением давления в потоке без трения, что приводит к возникновению так называемого сопротивления давления обтекаемого тела.

Теория пограничного слоя указывает путь к вычислению этого сопротивления. Далее, теория пограничного слоя дает ответ на важный вопрос о том, какую форму должно иметь обтекаемое тело для того, чтобы не возникало вредного отрыва потока от тела. Однако отрыв потока от тела может возникать не только при обтекании тела, но и при течении жидкости в канале. Следовательно, теория пограничного слоя дает возможность исследовать особенности течения в межлопаточных каналах гидравлических и газовых машин (насосов, турбин). Только на основе теории пограничного слоя могут быть объяснены явления, возникающие при достижении подъемной силой крыла максимального значения и также связанные с отрывом потока. Наконец, теплопередача между телом и обтекающей его жидкостью (или газом) также связана с особенностями течения в пограничном слое.

Вначале теория пограничного слоя развивалась главным образом в применении к ламинарным течениям несжимаемой жидкости. Эта область применения теории пограничного слоя была в дальнейшем столь глубоко развита в многочисленных исследованиях, что в настоящее время ее можно считать в основных чертах исчерпанной. Позже теория пограничного слоя была распространена также на практически более важные случаи несжимаемых турбулентных течений в пограничных слоях. Существенный успех в этой области, был достигнут только после введения Л. Прандтлем понятия пути перемешивания. Введение этого понятия наряду с выполнением систематических опытов позволило применить теорию пограничного слоя для теоретического исследования турбулентных течений. В дальнейшем, под влиянием сильного возрастания скоростей в аэрокосмической технике, были тщательно исследованы пограничные слои для движений сжимаемой среды. При таких движениях, наряду с динамическим пограничным слоем, образуется температурный пограничный слой, играющий большую роль в теплопередаче между текущей средой и обтекаемым телом. При больших числах Маха тепло, выделяющееся вследствие трения между движущимся телом и средой, приводит к сильному нагреванию поверхности обтекаемого тела. Расчет этого нагревания представляет собой трудную проблему, особенно для ракет и искусственных спутников ("тепловой барьер").

Все реальные жидкости обладают вязкостью и поэтому их называют вязкими. В некоторых задачах влиянием вязкости можно пренебречь и ввести понятие - идеальная жидкость, вязкость которой равна нулю[2]. Для всех реальных

жидкостей и газов такие физические характеристики, как вязкость, теплоемкость, теплопроводность и т.д. зависят от их параметров, например, от температуры. Но во многих задачах с достаточной степенью точности можно полагать эти величины постоянными.

Идеальная жидкость - это жидкость, не обладающая трением. При движении жидкости без трения между отдельными ее соприкасающимися слоями возникают только нормальные силы (давления), касательные же силы (напряжения сдвига) отсутствуют. Это означает, что идеальная жидкость не оказывает изменению формы никакого внутреннего сопротивления.

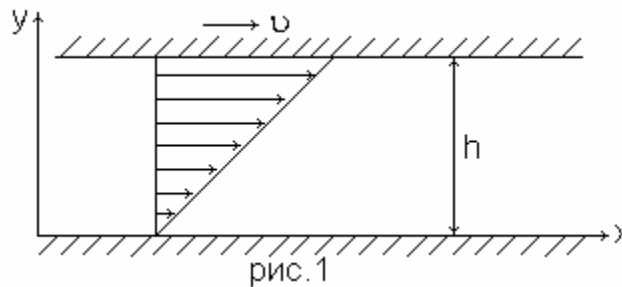
Теория движения идеальной жидкости математически очень глубоко разработана и во многих случаях дает вполне удовлетворительную картину действительных движений. В то же время теория идеальной жидкости совершенно бессильна для решения проблемы изучения сопротивления тела, движущегося в жидкости, так как в этом случае она приводит к результату, что тело, равномерно движущееся в неограниченно распространенной жидкости, не испытывает никакого сопротивления (парадокс Даламбера). Такой совершенно неприемлемый результат теории идеальной жидкости объясняется тем, что в действительных жидкостях между жидкостью и поверхностью обтекаемого тела действуют не только нормальные, но и касательные силы. Эти касательные силы, или, другими словами, силы трения действительных жидкостей, связаны как раз с тем свойством жидкости, которое и называется вязкостью.

В идеальной жидкости касательные силы отсутствуют, поэтому на поверхности соприкосновения твердого тела с жидкостью в общем случае имеется разность касательных скоростей, т.е. происходит скольжение жидкости вдоль стенки. Напротив, в действительной жидкости на обтекаемую твердую стенку передаются касательные силы (силы трения), и это приводит к тому, что жидкость прилипает к стенке.

Наличие касательных напряжений (напряжений сдвига) и прилипание жидкости к твердым стенкам существенно отличают действительную жидкость от идеальной. Некоторые жидкости, важные в практическом отношении, например, вода и, особенно, воздух, обладают малой вязкостью. Течения таких маловязких жидкостей во многих случаях хорошо совпадают с течениями идеальной жидкости, так как касательные силы в них в общем являются очень малыми. Поэтому в теории идеальной жидкости вязкость совершенно не учитывают,

поскольку это приводит к существенному упрощению уравнений движения, что позволяет построить широкую математическую теорию. Необходимо, однако, подчеркнуть, что в жидкостях даже с очень малой вязкостью, в противоположность идеальной жидкости, прилипание к стенкам все же существует, что является физической причиной указанного выше несоответствия между законами сопротивления для действительной и идеальной жидкостей (парадокс Даламбера).

Сущность вязкости жидкости можно уяснить на опыте Куэтта. Рассмотрим течение между двумя очень длинными параллельными плоскими пластинами, из которых одна, например, нижняя, неподвижна, в то время как другая движется в собственной плоскости с постоянной скоростью u (см. рис 1). Обозначим расстояние между пластинами через h



и предположим, что давление во всем пространстве, занимаемом жидкостью, постоянно. Опыт показывает, что жидкость прилипает к обеим пластинам, следовательно, непосредственно около нижней пластины скорость жидкости равна нулю, а непосредственно около верхней пластины она совпадает со скоростью u верхней пластины. Далее, опыт показывает, что в пространстве между пластинами имеет место линейное распределение скоростей, т.е. скорость пропорциональна расстоянию "y" от нижней пластины и выражается формулой

$$v(y) = \frac{y}{h} u$$

Для того, чтобы существовало такое состояние движения, к жидкости со стороны верхней пластины должна быть приложена касательная сила в направлении движения, уравновешивающая силы трения жидкости. На основании результатов опыта эта сила (отнесенная к единице площади пластины) пропорциональна скорости u верхней пластины и обратно пропорциональна расстоянию h между пластинами. Следовательно, сила трения τ , отнесенная к единице площади, т.е. касательное напряжение, пропорционально отношению u/h ,

вместо которого можно взять отношение dv/dy . Множитель пропорциональности между τ и dv/dy , обозначенный через μ , зависит от природы жидкости. Он мал для так называемых маловязких жидкостей, например, для воды и спирта, и, напротив, велик для очень вязких жидкостей, например, для масла и глицерина. Таким образом, имеем элементарный закон трения жидкости в следующем виде:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Величина μ [Па·с] называется динамическим коэффициентом вязкости и представляет собой физическую характеристику жидкости. Закон трения, выражаемый вышеприведенным равенством, называют законом Ньютона.

Необходимо подчеркнуть, что рассмотренное нами движение представляет очень простой, частный случай. Течение, изображенное на рис.1, называется движением чистого сдвига.

Во многих движениях жидкости, где наряду с силами вязкости действуют также силы инерции, важную роль играет отношение вязкости μ к плотности ρ , называемое кинематическим коэффициентом вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \left[\frac{\text{см}^2}{\text{с}} - \text{С т о к с} \right]$$

Необходимо отметить, что динамическая вязкость сильно зависит от температуры, причем для жидкостей при повышении температуры она уменьшается, а для газов - возрастает. Давление мало влияет на значения μ .

1. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. Понятие о пограничном слое

Под пограничным слоем понимают тонкую при известных условиях в поперечном направлении к потоку область течения, где, в отличие от окружающего ее безвихревого потока, движение является вихревым и характеризуется сосредоточенными в этой области резкими изменениями скорости (скоростной пограничный слой), температуры (температурный пограничный слой), концентрации примеси (концентрационный или диффузионный пограничный слой). Скоростным (или динамическим) пограничным слоем называют тонкий слой жидкости, прилегающий к поверхности обтекаемого тела и заторможенный вследствие трения. Температурным (или тепловым) пограничным слоем называется примыкающая к поверхности тела область течения, в которой температура жидкости изменяется от ее значения на стенке до значения температуры внешнего потока жидкости. При этом температура стенки и температура жидкости у стенки принимаются равными друг другу. Диффузионным пограничным слоем называется область течения вблизи стенки, в которой происходит изменение концентрации примеси от ее значения на стенке до значения во внешнем потоке.

Различают ламинарные и турбулентные пограничные слои в зависимости от ламинарного или турбулентного режима течения в них. Основным условием образования скоростных ламинарных погранслоев является малая вязкость жидкости, или точнее, большое значение числа Рейнольдса

$$Re = \frac{v \cdot \ell}{\nu}$$

(v - скорость потока; ℓ - характерный размер), не достигающее, однако, той критической величины, при которой режим течения в пограничном слое становится турбулентным. Аналогично для температурных слоев подобным условием становится достижение больших значений числа Пекле $Pe = Pr \cdot Re$ (число Прандтля

$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$, где λ - коэффициент теплопроводности, c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении) , для концентрационных слоев - больших значений диффузионного числа Пекле Pe_d .

Физическая картина образования пограничных слоев на твердых поверхностях состоит в следующем. Однородный безвихревой поток, достигнув поверхности твердого тела, "прилипает" к нему частицами, непосредственно соприкасающимися с поверхностью тела, в то время как соседние слои продолжают двигаться с резко увеличивающимися по мере удаления от поверхности скоростями, что приводит к завихренности потока. Образовавшиеся вблизи поверхности вихри, с одной стороны, сносятся набегающим потоком, участвуя в конвекции, а с другой - диффундируют в жидкость, окружающую тело. Если конвекция велика по сравнению с диффузией (что соответствует большим числам Рейнольдса), на поверхности сохраняется весьма тонкий слой заметно завихренной жидкости - так называемый пристенный пограничный слой.

Имея некоторую начальную завихренность, возникшую при выходе из сопла или сходе с поверхности обтекаемого тела, аналогично образуются "свободные" пограничные слои: "затопленные струи" и "следы" за кормой тела.

Под толщиной пограничного слоя δ подразумевают расстояние от поверхности обтекаемого тела до такой точки в потоке ($y=\delta$), где практически с заданной степенью приближения можно принять продольную скорость в пограничном слое равной ее значению в той же точке внешнего безвихревого потока. Геометрическое место таких точек дает приближенное представление о внешней границе пограничного слоя.

Необходимо отметить, что безразмерная толщина пограничного слоя $\bar{\delta} = \frac{\delta}{l} \ll 1$, что эквивалентно $\delta \ll l$, т.е. поперечные размеры в пограничном слое значительно меньше продольных (l - продольный размер обтекаемого тела). Исходя из предположения, высказанного Прандтлем, что силы инерции и силы вязкости внутри пограничного слоя одинакового порядка, и учитывая, что порядок сил вязкости на единицу объема внутри пограничного слоя будет равен $\mu \frac{v}{\delta^2}$ (по

формуле $\frac{\tau}{\delta} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{1}{\delta}$), а порядок сил инерции - $\rho \frac{v^2}{l}$

(в соответствии с выражением $\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$), получим:

$$\mu \frac{v}{\delta^2} : \frac{\rho v^2}{l} \sim 1 \text{ или } \frac{\mu v l}{\delta^2 \rho v^2} \sim 1, \text{ откуда } \frac{\delta^2}{l^2} \sim \frac{v}{\nu l} = \frac{1}{Re}$$

(где знак \sim означает порядок величины).

В результате получаем первое основное свойство ламинарного пограничного слоя: $\bar{\delta} = \frac{\delta}{\ell} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$, т.е. безразмерная толщина пограничного слоя обратно пропорциональна $\sqrt{\text{Re}}$.

Полученное равенство выражает общий для всех плоских, стационарных ламинарных пограничных слоев закон изменения их относительных толщин обратно пропорционально корню квадратному из рейнольдсова числа потока.

Опыт показывает, что в потоках вязких жидкостей или газов около поверхности твердого тела действие сил вязкости в разных областях течения проявляется неодинаково. Оно проявляется заметно там, где возникают большие поперечные градиенты скорости и, как следствие, касательные напряжения велики. По мере увеличения расстояния от стенки действие сил вязкости ослабевает и становится малым на сравнительно небольшом удалении. В обычных условиях течения скорость частиц жидкости v относительно обтекаемой поверхности на самой поверхности равна нулю. (Необходимо заметить, что область течения, в которой газ можно рассматривать как сплошную среду, прилипающую к обтекаемой поверхности, характеризуют условием $M < 0.01\sqrt{\text{Re}}$. В сильно разреженных газах скорость на стенке не равна нулю). С увеличением расстояния от стенки скорость обтекания быстро увеличивается, приближаясь к скорости внешнего потока v_∞ , где поперечные градиенты скорости практически равны нулю, а касательные напряжения, возникающие вследствие трения, пренебрежимо малы. Течение в области, удаленной от поверхности, можно считать совпадающим с потенциальным течением идеальной жидкости и применять к нему закономерности теории идеальной жидкости. В пределах пограничного слоя касательное напряжение от трения очень велико даже при малой вязкости, поскольку очень велик градиент скорости в направлении, перпендикулярном поверхности тела. Во внешнем потоке инерционные силы преобладают над силами вязкости, поэтому уравнения Навье - Стокса переходят в уравнения движения идеальной жидкости. Уравнения Стокса движения реальной, вязкой несжимаемой жидкости отличаются от уравнений Эйлера движения идеальной жидкости наличием члена $\mu \nabla^2 \vec{v}$, представляющего влияние вязкости. С математической стороны, этот член меняет общий характер дифференциальных уравнений движения, повышает их порядок.

Кроме того, что особенно существенно, к граничному условию непроницаемости твердых стенок (нормальная скорость относительно стенки равна нулю) прибавляется новое граничное условие - отсутствие скольжения жидкости на стенке (составляющая скорости в касательной плоскости к стенке равна нулю). Можно показать, что уравнения Эйлера вообще не имеют решений, удовлетворяющих последнему граничному условию, однако опыты показывают, что распределение давлений по поверхности хорошо обтекаемого крылового профиля и картина линий тока вокруг него мало отличаются от теоретически рассчитанных по формулам безвихревого обтекания идеальной жидкостью. Этот важный экспериментальный факт объясняется тем, что при сравнительно больших числах Re , характерных для практических (в авиации, кораблестроении, турбостроении и т.д.) обтеканий тел, область потока, в которой проявляется влияние вязкости, сводится к весьма тонкому по сравнению с размерами обтекаемого тела пограничному слою, расположенному непосредственно вблизи поверхности тела и распространяющемуся вниз по потоку за телом в виде так называемого аэродинамического следа (рис. 2).

Вне тонкого, постепенно увеличивающегося по толщине вниз по потоку пограничного слоя реальная жидкость ведет себя как идеальная;



рис. 2

характер движения в ней (слабая по сравнению с пограничным слоем и аэродинамическим следом завихренность) не может привести к сколько-нибудь значительным проявлениям сил вязкости. Наоборот, в пограничном слое, где касательные к стенке составляющие скорости резко меняются от нуля до величины порядка скорости набегающего потока, за счет больших величин производных от скорости по нормам к поверхности тела возникают значительные силы вязкости

($\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$), оказывающие резкое влияние на общий характер движения жидкости в

пограничном слое. В аэродинамическом следе нет тормозящего влияния твердых стенок, но в нем происходит также связанное с вязкостью вырождение созданного на протяжении пограничного слоя течения в однородный поток вдалеке за телом.

Принимая жидкость вне пограничного слоя и аэродинамического следа за идеальную, можно считать движение в этой области безвихревым, потенциальным. Только пройдя сквозь область пограничного слоя на поверхности обтекаемого тела, поток становится вихревым и затем, уже оставив тело и попав в область аэродинамического следа, постепенно теряет полученную завихренность, исчезающую вследствие диффузии, причем энергия вихрей превращается в тепло, рассеивающееся благодаря теплопроводности.

Как показывают непосредственные измерения, пограничный слой при тех больших значениях чисел Re , с которыми приходится иметь дело на практике, очень тонок. Возрастая по толщине от носка крыла к его хвосту, пограничный слой даже в точке максимальной толщины слоя вблизи хвоста крыла, достигает обычно лишь порядка сотых частей хорды. Так, на крыле самолета с хордой 1,5-2 м пограничный слой на режиме максимальной скорости имеет порядок нескольких сантиметров, а на корабле, длина которого имеет порядок 100 м, может достигать толщины 1 м. Такой тонкий сравнительно с размерами тела слой не может произвести значительных возмущений во внешнем по отношению к нему безвихревом потоке, чем и объясняется совпадение картин обтекания тел реальной и идеальной жидкостью. Важно отметить, что характерная для движения вязкой жидкости в тонких слоях неизменность давления в поперечном к потоку направлении приводит к тому, что давление на внешней границе пограничного слоя передается сквозь пограничный слой без изменений на поверхность обтекаемого тела.

В приведенном рассуждении терминам границы и толщины пограничного слоя не придается точного количественного смысла. Эти понятия лишь качественно характеризуют поперечный размер области, где скорости от нулевого значения на стенке изменяются до величины порядка скоростей внешнего потока. Так, например, под толщиной погранслоя можно подразумевать такое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости внешнего потока на 1%. По свойству вязкости жидкости тормозящее влияние стенки распространяется на

всю область движущейся жидкости, однако влияние это имеет асимптотический характер и практически исчезает на конечном расстоянии от поверхности тела, что и позволяет в допустимом приближении говорить о толщине пограничного слоя и о его внешней границе. Следует обратить внимание на то, что эта граница не совпадает с какой-нибудь линией тока. Линии тока внешнего безвихревого потока входят в пограничный слой, пересекая его границы.

Малость толщины пограничного слоя по сравнению с протяженностью обтекаемого тела позволяет упростить уравнения Стокса движения вязкой жидкости в области погранслоя, заменив их некоторой приближенной системой уравнений.

Уравнения плоского движения вязкой жидкости в пограничном слое были получены впервые Прандтлем. Рассмотрим эти уравнения применительно к ламинарному пограничному слою.

1.2. Ламинарный пограничный слой в несжимаемой жидкости

Он образуется при больших числах Re , при которых уравнения движения Навье-Стокса превращаются в уравнения Эйлера. При этом порядок уравнений Эйлера ниже, чем у уравнений Стокса. Такой прием можно использовать для внешней (вне пограничного слоя) области потока с обычными для уравнений Эйлера граничными условиями равенства нулю нормальной составляющей скорости на поверхности тела (условие непроницаемости поверхности) и задания скорости в бесконечном удалении от тела. Это означает, что во внешней области жидкость рассматривается как идеальная (невязкая). В пограничном же слое, имеющем поперечную к потоку толщину порядка $\delta \sim 1/\sqrt{Re}$ происходит падение скорости потока, и главным граничным условием является равенство нулю касательной составляющей скорости на поверхности обтекаемого тела (условие "прилипания"). Падение скорости в погранслое обуславливается вязкостью жидкости, которой здесь пренебречь нельзя, несмотря на большие значения чисел Re . Математически это проявляется в том, что градиенты скорости в погранслое велики и поэтому вязкие члены в уравнениях движения, содержащие производные от скорости по координатам, конечны, несмотря на малость коэффициента вязкости μ . Поэтому во внутренней (определяемой погранслоем) вязкой области потока порядок

уравнений, определяемый наличием вязких членов, должен быта сохранен и граничное условие "прилипания" жидкости к твердой стенке должно быть удовлетворено. Оценка сравнительной величины отдельных членов уравнений Стокса во внутренней области потока показывает, что в ней уравнения Стокса, относящиеся к эллиптическому типу, могут быть упрощены и сведены к уравнениям параболического типа, что правильно отражает особенности движения вязкой жидкости в погранслое.

В классической постановке теории пограничного слоя предполагается, что движение невязкого потока во внешней области заранее рассчитано, а внутреннее решение (для погранслоя) подчинено условию "прилипания" вязкого потока на твердой стенке и должно асимптотически переходить во внешнее решение при удалении от стенки.

Тот факт, что влияние вязкости жидкости должно сказываться лишь вблизи самой обтекаемой поверхности, был указан еще Д.И.Менделеевым в 1880 году в его исследованиях по сопротивлению жидкостей движущимся телам. Математическая теория пограничного слоя была дана Л.Прандтлем в 1904 году.

Изучение движения вязкой жидкости в области пограничного слоя основывается на интегрировании уравнений пограничного слоя, выведенных Прандтлем. Решение этих уравнений (как будет показано ниже) представляется первым членом разложения решения уравнений Стокса в ряд по степеням малого безразмерного параметра (отношения масштаба толщины пограничного слоя к характерному для потока в целом масштабу обтекаемого тела, например, хорде крыла), имеющего порядок $1/\sqrt{Re}$.

Пограничный слой играет основную роль в процессах динамического (сопротивление, подъемная сила) и термодинамического (тепло- и массообмен) взаимодействия потока реальной жидкости или газа с омываемым ими твердым телом.

1.3 Математическая модель движения вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое

Выведем уравнения пограничного слоя в случае плоского движения несжимаемой вязкой жидкости, отвлекаясь для простоты от действия объемных (массовых) сил.

Кроме того, пользуясь малостью толщины пограничного слоя по сравнению с размерами твердого тела ($\delta \ll L$, это концепция Прандтля), а тем самым и радиусами кривизны его поверхности, будем считать сетку параллельных контуров тела кривых и нормалей к ним (см. рис. 3) прямолинейной декартовой прямоугольной системой координат (x, y) ; начало координат поместим в переднюю критическую точку O обтекаемого тела. Тогда уравнения Навье-Стокса в этой системе координат будут иметь обычный для стационарного плоского движения несжимаемой жидкости вид:

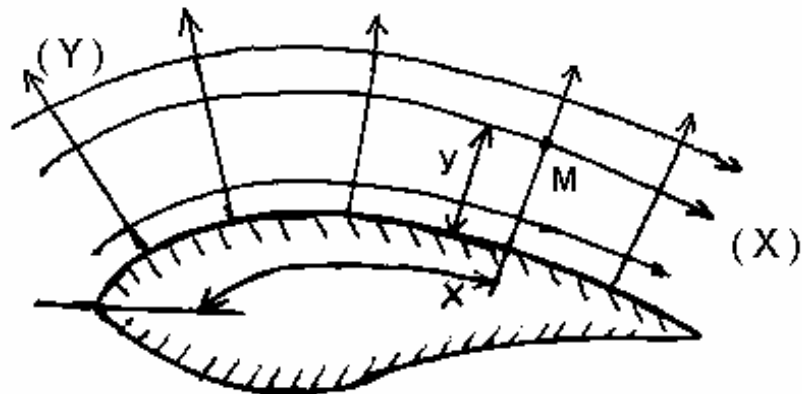


рис. 3

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

и уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Левые части первых двух уравнений - нелинейные, что делает задачу весьма сложной. Вводя теорию пограничного слоя, можно в значительной части упростить математическую формулировку задачи плоского обтекания тела дозвуковым потоком.

Используем далее метод аффинных преобразований, у которых собственные масштабы продольных и поперечных координат будут различными (в отличие от подобных преобразований, где существует один собственный масштаб по всем координатам).

Обозначим собственный масштаб продольных величин через ℓ_x , собственный

масштаб поперечных величин - через l_y . Соответственно этому, масштабы для чисел Маха запишутся как $M_{x,\infty}$ и $M_{y,\infty}$ а для скоростей потока - $v_{x,\infty}$; $v_{y,\infty}$. Тогда:

$$x = l_x \cdot x_1; \quad y = l_y \cdot y_1; \quad v_x = v_{x,\infty} \cdot v_{x_1}; \quad v_y = v_{y,\infty} \cdot v_{y_1}.$$

Введем также значение $\rho = \rho_\infty \cdot \rho_1$. Параметры $x_1, y_1, v_{x_1}, v_{y_1}, \rho_1$ - безразмерные величины.

Подставляя эти выражения в систему уравнений (1.1) - (1.3), получим:

$$\frac{v_{x,\infty}^2}{l_x} v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{v_{x,\infty} v_{y,\infty}}{l_y} v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} = -\frac{p_\infty}{\rho l_x} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{v v_{x,\infty}}{l_x^2} \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2} + \frac{v v_{x,\infty}}{l_y^2} \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial y_1^2}; \quad (1.4)$$

$$\frac{v_{x,\infty} v_{y,\infty}}{l_x} v_{x_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial x_1} + \frac{v_{y,\infty}^2}{l_y} v_{y_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = -\frac{p_\infty}{\rho l_y} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{v v_{y,\infty}}{l_x^2} \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial x_1^2} + \frac{v v_{y,\infty}}{l_y^2} \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial y_1^2}; \quad (1.5)$$

$$\frac{v_{x,\infty}}{l_x} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{v_{y,\infty}}{l_y} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = 0; \quad (1.6)$$

Приведем систему уравнений (1.4)-(1.6) к безразмерному виду, используя правило Бертрана, которое гласит, что если уравнение описывает физический процесс, то размерности правой и левой частей уравнения одинаковы. Тогда, разделив уравнение (1.4) на член $\frac{v_{x,\infty}^2}{l_x}$, уравнение (1.5) - на $\frac{v_{x,\infty} v_{y,\infty}}{l_x}$, а уравнение (1.6) - на

$\frac{v_{x,\infty}}{l_x}$, получим безразмерную систему уравнений:

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{v_{y,\infty} \cdot l_x}{v_{x,\infty} \cdot l_y} v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} = -\frac{p_\infty}{\rho v_{x,\infty}^2} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{v}{l_x v_{x,\infty}} \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2} + \frac{v \cdot l_x}{v_{x,\infty} \cdot l_y^2} \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial y_1^2}; \quad (1.7)$$

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial x_1} + \frac{v_{y,\infty} \cdot l_x}{v_{x,\infty} \cdot l_y} v_{y_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = -\frac{p_\infty \cdot l_x}{\rho \cdot l_y v_{x,\infty} v_{y,\infty}} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{v}{l_x v_{x,\infty}} \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial x_1^2} + \frac{v \cdot l_x}{v_{x,\infty} \cdot l_y^2} \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial y_1^2}; \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{l_x v_{y,\infty}}{l_y v_{x,\infty}} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = 0; \quad (1.9)$$

Для того, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности (1.9), необходимо,

чтобы в нем $\frac{l_x v_{y,\infty}}{l_y v_{x,\infty}} = 1$. Поскольку для пограничного слоя $l_x = l, l_y = \delta$, то получим

$$\frac{v_{y,\infty} \cdot l}{v_{x,\infty} \cdot \delta} = 1 \text{ или } \frac{v_{y,\infty}}{v_{x,\infty}} = \frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

Это второе основное свойство ламинарного пограничного слоя, в соответствии с

которым поперечная скорость в области поперечного слоя имеет тот же порядок, что и толщина слоя.

Продолжим вывод уравнений Прандтля.

Поскольку на величины l_y и $v_{y,\infty}$ не наложено ограничений, их можно выбрать такими, чтобы в уравнениях (1.7) и (1.8) $\frac{l_x v_{y,\infty}}{l_y v_{x,\infty}} = 1$ и $\frac{v \cdot l_x}{v_{x,\infty} \cdot l_y^2} = 1$. Тогда из уравнения

(1.7) получим следующее:

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} = -Eu_\infty \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{1}{Re_\infty} \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial y_1^2} \quad (1.10)$$

Здесь учтено, что число $Re_\infty = \frac{v_{x,\infty} \cdot l_x}{\nu}$; число Эйлера $Eu_\infty = \frac{P_\infty}{\rho \cdot v_{x,\infty}^2}$.

Уравнение (1.8) преобразуется к следующему виду:

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = -Eu_\infty Re_\infty \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial y_1^2} \quad (1.11)$$

Здесь проведены следующие преобразования для первого члена в правой части уравнения (8):

а) из условия $\frac{v \cdot l_x}{v_{x,\infty} \cdot l_y^2} = 1 \rightarrow l_y^2 = \frac{v l_x}{v_{x,\infty}} \cdot \frac{l_x}{l_x} = \frac{l_x^2}{Re}$, следовательно $l_y = \frac{l_x}{\sqrt{Re}}$.

Это выражение аналогично первому основному свойству ламинарного пограничного слоя $\delta/l \sim 1/\sqrt{Re}$, т.к. $l_y \sim \delta$, $l_x \sim l$;

б) из условия $\frac{l_x v_{y,\infty}}{l_y v_{x,\infty}} = 1 \rightarrow v_{y,\infty} = \frac{l_y v_{x,\infty}}{l_x} = \frac{v_{x,\infty}}{\sqrt{Re}}$;

в) тогда член $\frac{p_\infty \cdot l_x}{l_y \cdot v_{y,\infty} v_{x,\infty} \rho} = \frac{p_\infty \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt{Re}}{\rho \cdot v_{x,\infty} v_{x,\infty}} = Eu \cdot Re_\infty$

Уравнение (1.9), как было сказано выше, вновь приобретает вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = 0 \quad (1.12)$$

Известно, что ламинарный погранслой образуется при очень больших числах Re . Если число $Re \rightarrow \infty$, то уравнения (1.10), (1.11) приобретут вид (т.к. $1/Re \rightarrow 0$):

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y_1} = -Eu_\infty \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_{x_1}}{\partial y_1^2}; \quad (1.13)$$

$$v_{x_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{y_1}}{\partial y_1} = -Eu_\infty Re_\infty \frac{\partial p_1}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 v_{y_1}}{\partial y_1^2} \quad (1.14)$$

В уравнении (1.14) присутствует член $(-Eu_\infty Re_\infty \frac{\partial p_1}{\partial y_1})$, для упрощения разделим все члены этого уравнения на Re_∞ , тогда оно примет вид

$$\frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0 \quad (\text{т.к. } Eu_\infty \neq 0). \quad (1.15)$$

Получили систему уравнений: (1.13), (1.15), (1.12).

Вернемся вновь к размерным параметрам.

Используем для этого уже известные соотношения:

$$x_1 = \frac{x}{l_x}; \quad y = \frac{y}{l_y}; \quad v_{x_1} = \frac{v_x}{v_{x,\infty}}; \quad v_{y_1} = \frac{v_y}{v_{y,\infty}}; \quad Eu_\infty = \frac{p_\infty}{\rho v_{x,\infty}^2}; \quad p_1 = \frac{p}{p_\infty}.$$

Подставим эти соотношения в уравнение (1.13):

$$v_x \left(\frac{l_x}{v_{x,\infty}^2} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \left(\frac{l_y}{v_{x,\infty} \cdot v_{y,\infty}} \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{p_\infty}{\rho v_{x,\infty}^2} \left(\frac{l_x}{p_\infty} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{l_y^2}{v_{x,\infty}} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2};$$

Разделим полученное уравнение на $\left(\frac{l_x}{v_{x,\infty}^2} \right)$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \left(\frac{v_{x,\infty} \cdot l_y}{v_{y,\infty} \cdot l_x} \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{l_y^2 \cdot v_{x,\infty}}{l_x} \right) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Так как было принято, что $\frac{l_x v_{y,\infty}}{l_y v_{x,\infty}} = 1$ и $\frac{v \cdot l_x}{v_{x,\infty} \cdot l_y^2} = 1$, откуда $v = \frac{v_{x,\infty} \cdot l_y^2}{l_x}$, то с учетом

этого получим окончательно:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (1.16)$$

Теперь подставим известные аффинные соотношения в уравнение (1.12):

$$\left(\frac{l_x}{v_{x,\infty}} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\frac{l_y}{v_{y,\infty}} \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Разделим оба члена на $\left(\frac{l_x}{v_{x,\infty}} \right)$, тогда $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\frac{v_{x,\infty} \cdot l_y}{v_{y,\infty} \cdot l_x} \right) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

Так как было принято, что $\frac{v_{x,\infty} \cdot l_y}{v_{y,\infty} \cdot l_x} = 1$, то получим окончательно:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.17)$$

Уравнение (1.15) преобразуется к виду: $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Как видно, система уравнений упрощается. В уравнении (1.16) пропадает член $v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, бывший до аффинного преобразования в уравнении (1.1), уравнение (1.2) пропадает из рассмотрения вовсе, так как остается только условие $\partial p / \partial y = 0$; сохраняется лишь уравнение неразрывности (1.3) или (1.17).

Выражение $\partial p / \partial y = 0$ является условием, означающим физически, что перепада давления в направлении нормали к обтекаемому телу нет, имеется перепад давления только вдоль обтекаемого тела (вдоль оси X). Это третье основное свойство погранслоя: во всех точках данного, нормального к поверхности тела, сечения погранслоя давление имеет одно и то же значение. Однако, несмотря на упрощение системы уравнений, остаются следующие трудности:

- а) уравнение (1.16) нелинейно за счет первого члена в левой части;
- б) имеем три неизвестных величины v_x , v_y , p , а уравнений только два, т.е. задача в математическом отношении является некорректной (неопределенной).

Прандтль преодолевает эти трудности следующим образом: условие $\partial p / \partial y = 0$, означающее постоянство давления во всех точках данного, нормального к поверхности тела сечения пограничного слоя, позволяет, во-первых, заменить частную производную $\partial p / \partial x$ полной, т.е. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$, и, во-вторых, считать, что распределение давления $p(x)$ вдоль пограничного слоя совпадает с распределением давления во внешнем безвихревом потоке. Это распределение по теореме Бернулли, справедливой для набегающего на тело безвихревого потока идеальной жидкости, можно связать со скоростью v_∞ во внешнем потоке. Благодаря тонкости пограничного слоя можно снести эту скорость на поверхность, положив ее равной той, зависящей только от продольной координаты X скорости скольжения $v_{x,\infty}$ жидкости по поверхности тела, которая имела бы место в идеальной жидкости, т.е. при отсутствии пограничного слоя. Таким образом, имеет место обтекание Эйлера типа, и согласно уравнению движения Эйлера для стационарных условий обтекания и отсутствия массовых сил получим:

$$v_{x,\infty} \frac{\partial v_{x,\infty}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ или } v_{x,\infty} v'_{x,\infty} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (1.18)$$

Это условие зависимости давления только от координаты X (условие на бесконечности). Оно получается из уравнения Эйлера для идеальной среды, которое в векторной форме имеет вид:

$$\frac{d\vec{v}_\infty}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_\infty}{\partial t} + (\vec{v}_\infty \cdot \nabla) \vec{v}_\infty = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P,$$

а в проекции на ось X:

$$\frac{\partial v_{x,\infty}}{\partial t} + v_{x,\infty} \frac{\partial v_{x,\infty}}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

При $\partial v_{x,\infty} / \partial t = 0$ и $F_x = 0$, получаем исходное уравнение (1.18). Внося условие (1.18) в уравнение (1.16), получим окончательную систему уравнений ламинарного пограничного слоя:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v'_{x,\infty} v_{x,\infty} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Эти уравнения, представляющие систему нелинейных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа, были получены Прандтлем в 1904 г. Согласно идее Прандтля внешняя скорость $v_{x,\infty}$, входящая в первое уравнение, считается заданной, заранее рассчитанной по теории плоского безвихревого обтекания тела идеальной несжимаемой жидкостью. В такой постановке задачи предполагается, что пограничный слой, по всему контуру обтекаемого тела настолько тонок, что его искажающее влияние на внешний поток пренебрежимо мало. Можно сказать, что в этом случае не учитывается обратное влияние пограничного слоя на внешний безвихревой поток. Необходимо отметить, что в некоторых случаях (например, плавное обтекание тонких тел) такое пренебрежение обратным влиянием пограничного слоя на внешний поток вполне допустимо, а в других случаях оно может быть настолько велико, что внешнюю скорость $v_{x,\infty}$ приходится вычислять по формуле

$$v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

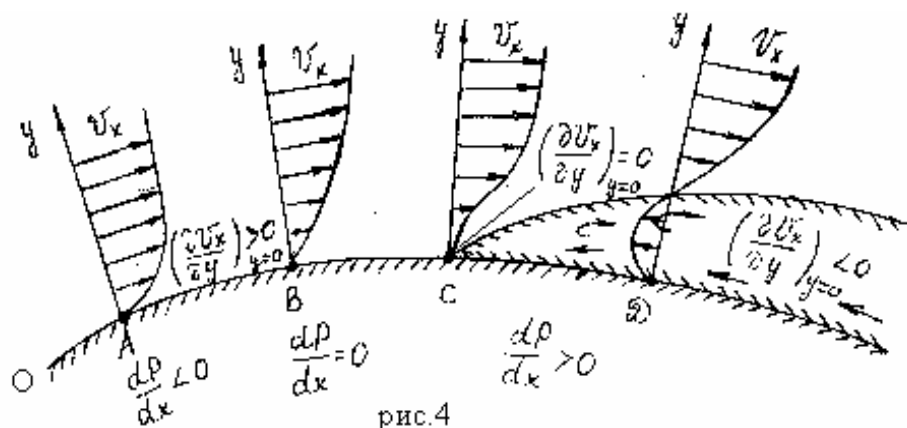
используя экспериментально замеренное распределение давления по контуру тела.

Граничными условиями для решения полученной системы уравнений являются следующие:

- 1) граничное условие на стенке: при $y=0$ $v_x=v_y=0$. Оно выражает условие прилипания вязкой жидкости к твердой стенке ($y = 0$) - контуру обтекаемого тела;
- 2) при $y \rightarrow \infty$ $v_x \rightarrow v_{x,\infty}$. Это требование асимптотического стремления продольной скорости v_x в области пограничного слоя к скорости $v_{x,\infty}$ на границе пограничного слоя с безвихревым потоком. Второе граничное условие можно интерпретировать как операцию "сращивания" решения уравнений Прандтля движения вязкой жидкости в пограничном слое с решением уравнений Эйлера для безвихревого обтекания тела идеальной несжимаемой жидкостью.

Теория пограничного слоя позволила объяснить природу явления отрыва потока от твердой поверхности тела плавной формы [3]. Явление это тесно, связано со свойствами прилипания вязкой жидкости к твердой поверхности обтекаемого ею тела и образованием на ней пограничного слоя. Если рассмотреть стационарный отрыв, то он является результатом взаимодействия трех факторов:

- а) инерции потока;
- б) вязкого взаимодействия между смежными слоями жидкости и твердой поверхностью;
- в) обратного перепада давления, направленного в сторону, противоположную



движению.

ОВ - конфузорный участок;

ВД - диффузорный участок.

На рис. 4 показаны профили скоростей в потоке, обтекающем тело. Точки А и В находятся в конфузорной области, где отрыв невозможен, так как здесь $v'_{x,\infty} > 0$

(скорость вниз по потоку возрастает), а $\frac{dp}{dx} < 0$, т.е. давление по потоку убывает.

Следовательно, давление в каждой последующей точке будет меньше, чем в предыдущей. Такой градиент давления на стенке будет содействовать движению жидкости в пограничном слое, а не противодействовать ему. В кормовой (диффузорной) области профиля вниз по течению за точкой минимума давления В (см. рис. 4) $v'_{x,\infty} < 0$, (поток замедляется) а также происходит возрастание давления на стенке $\frac{dp}{dx} > 0$, и в каждой последующей точке оно больше, чем в предыдущей.

Такой градиент давления противодействует потоку, и жидкость в пограничном слое движется из области меньшего давления в область большего давления против подтормаживающего ее перепада давлений. Если бы жидкость была идеальна и скорость на поверхности тела не равнялась бы нулю, то запас кинетической энергии жидкости оказался бы достаточным для преодоления тормозящего поля давлений. В пограничном слое поле давлений, как уже известно, не отличается от поля давлений в идеальной жидкости, между тем как скорости в непосредственной близости к поверхности тела очень малы, а следовательно, и кинетическая энергия частиц жидкости ничтожна. В этих условиях торможение может вызвать остановку, а далее и обратное (см. рис. 4) движение под действием перепада давления, направленного против движения. Встреча набегающего потока с обратно движущейся в пограничном слое жидкостью приводит к резкому оттеснению линий тока от поверхности тела, к утолщению пограничного слоя и к отрыву его от поверхность тела. До точки отрыва С (т.т. А,В), как видно из рис. 4,

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} > 0, \text{ за точкой отрыва (т. Д)} \rightarrow \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} < 0.$$

В самой точке С будет иметь условие отрыва:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.$$

Математически точка отрыва С определяется как точка, в которой трение на стенке равно нулю, т.е.

$$\tau_w = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \text{ или просто } \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

Приведенное объяснение явления вязкого отрыва показывает, что отрыв потока может возникнуть только в диффузорной области пограничного слоя, где вязкие

взаимодействия в жидкости сосуществуют с обратным по отношению к направлению потока перепадом давлений. Таким образом, точка отрыва С всегда располагается ниже по течению, чем точка В минимума давления (максимума внешней скорости).

Тормозящее влияние обратного перепада давления является необходимым условием отрыва пограничного слоя с поверхности тела. Так, при постоянстве давления вдоль пограничного слоя отрыв произойти не может. Условие постоянства давления возникает, например, при обтекании тела тонкой сравнительно с размерами тела струей. Внешняя граница такой струи является свободной поверхностью, т.к. граничит с неподвижной средой, в которой давление повсюду одинаково. Отрыв пограничного слоя от поверхности тела в такой струе не происходит, тонкие струи прилипают к поверхности тела, вдоль которой они распространяются. Это любопытное, часто наблюдаемое явление иногда называют эффектом Коанда по имени румынского инженера А.Коанда, который обратил внимание на это явление в 1910 году.

Отрыв пограничного слоя обычно относят к числу вредных явлений, вызывающих резкое повышение сопротивления обтекаемых жидкостью тел, опасные вибрации их, а в случае внутренних течений по трубам и каналам, проводящие к уменьшению полезного расхода жидкости, возрастанию потерь энергии и уменьшению КПД (коэффициента полезного действия) системы.

1.4. Интегральные соотношения для ламинарного пограничного слоя

Существует несколько приближенных методов расчета ламинарного пограничного слоя, которые по наглядности результатов расчета и физичности самого процесса расчета конкурируют с численными методами расчета на ЭВМ. Один из них - метод интегральных соотношений - значительно упрощает решение системы (1.19) уравнений Прандтля движения вязкой жидкости в ламинарном пограничном слое:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v'_\infty v_\infty + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Здесь введено обозначение: $v_{x,\infty} = v_\infty$; $v'_{x,\infty} = v'_\infty$, т.к. считаем направление потока на бесконечности параллельным оси OX

Умножим второе уравнение на v_x

$$v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0$$

и введем этот член, равный нулю, в первое уравнение системы (1.20)

$$v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v'_\infty v_\infty + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

или

$$2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v'_\infty v_\infty + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial x}(v_x^2) = 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}(v_x v_y) = v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}$,

то первое уравнение системы (1.20) перепишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(v_x v_y) = v'_\infty v_\infty + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (1.21)$$

Второе уравнение системы (1.20) - уравнение неразрывности - можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_\infty v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_\infty v_y) = v'_\infty v_x. \quad (1.22)$$

Покажем это:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_\infty v_x) = v_x \frac{\partial v_\infty}{\partial x} + v_\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} = v_x v'_\infty + v_\infty \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(v_\infty v_y) = v_y \frac{\partial v_\infty}{\partial y} + v_\infty \frac{\partial v_y}{\partial y} = v_\infty \frac{\partial v_y}{\partial y},$$

поскольку $v_\infty = v_{x,\infty}$ не зависит от y , и, следовательно, $\frac{\partial v_\infty}{\partial y} = 0$. Сложив оба

последних равенства, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_\infty v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_\infty v_y) = v_x v'_\infty + v_\infty \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right).$$

Второй член в правой части этого уравнения равен нулю, т.к. выражение

$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$ - это исходное уравнение неразрывности, равное нулю.

Таким образом, приходим к уравнению (1.22).

Уравнения(1.21) и (1.22) определяют уравнения ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Для решения задачи о пограничном слое выведем интегральное соотношение Кармана, выражающее теорему количеств движения (теорему импульсов) в применении к потоку жидкости в области пограничного слоя. Преобразуем оба уравнения в одно, для чего вычтем по отдельности из левой и правой частей уравнения (1.22) уравнение (1.21):

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_x(v_\infty - v_x)] + \frac{\partial}{\partial y}[v_y(v_\infty - v_x)] + v'_\infty(v_\infty - v_x) = -v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Произведем почленное интегрирование по y от $y=0$ до $y=\infty$, при этом будем пользоваться обычными производными (т. к. производную по времени мы опустили в силу стационарности процесса):

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}[v_x(v_\infty - v_x)]dy + \int_0^\infty \frac{d}{dy}[v_y(v_\infty - v_x)]dy + \int_0^\infty v'_\infty(v_\infty - v_x)dy = -\int_0^\infty v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy \quad (1.23)$$

В первом члене левой части уравнения (1.23) воспользуемся правилом допустимости перемены порядка дифференцирования и интегрирования, т.е.

получаем $\frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x(v_\infty - v_x)dy$.

Второй член левой части уравнения (1.23) имеет после интегрирования вид:

$$v_y(v_\infty - v_x)\Big|_{y=0}^{y=\infty}$$

Используя граничные условия, в соответствии с которыми при $y=0$ $v_x=0$ и $v_y=0$, а при $y=\infty$ $v_x=v_\infty$, получаем, что этот член уравнения

$$v_y(v_\infty - v_x)\Big|_{y=0}^{y=\infty} = 0.$$

Тогда уравнение (1.23) примет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty [v_x(v_\infty - v_x)]dy + v'_\infty \int_0^\infty (v_\infty - v_x)dy = -v \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big|_{y=0}^{y=\infty}$$

Поскольку при $y=\infty \rightarrow v_x=v_\infty$, то $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\infty} = 0$, т.к. v_∞ не зависит от y . Тогда получим:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty [v_x(v_\infty - v_x)]dy + v'_\infty \int_0^\infty (v_\infty - v_x)dy = v \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (1.24)$$

Используя выражение для напряжения трения на твердой поверхности обтекаемого тела $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}$ и учитывая, что $\nu = \mu/\rho$, получим в правой части уравнения (1.24) τ_w/ρ .

Введем в рассмотрение так называемые интегральные толщины пограничного слоя:

$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty} \right) dy$ — толщина вытеснения масс в пограничном слое, учитывающая смещение линий тока из-за наличия вязкости (торможение жидкости в пограничном слое [4]);

$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty} \right) dy$ — толщина потери импульса, учитывающая потерю количества движения на преодоление трения.

Преобразуем уравнение (1.24) следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \left[v_\infty^2 \cdot \frac{v_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty} \right) \right] dy + v'_\infty v_\infty \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Введем интегральные толщины: $\frac{d}{dx} (v_\infty^2 \delta^{**}) + v'_\infty v_\infty \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}$

Разделив обе части последнего уравнения на v_∞^2 , получим:

$$\frac{1}{v_\infty^2} \frac{d}{dx} (v_\infty^2 \cdot \delta^{**}) + \frac{v'_\infty}{v_\infty} \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}. \quad (1.25)$$

Дифференцируя первый член левой части уравнения (1.25), получим:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + 2\delta^{**} \frac{v'_\infty}{v_\infty} + \delta^* \frac{v'_\infty}{v_\infty} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}$$

или окончательно:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{v'_\infty}{v_\infty} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2} \quad (1.26)$$

Это интегральное соотношение или уравнение импульсов впервые было выведено учеником Прандтля -Кáрманом и носит название интегрального соотношения Кармана.

В выводе этого соотношения есть одна некорректность, т.к. используем уравнение Эйлера $v'_\infty v_\infty = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$ (см. уравнение (1.21)) на произвольном расстоянии от обтекаемого тела ($0 \leq y \leq \infty$). Но эта некорректность пропадает, если в интеграле $\int_0^\infty dy$ вместо ∞ взять верхним пределом δ - внешнюю границу пограничного слоя, т.е. $\int_0^\delta dy$.

Тогда интегральные толщины пограничного слоя будут таковы:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) dy; \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) dy \quad (1.27)$$

и граничные условия следующие;

1) граничное условие на стенке: $y=0$; $v_x=0$ (как и было ранее)

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \approx \frac{v_\infty - v_x}{\ell};$$

2) на внешней границе пограничного слоя $y=\delta$; $v_x=v_{x,\infty}=v_\infty$; $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$

Необходимо отметить, что если для ламинарного пограничного слоя метод интегрального соотношения не является единственным, то для турбулентного погранслоя этот метод является единственным методом решения задачи.

В общем случае все задачи о ламинарном пограничном слое могут решаться двумя путями. В первом случае решают дифференциальные уравнения погранслоя с соответствующими граничными условиями и обычно получают значение скоростей во всей области пограничного слоя, т.е. $v_x(x,y)$ и $v_y(x,y)$, а следовательно, и трение на стенке. Такой способ называется точным методом решения задачи о ламинарном погранслое. Во втором случае пользуются не дифференциальными уравнениями, а интегральными соотношениями. При этом задаются некоторой формой профиля скоростей в пограничном слое и, используя интегральное соотношение Кармана, определяют напряжение трения τ_w на обтекаемой поверхности, а также такие интегральные величины, как толщина пограничного слоя δ , толщина вытеснения δ^* и толщина потери импульса δ^{**} . Такой способ решения называют приближенным методом.

В качестве примера рассмотрим приближенную математическую модель продольного обтекания вязкой жидкостью плоской бесконечно тонкой пластины. Очевидно, в этом случае давление во всей области потока, как и величина скорости вне пограничного слоя, будут величинами постоянными.

Граничные условия будут следующие:

а) при $y=0$ $v_x=v_y=0$.

Если рассмотреть первое дифференциальное уравнение пограничного слоя (1.20) - уравнение движения

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v'_\infty v_\infty + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

то, т.к. для бесконечно тонкой плоской пластины $v'_\infty = 0$ $\left(\frac{dv_\infty}{dx} = 0\right)$ скорость потока

не изменяется вдоль оси x , при $y=0$ имеем $v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$.

Таким образом, при $y \rightarrow 0$ $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$.

б) при $y=\delta$ $v_x=v_\infty$; $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ и тогда $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$.

Уравнение импульсов (или интегральное соотношение Кáрмана) для этой задачи имеет вид:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}, \quad (1.28)$$

т.к. $v'_\infty = 0$ для тонкой плоской пластины.

Идея интегрального соотношения состоит в задании неизвестного поля скоростей простейшим полиномом:

$$v_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n.$$

Значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, \dots могут быть найдены из граничных условий, причем для определения одного коэффициента полинома требуется одно граничное условие. Таким образом, количество членов полинома должно соответствовать количеству поставленных граничных условий.

Воспользуемся для начала тремя граничными условиями:

а) на стенке при $y=0 \rightarrow v_x=0$,

б) на границе слоя при $y=\delta \rightarrow v_x=v_\infty; \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$.

Подставив эти граничные условия в полином, в котором берем три первых члена $v_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$, получим:

1) при $y=0, v_x = 0 \rightarrow a_0=0$,

2) при $y = \delta, v_x = v_\infty \rightarrow v_\infty = a_1 \delta + a_2 \delta^2$,

3) при $y = \delta, \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = a_1 + 2a_2 y = a_1 + 2a_2 \delta = 0$.

Из последних двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 \delta &= \frac{v_\infty}{\delta} \\ a_1 + 2a_2 \delta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

находим $a_1 = 2 \frac{v_\infty}{\delta^2}$, и $a_2 = -\frac{v_\infty}{\delta^2}$.

Следовательно, поле скоростей будет иметь вид:

$$v_x = 2v_\infty \frac{y}{\delta} - v_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \text{ или в безразмерном виде } \frac{v_x}{v_\infty} = 2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2.$$

Зная $\frac{v_x}{v_\infty}$, можно найти δ^* , δ^{**} , τ_w :

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^\delta \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 \left[\frac{v_x}{u_\infty} - \left(\frac{v_x}{u_\infty}\right)^2 \right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \\ &= \delta \left[\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \delta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^{**} &= \int_0^\delta \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{v_x}{u_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 \left[\frac{v_x}{u_\infty} - \left(\frac{v_x}{u_\infty}\right)^2 \right] d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \\ &= \delta \int_0^1 \left\{ \left[2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right] - \left[2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right]^2 \right\} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{2}{15} \delta. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\delta > \delta^* > \delta^{**}$, т.е. толщина пограничного слоя больше толщины вытеснения, а та, в свою очередь, больше толщины потери импульса.

Из полученных значений δ^* и δ^{**} определим: $\frac{\delta}{\delta^*} = 3$ и $\frac{\delta}{\delta^{**}} = 2.5$.

Величина напряжения трения на стенке определяется формулой: $\tau_w = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0}$.

Найдем $\left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0}$, продифференцировав выражение для поля скоростей

$$v_x = 2v_\infty \frac{y}{\delta} - v_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \text{ по "y":}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2v_\infty}{\delta} - \frac{2y}{\delta^2} v_\infty, \text{ откуда } \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2v_\infty}{\delta}, \text{ и, следовательно,}$$

$$\tau_w = \mu \frac{2v_\infty}{\delta}.$$

Тогда уравнение импульсов $\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}$ приобретет вид: $\frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx} = \frac{2\mu}{\rho v_\infty \delta}$

или $\delta d\delta = 15 \frac{\nu}{v_\infty} dx$ (т.к. $\mu/\rho = \nu$), откуда после интегрирования имеем:

$$\delta^2 = 30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty} + C, \text{ и } \delta = \sqrt{30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty} + C_1}.$$

Считая, что при $x=0 \rightarrow \delta=0$, получим $C_1=0$.

$$\text{Окончательно будем иметь: } \delta = \sqrt{30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty}} \text{ или } \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{5.48}{Re_x}},$$

где $Re_x = \frac{v_\infty \cdot x}{\nu}$ - местное значение числа Рейнольдса.

Из формулы $\delta = \sqrt{30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty}}$ видно, что толщина пограничного слоя на пластине

увеличивается пропорционально \sqrt{x} , т.е. $\delta \sim \sqrt{x}$; и тогда $\delta^* \sim \sqrt{x}$; $\delta^{**} \sim \sqrt{x}$.

Зная выражение для толщины пограничного слоя δ , можно найти зависимость для напряжения трения на стенке:

$$\tau_w = 2\mu \frac{v_\infty}{\delta} = \sqrt{\frac{4}{30} \cdot \frac{v_\infty^3 \mu^2}{\nu \cdot x}} = \sqrt{\frac{2}{15} \cdot \frac{v_\infty^3 \nu \rho^2}{x}} = \frac{0.361 \rho v_\infty^2}{\sqrt{Re_x}}.$$

$$\text{Таким образом, } \tau_w \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ т.к. } \tau_w = \sqrt{\frac{2}{15} \cdot \frac{v_\infty^3 \mu \rho}{x}} = 0.361 \sqrt{\frac{v_\infty^3 \mu \rho}{x}}.$$

Полное сопротивление (в данном случае полное сопротивление трения) можно определить для одной стороны пластины по формуле:

$$R_x = b \int_0^\ell \tau_w dx,$$

где b - ширина пластины, ℓ - длина пластины.

Если принять ширину пластины $b=1$, то R_x для одной стороны пластины будет

$$R_x = \int_0^{\ell} \tau_w dx, \text{ а для двух сторон:}$$

$$R_x = 2 \int_0^{\ell} \tau_w dx.$$

Для пластины в целом величина трения будет определяться удвоенной величиной (две стороны пластины), т.е. $R_x = 2b \int_0^{\ell} \tau_w dx$

$$\text{или } R_x = 0.722b \sqrt{v_{\infty}^3 \mu \rho} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1.444b \sqrt{v_{\infty}^3 \mu \rho} \sqrt{x} \Big|_0^{\ell} = 1.444b \sqrt{v_{\infty}^3 \mu \rho \ell}.$$

$$\text{При } b=1 \quad R_x = 1.444 \sqrt{v_{\infty}^3 \mu \rho \ell}.$$

$$\text{Коэффициент сопротивления трения равен: } C_f = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \cdot S}, \quad (1.29)$$

где $S=2b \cdot \ell$ - площадь поверхности с двух сторон пластины.

$$\text{При } b=1 \rightarrow C_f = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \cdot 2\ell \cdot 1} = \frac{1.444 \sqrt{v_{\infty}^3 \mu \rho \ell}}{\rho v_{\infty}^2 \cdot \ell} = \frac{1.444 \sqrt{v_{\infty}^3 \nu \ell}}{v_{\infty}^2 \cdot \ell} = \frac{1.444}{\sqrt{Re}},$$

$$\text{где } Re = \frac{v_{\infty} \ell}{\nu}.$$

Как видно, $C_f \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$, т.е. коэффициент сопротивления обратно пропорционален \sqrt{Re} .

Еще раз напоминаем, что этот метод для ламинарного погранслоя был открыт Карманом и разработан далее Рэлеем. В действительности, скорости течения на практике так велики, что ламинарное движение переходит в турбулентное, где метод интегральных соотношений является единственным, позволяющим получить конечные результаты.

1.5 Математическое моделирование обтекания ламинарным потоком профиля произвольной формы

Существующие методы приближенного решения задачи о ламинарном пограничном слое на профиле произвольной формы основаны на решении уравнения импульсов. Рассмотрим один из наиболее простых методов, предложенный Н.Е. Кочиным и Л.Г. Лойцянским. Так как в уравнение, импульсов (1.26) входят три неизвестных: δ^* , δ^{**} и τ_w , то все приближенные методы сводятся к тому, чтобы прийти к уравнению с одним неизвестным путем выбора семейства профилей скоростей, зависящего от одного параметра. Выбрав такие профили, можно выразить δ^* , δ^{**} и τ_w через один параметр и, таким образом, получить обыкновенное дифференциальное уравнение относительно выбранного параметра.

В качестве такого параметра можно ввести величину f (называемую формпараметром), которая определяется выражением:

$$f = \frac{\delta^{**2} v'_{\infty}}{\nu}.$$

Тогда семейство профилей скоростей в ламинарном пограничном слое будет выражаться зависимостью:

$$\frac{v_x}{v_{\infty}} = \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}; f\right) = \varphi(\eta_1; f),$$

а параметры δ^* , δ^{**} и τ_w можно представить в виде:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty}}\right) dy = \delta^{**} \int_0^{\delta/\delta^{**}} [1 - \varphi(\eta_1; f)] d\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right) = \delta^{**} \int_0^{\delta/\delta^{**}} [1 - \varphi(\eta_1; f)] d\eta_1 = \delta^{**} H(f),$$

где $H(f) = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$;

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right]_{\eta_1=0} \frac{v_{\infty}}{\delta^{**}}.$$

Эта формула получается следующим образом: $\frac{v_x}{v_{\infty}} = \varphi(\eta_1; f)$, откуда

$$v_x = v_{\infty} \varphi(\eta_1; f), \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = \frac{v_{\infty}}{\delta^{**}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \quad \text{т.к.} \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = \frac{1}{\delta^{**}}.$$

Если обозначить через $\varphi'(0; f) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right]_{\eta_1=0}$, то $\tau_w = \frac{\mu v_{\infty}}{\delta^{**}} \varphi'(0; f)$.

$$\text{Отсюда } \varphi'(0; f) = \zeta(f) = \frac{\tau_w \delta^{**}}{\mu v_\infty} = \frac{\tau_w}{\rho \cdot v_\infty^2} \cdot \frac{v_\infty \delta^{**}}{v},$$

Тогда $\frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2} = \frac{v}{v_\infty \delta^{**}} \zeta(f)$ и уравнение импульсов (1.26) для ламинарного пограничного слоя будет выглядеть:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{v'_\infty}{v_\infty} \delta^{**} [2 + H(f)] = \frac{v}{v_\infty \delta^{**}} \zeta(f).$$

Умножив обе части этого уравнения на $\frac{\delta^{**}}{v}$, получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta^{**2}}{v} \right) + \frac{v'_\infty}{v_\infty v} \delta^{**2} [2 + H(f)] = \frac{\zeta(f)}{v_\infty}.$$

Учитывая, что коэффициент при втором члене последнего уравнения равен $\frac{v'_\infty \delta^{**2}}{v_\infty v} = \frac{f}{v_\infty}$, получим:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta^{**2}}{v} \right) = \frac{2}{v_\infty} \{ \zeta(f) - [2 + H(f)] f \}.$$

Обозначим: $F(f) = 2 \{ \zeta(f) - [2 + H(f)] f \}.$ (1.30)

Учитывая, что $\frac{\delta^{**2}}{v} = \frac{f}{v'_\infty}$ (из выражения для формпараметра f), приведем уравнение импульсов к виду:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{v'_\infty} \right) = \frac{F(f)}{v_\infty}.$$

Так как $\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{v'_\infty} \right) = \frac{1}{v'_\infty} \cdot \frac{df}{dx} - f \frac{v''_\infty}{v'^2_\infty}$, то окончательно уравнение примет вид:

$$\frac{df}{dx} = f \frac{v''_\infty}{v'_\infty} + \frac{v'_\infty}{v_\infty} F(f). \quad (1.31)$$

Это дифференциальное уравнение формпараметра.

Зная $F(f)$, можно при заданном значении v_∞ решить уравнение (1.31) и найти $f(x)$, а следовательно, δ^{**} и τ_w . Из точных решений, подтвержденных экспериментом, было установлено, что $F(f)$ можно приближенно представить в виде линейной функции:

$$F(f) = a - b \cdot f.$$

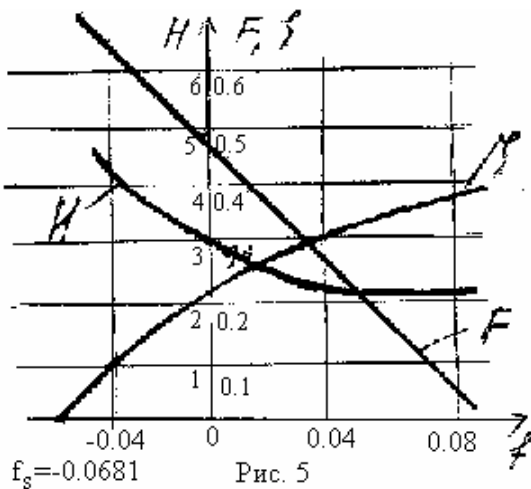


Рис. 5

На рис.5 приведены кривые $H(f)$, $F(f)$ и $\zeta(f)$, соответствующие точному решению уравнения для ламинарного пограничного слоя. При этом $a=0.45$; $b=5.35$. После подстановки значения $F(f)$ в последнее уравнение окончательно получим уравнение импульсов в виде:

$$\frac{df}{dx} = a \frac{v'_\infty}{v_\infty} + \left(\frac{v''_\infty}{v'_\infty} - b \frac{v'_\infty}{v_\infty} \right) f.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет следующее решение:

$$f = \frac{av'_\infty}{v_\infty^b} \int_0^x v_\infty^{b-1}(x) dx + C \frac{v'_\infty}{v_\infty^b}.$$

Если точка $x=0$ совпадает с передней критической точкой обтекаемого тела, в которой скорость внешнего потока $v_\infty=0$, то из условия конечности значения формпараметра f в этой точке получим $c=0$ и решение будет иметь окончательный вид:

$$f = \frac{av'_\infty}{v_\infty^b} \int_0^x v_\infty^{b-1}(x) dx.$$

Поскольку из этого решения нельзя определить значение формпараметра в точке, где $v_\infty=0$, то используют уравнение импульсов в виде:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{v'_\infty} \right) = \frac{F(f)}{v_\infty}.$$

В точке, где $v_\infty=0$, для конечности производной необходимо, чтобы $F(f)=0$. Но тогда из формулы $F(f)=a-f \cdot b$ следует, что в этой точке $f|_{x=0}=a/b$. Для определения формпараметра f в начальной точке ($x=0$) можно поступить и следующим образом:

из формулы $f(x) = \frac{av'_\infty}{v_\infty^b} \int_0^x v_\infty^{b-1}(x) dx$ видно, что при $x=0$ и $v_\infty=0$, эта точка является

особой.

Раскроем неопределенность типа $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталья, в соответствии с которым

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Тогда
$$f(0) = \frac{a v'_\infty(0) v_\infty^{b-1}(0)}{b v_\infty^{b-1}(0) v'_\infty(0)} = \frac{a}{b} = \frac{0.45}{5.35}.$$

Таким образом, зная закон изменения скорости внешнего потока $v_\infty(x)$, по выражению для f можно найти значение формпараметра для любого сечения пограничного слоя.

Выражая толщину δ^{**} потери импульса через формпараметр f , будем иметь $\delta^{**}(x) = \sqrt{\frac{v \cdot f}{v'_\infty}}$. Зная f и δ^{**} , по кривым на рис. 5 находим $H(f)$ и $\zeta(f)$ и вычисляем:

$$\delta^* = H(f) \cdot \delta^{**}; \tau_w(x) = \frac{\mu v_\infty(x)}{\delta^{**}(x)} \zeta(f).$$

Так вычисляют все параметры ламинарного пограничного слоя.

Координаты точки отрыва S (как было показано ранее) определяются из условия равенства нулю трения на стенке:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

$$\text{Тогда} \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{v_\infty}{\delta^{**}} \left[\frac{\partial(v_x/v_\infty)}{\partial(y/\delta^{**})} \right]_{y=0} = \frac{v_\infty}{\delta^{**}} \zeta(f) = 0.$$

$$\text{здесь} \quad \zeta(f) = \varphi'(0, f) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right]_{\eta_1=0} = \left[\frac{\partial(v_x/v_\infty)}{\partial(y/\delta^{**})} \right]_{y=0} = 0.$$

Таким образом, в точке S отрыва пограничного слоя от профиля $\zeta(f) = 0$. Из рис. 5 видно, что $\zeta(f) = 0$ при значении формпараметра $f_s = -0.0681$. Знак "-" свидетельствует о том, что отрыв происходит в области диффузора.

Необходимо обратить внимание, что функция $v_\infty(x)$ определяется методами теории потенциальных течений в предположении, что пограничный слой отсутствует, и затем значения этой функции переносятся на его внешнюю границу. Это равносильно допущению, что ввиду малости толщины слоя он практически не изменяет потенциального потока, обтекающего данную поверхность. Но в ряде случаев такое предположение оказывается недостаточно точным. Образование пограничного слоя приводит к изменению закона для скорости потенциального потока, т.е. имеет место обратное влияние пограничного слоя. Оно тогда должно учитываться в расчетах, особенно для течений в диффузорах, конфузорах, на начальных участках труб и каналов.

1.6 Математическое моделирование ламинарного течения
несжимаемой жидкости в трубах.

Рассмотрим установившийся ламинарный поток в круглой цилиндрической трубе, предположив линии тока прямыми, параллельными оси трубы (см. рис. 6), Будем рассматривать стационарный процесс, для которого

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0.$$

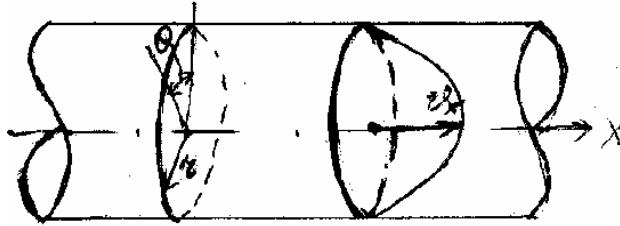


Рис. 6

Предположим также, что среда несжимаема т.е. $\rho = \text{const}$. Кроме того, будем считать, что скорость потока и профиль скоростей не зависят от продольной координаты. Это так называемое стабилизированное движение, имеющее место в цилиндрической трубе на значительном расстоянии от входа. Следовательно, если направление движения совпадает с осью X, то проекции скоростей на оси y и z будут равны нулю:

$$v_y = v_z = 0; \quad v_x = v.$$

Используя уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ получаем, что $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial v_x^2}{\partial x^2} = 0$, следовательно, скорость в трубе не зависит от координаты X (условие стабилизированного течения), т.е. $v_x = v_x(y, z) = v(y, z)$.

Тогда уравнения движения Навье - Стокса вязкой несжимаемой жидкости, имеющие вид:

а) в векторной форме $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{v}$

б) в проекциях на оси декартовых координат:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x; \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v_y; \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z; \end{cases}$$

после подстановки значений

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0;$$

$$v_x = v_z = 0; \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{т.е. } \nabla^2 v_y = 0);$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{т.е. } \nabla^2 v_z = 0);$$

$$v_x = v; \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

и отбрасывания внешних сил $F_x = F_y = F_z = 0$ преобразуются к виду:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует:

1) величина давления не зависит от поперечных координат y и z и есть функция только координаты x , т.е. в частности, в круглой трубе давление меняется только вдоль оси, а, следовательно, постоянно в каждом сечении и не зависит от радиуса r ;

2) так как левая часть первого уравнения зависит только от y и z , а правая часть не зависит ни от y , ни от z , то следовательно, правая и левая части этого уравнения должны быть равны одной и той же постоянной величине, т.е.

$$\frac{dp}{dx} = \text{const.}$$

Таким образом, уравнение Навье - Стокса для стабилизированного движения жидкости в цилиндрической трубе вдоль оси X будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.32)$$

Если прямоугольную систему координат заменить на цилиндрическую, в которой $x=x$, $y=r \cdot \cos(\theta)$; $z = r \cdot \sin(\theta)$, то уравнение (1.32) примет вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (1.33)$$

Предполагая, что поток в трубе обладает осевой симметрией, заключаем, что все параметры не зависят от переменной θ , т.е. $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0$. Тогда:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Так как $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$, то уравнение Навье - Стокса переписывается в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Выполним последовательно двойное интегрирование.

После первого интегрирования получим:

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dx} + \frac{C_1}{r}.$$

Проинтегрируем еще раз: $v = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \ln(r) + C_2$ (1.34)

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий. Для круглой трубы с радиусом R они могут быть записаны так: при $r=R$ (внутренний радиус трубы) скорость $v=0$; при $r=0$ скорость v - конечная величина.

Так как скорость потока в трубе должна иметь конечное значение (или нулевое при $r=R$), а при $r \rightarrow 0$ формула (1.34) дает бесконечное значение скорости на оси, то физически реальный результат получим лишь при $C_1 = 0$. Используя первое граничное условие, найдем:

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 \quad \text{и тогда} \quad v = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2) \quad (1.35)$$

Таким образом, для круглой трубы имеем параболическое распределение скоростей по сечению (рис. 7).

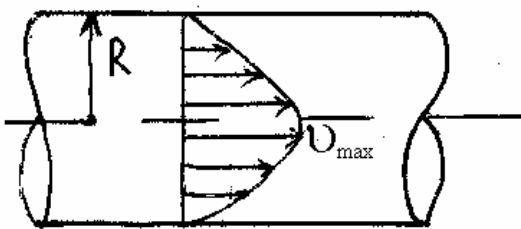


Рис. 7

На оси трубы, т.е. при $r=0$, скорость потока достигает максимального значения:

$$v_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2.$$

Тогда $v = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$

или в безразмерном виде

$$\frac{v}{v_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2.$$

Очевидно, что пространственная эпюра скоростей представляет собой параболоид вращения с основанием πR^2 и высотой v_{\max} . Для цилиндрической трубы можно записать

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{\ell} = \text{const},$$

где Δp - перепад давления в трубе длиной ℓ .

Определим среднюю расходную и максимальную скорости в круглой трубе.

Объемный расход жидкости равен:

$$Q = 2\pi \int_0^R v r dr = 2\pi v_{\max} \int_0^R r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr = \pi R^2 \frac{v_{\max}}{2}$$

Этот результат получается следующим образом:

$$\int_0^R r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr = \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^R - \left.\frac{r^4}{4R^2}\right|_0^R = \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{4}.$$

Тогда $Q = 2\pi v_{\max} \int_0^R r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr = \pi R^2 \frac{v_{\max}}{2}$

Поскольку расход Q связан со средней скоростью \bar{v} формулой $Q = \pi R^2 \bar{v}$, то

$\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2}$, т.е. при ламинарном режиме течения в круглой трубе максимальная

скорость жидкости в двое больше средней. Это очень важное свойство ламинарного установившегося движения жидкости в круглой трубе. Отсюда:

$$\bar{v} = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dx} R^2 = \frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{\ell} R^2, \quad Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{\ell} R^4, \quad v_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{\ell} R^2.$$

Перепад давлений на участке трубы длиной ℓ определяется как

$$\Delta p = \frac{8\mu \ell \bar{v}}{R^2} = \frac{32\mu \ell \bar{v}}{D^2},$$

где D - внутренний диаметр трубы.

Это формула Пуазейля, исследовавшего законы движения крови по капиллярным сосудам.

С другой стороны, для установившегося движения в цилиндрических трубах перепад давления определяется по формуле Дарси - Вейсбаха:

$$\Delta p = \lambda \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \frac{\ell}{D}, \quad \text{где } \lambda \text{ - коэффициент трения.}$$

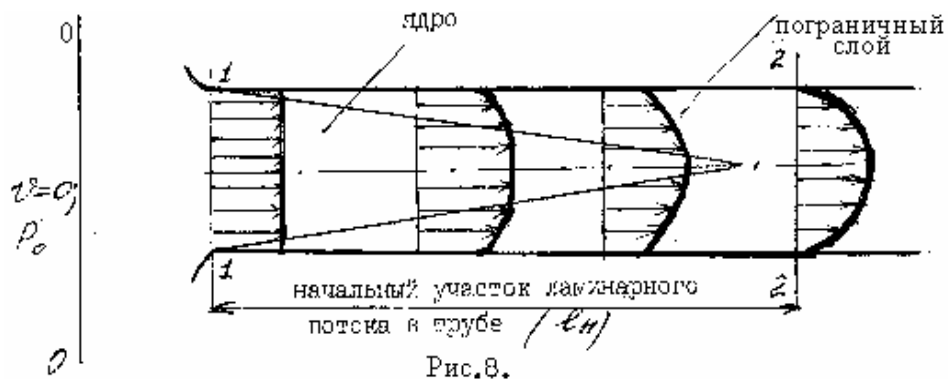
Приравнявая оба равенства, получим: $32\bar{v}\rho \frac{\ell}{D^2} = \lambda \frac{\rho \bar{v}^2}{2} \frac{\ell}{D}$, откуда

$$\lambda = 64 \frac{\nu}{\bar{v}D} = \frac{64}{Re},$$

где $Re = \frac{\bar{v}D}{\nu}$ - число Рейнольдса, составленное по средней (расходной) скорости \bar{v} и диаметру трубы D .

Выражение коэффициента сопротивления λ как функции числа Рейнольдса ($\lambda = \frac{64}{Re}$) называется законом сопротивления ламинарного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе.

Необходимо отметить, что полученные соотношения пригодны для ламинарного течения только лишь на определенном расстоянии от входа в трубу, после исчезновения начального участка ламинарного потока (см. рис. 8).



Если вход в трубу из резервуара выполнен достаточно плавно, то в начальном сечении 1-1 устанавливается практически равномерное распределение скоростей. По мере движения жидкости тормозящее влияние стенок распространяется на всё большую толщину потока. На некотором участке, называемым начальным, поток имеет ядро, где сохраняется равномерное распределение скоростей, и пристенный пограничный слой, где скорости распределяются неравномерно. Сечение ядра вниз по течению убывает, а толщина пограничного слоя возрастает. В конце начального участка l_n пограничный слой смыкается на оси трубы, и ниже по течению устанавливается параболическое распределение скоростей в соответствии с полученными соотношениями.

Этот характер течения и соответствующие ему зависимости имеют место только при устойчивом ламинарном режиме, т.е. при $Re < Re_{кр}$. При Re , немного меньших $Re_{кр}$, в ламинарном потоке периодически появляются кратковременные очаги турбулентности, которые могут на отдельных участках заполнять все сечение потока, образуя "турбулентные пробки".

При возрастании числа Re , турбулентный режим в каждом сечении существует все более длительное время и, наконец, поток становится турбулентным. Появление турбулентных очагов наступает тем раньше, чем больше возмущений испытывает поток при входе в трубу. Если вход сделать плавным и устранить другие источники возмущений, то ламинарный режим можно получить и при больших числах Re (например 20.000). Однако такие "затянутые" ламинарные режимы оказывались неустойчивыми, т.е. внесение в поток даже очень малых возмущений приводило к турбулизации. Поэтому критические значения числа Re следует понимать как границу устойчивого ламинарного режима в том смысле, что при $Re < Re_{кр}$ любые внешние возмущения, вносимые в поток, будут с течением времени затухать и поток сохранит ламинарный характер. При $Re > Re_{кр}$ в зависимости от условий опыта может существовать ламинарный или турбулентный режим. Для круглых труб $Re_{кр} = 2300$. Такое определение $Re_{кр}$ соответствует так называемому нижнему критическому числу Re . Верхним критическим числом Re называют то его значение, при котором устанавливается стабильный турбулентный режим.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

2.1. Переход ламинарного течения в турбулентное

Исторически первыми научными наблюдениями турбулентного движения были опыты английского физика О. Рейнольдса, в которых он в 1893 году изучал движение воды в круглой цилиндрической трубе [5]. При повышении скорости ламинарно движущейся жидкости было замечено, как на подкрашенную и хорошо видимую вначале прямолинейную струйку начинают накладываться волны, распространение которых вдоль струйки говорит о появлении возмущений в ранее спокойном прямолинейном движении. Постепенно с ростом скорости воды число таких волн и их амплитуда возрастает, пока, наконец, струйка не разобьется на нерегулярные, перемешивающиеся между собой более мелкие струйки, хаотический характер которых позволяет судить о переходе ламинарного движения в турбулентное. Таким образом, с возрастанием скорости ламинарное движение теряет свою устойчивость, при этом случайные возмущения, которые вначале вызывали лишь колебания струек относительно устойчивого их прямолинейного положения, быстро развиваются и приводят к новой форме движения жидкости - турбулентному движению.

Если местная скорость \vec{v} явно зависит от времени, т.е. изменяется с течением последнего, то движение и соответствующее ему поле скоростей называют неустановившимся или нестационарным. Если в каждой точке пространства вектор \vec{v} имеет постоянное во времени значение, то движение и поле скоростей будет установившимся или стационарным. Если ламинарные течения могут быть как установившимися, так и неустановившимися, то турбулентные течения, строго говоря, всегда являются неустановившимися. Неупорядоченное движение частиц в турбулентном потоке создает резкие изменения местных скоростей во времени, называемые пульсациями скорости.

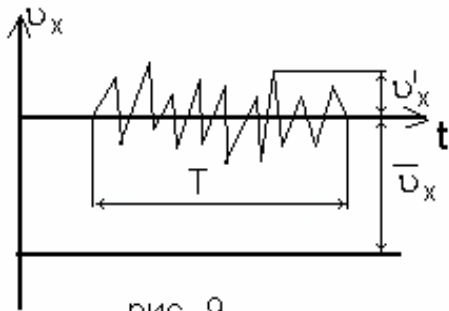


рис. 9

На рис. 9 приведено изменение местной мгновенной скорости v_x турбулентного потока. Видно, что местная скорость изменяется во времени достаточно резко, однако ее значение колеблется около некоторого среднего. Поскольку использование в расчетах мгновенных скоростей приводит к трудностям, вводится понятие местной осредненной скорости:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_0^T v_x dt,$$

где v_x - мгновенная местная скорость, T - период осреднения. Такой способ осреднения не является единственным, но благодаря простоте его широко применяют в гидромеханике. При этом можно предположить, что для каждого турбулентного движения существует такой достаточно большой по сравнению с периодом турбулентных пульсаций постоянный период осреднения T , что сглаживание по времени приводит к осредненной величине, при повторном сглаживании уже не изменяющейся, т.е. $\overline{\bar{v}_x} = \bar{v}_x$. Если в результате осреднения, проведенного в данной точке в разные моменты времени t , будут получаться одни и те же значения v_x , то осредненное движение называется стационарным, а само турбулентное движение - квазистационарным. Разницу скоростей v_x и \bar{v}_x называют пульсационной скоростью или просто пульсацией: $v'_x = v_x - \bar{v}_x$. Нетрудно убедиться, что осредненное значение пульсации равно нулю:

$$\overline{v'_x} = \frac{1}{T} \int_0^T v'_x dt = \frac{1}{T} \int_0^T (v_x - \bar{v}_x) dt = \bar{v}_x - \bar{v}_x = 0$$

По правилу осреднения также следует, что среднее значение производной от скорости по координате равно производной от среднего значения скорости по той же координате, т.е. $\overline{\frac{\partial v_x}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}$, т.к. операции дифференцирования по координате и интегрирования по времени независимы. Таким же свойством обладает и производная по времени, т.е. $\overline{\frac{\partial v_x}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}$. Все вышесказанное относится и к другим проекциям скорости v_y и v_z

Правила осреднения обладают еще и следующими свойствами [6]:

$$\overline{u_x + v_x} = \bar{u}_x + \bar{v}_x; \quad \overline{u_x \cdot v_x} = \bar{u}_x \cdot \bar{v}_x;$$

$$\overline{u_x \cdot \bar{v}_x} = \bar{u}_x \cdot \bar{v}_x; \quad \overline{\bar{u}_x \cdot v_x} = \bar{u}_x \cdot \bar{v}_x \text{ и т.д.}$$

Величина $\overline{u_x v_y}$, полученная в результате осреднения произведения двух пульсирующих функций u_x и v_y , носит наименование одноточечной (в знак того, что значения функций u_x и v_y при интегрировании берутся в одной и той же пространственно-временной точке) двойной корреляции, а отношение

$$R = \frac{\overline{u_x v_y}}{\sqrt{\bar{u}_x^2} \sqrt{\bar{v}_y^2}} \text{ - называется } \underline{\text{коэффициентом корреляции}} \text{ между двумя}$$

статистически связанными величинами. Равенство коэффициента корреляции $R = \pm 1$ говорит о полной, детерминированной связи явлений, описываемых u_x и v_y (причем знак "-" говорит о противоположных фазах колебаний), а равенство $R = 0$ говорит о статистической независимости явлений. Коэффициент корреляции между пульсациями, происходящими в двух разных точках пространства и, вообще говоря, в различные моменты времени, называется коэффициентом двухточечной пространственно - временной корреляции, причем, в зависимости от количества коррелируемых пульсирующих функций, двойной, тройной и т.д. корреляции.

Пульсационные составляющие скорости могут быть охарактеризованы частотой и амплитудой, которые при турбулентном движении изменяются в широких пределах. В каждой точке турбулентного потока имеют место пульсационные скорости с целым спектром частот: от низких (5-10Гц) до очень высоких (50-100кГц). Средняя амплитуда пульсаций скорости характеризуется

$$\text{величинами равными: } \sigma_x = \frac{1}{T} \int_0^T u_x'^2 dt = \overline{u_x'^2}; \quad \sigma_y = \overline{v_y'^2}; \quad \sigma_z = \overline{w_z'^2}. \text{ Обычно } \underline{\text{степенью}}$$

интенсивности турбулентности называют среднюю квадратичную величину скорости пульсаций, отнесенную к средней скорости потока:

$$\varepsilon_x = \frac{\sqrt{\sigma_x}}{\bar{u}}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sqrt{\sigma_y}}{\bar{v}}; \quad \varepsilon_z = \frac{\sqrt{\sigma_z}}{\bar{w}}, \text{ где } \bar{v} = \sqrt{\bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2 + \bar{u}_z^2}.$$

Интенсивность турбулентности изменяется от 0.3% в атмосфере до 7-8% и более в машинах.

В своих опытах Рейнольдс впервые обнаружил, что переход ламинарного движения в турбулентное обуславливается достижением критического значения

некоторого безразмерного числа, или критерия, которое в дальнейшем получило его имя. По опытам самого Рейнольдса критическое число оказалось равным

$$Re_{кр} = \left(\frac{v_{ср} d}{\nu} \right)_{кр} = 1.3 \cdot 10^4;$$

здесь $v_{ср}$ - средняя по расходу скорость, d - диаметр трубы. Впоследствии им же было открыто существование нижнего критического значения $Re_{кр} \approx 2000$, такого, что при $Re < Re_{кр}$ движение в трубе оставалось ламинарным, каковы бы ни были введенные в течение возмущения. Вместе с тем было замечено, что путем удаления возмущений на входе в трубу или уменьшения начальной их интенсивности можно искусственно затянуть ламинарное движение в область значительно бóльших значений числа Re , например, до $5 \cdot 10^4$. Конечно, такое затянутое ламинарное движение не терпит появления даже очень небольших возмущений и сразу же переходит в турбулентное.

2.2. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости

Явление перехода ламинарного движения в турбулентное в круглой цилиндрической трубе распространяется и на движение вязкой жидкости в пограничных слоях на поверхности твердых тел, в струях и в следах за телами. Если условиться количественно сопоставлять скорость на внешней границе пограничного слоя со скоростью на оси трубы, а толщину погранслоя с радиусом трубы, то можно ввести в рассмотрение число Re_{δ} пограничного слоя: $Re_{\delta} = \frac{v \cdot \delta}{\nu}$, характеризующее поток в данном сечении слоя.

Многочисленные опыты по определению критического числа для пограничного слоя на пластине привели к значениям, близким к критическому числу трубы. Тот же порядок $Re_{\delta кр}$ был найден и при обтекании круглого цилиндра, шара и крыловых профилей. При этом было обнаружено, что относительное расположение критического сечения пограничного слоя, в котором ламинарный слой переходит в турбулентный, существенно зависит от степени возмущенности набегающего на тело внешнего потока. При изменении этого фактора изменяется и критическое число Рейнольдса пограничного слоя.

Наличие того или иного режима движения в пограничном слое обусловлено развитием течения вдоль пограничного слоя. Так, начальный участок слоя обычно

бывает ламинарным, за ним располагается переходная область, где одновременно сосуществуют турбулентные зоны потока с ламинарными, и, наконец, область развитого турбулентного потока, состоящая из турбулентного ядра и тонкого вязкого ламинарного подслоя, граничащего с твердой стенкой.

Вместо Re_δ можно рассматривать числа $Re^* = \frac{v\delta^*}{\nu}$ и $Re^{**} = \frac{v\delta^{**}}{\nu}$, составленные по толщине вытеснения δ^* и толщине потери импульса δ^{**} . В настоящее время широко используется число Re^{**} .

По опытам на различных крыльях в разных аэродинамических трубах значение $Re_{кр}^{**}$ колеблется от 600 в сильно турбулентных трубах до 2300 в трубах с очень малой турбулентностью. Наблюдающиеся отличия в значениях $Re_{кр}^{**}$ для различных крыльев объясняются (кроме различной начальной турбулентности потока), во-первых, разной шероховатостью поверхности крыла, а также тем, попадет ли критическое сечение в конфузорную или диффузорную части пограничного слоя. В области ускоренного течения (конфузорная часть слоя) $Re_{кр}^{**}$ имеет бóльшие значения, чем в области замедленного течения (диффузорная часть слоя).

В случае свободного пограничного слоя, как, например, в струе или следе вдалеке за телом, критические числа $Re_{кр}$ очень малы, и практически всегда приходится иметь дело с турбулентными струями и следами за телом.

2.3. Математическая модель

осредненного турбулентного движения

Пусть имеем систему уравнений пограничного слоя:

$$\begin{cases} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Так как первый член в правой части первого уравнения системы (2.1) записан как $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, а не $v'_x \cdot v'_x$, то надо оставить и второе уравнение $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, чтобы сохранилась корректность системы уравнений пограничного слоя.

Для описания турбулентного движения Рейнольдс предложил следующий прием. Регистрируя во времени скорости и давления в данной точке потока, можно их представить как:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x; \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y; \quad p = \bar{p} + p',$$

где v_x, v_y, p - действительно существующие в потоке мгновенные (актуальные) проекции скорости и давления; $\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{p}$ - осредненные во времени их значения; v'_x, v'_y, p' - пульсации проекций скорости и давления.

Под осредненным значением параметра понимается обычное интегральное среднее по времени t за промежуток T , называемый, периодом осреднения:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T} \int_0^T v_x dt; \quad \bar{v}_y = \frac{1}{T} \int_0^T v_y dt; \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

В турбулентном движении добавляется пульсационная составляющая скорости (рис.10), в результате чего наблюдается вихревое движение, при котором сопротивление значительно возрастает. Таким образом, турбулентное течение обладает бóльшим сопротивлением по сравнению с ламинарным движением.

Предложение Рейнольдса имеет физический смысл, поскольку турбулентное движение жидкости характеризуется непрерывными случайными пульсациями давления, компонент скорости и других гидродинамических величин. При этом каждая реализация турбулентного движения в одних и тех же условиях индивидуальна, т.е. процесс является случайным (недетерминированным).

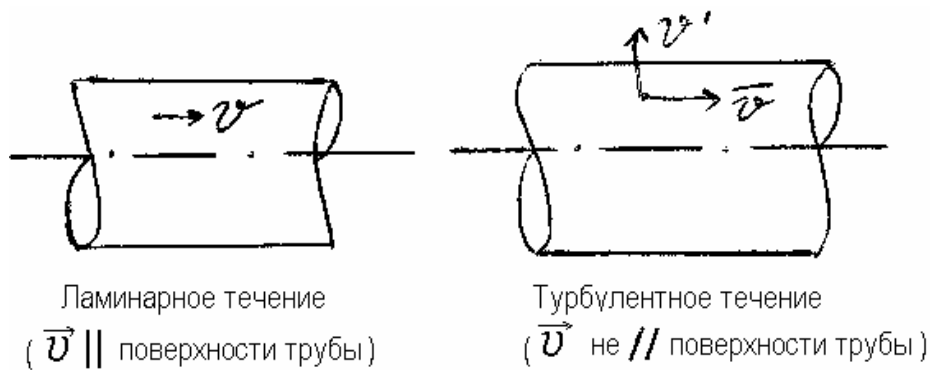


Рис. 10

Поскольку все пульсирующие величины можно разложить на средние по ансамблю реализаций турбулентного течения - математические ожидания (обозначаемые черточками сверху), и собственно пульсации (обозначаемые штрихами), то и приходим к Рейнольдсову представлению случайного поля:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x; \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y; \quad p = \bar{p} + p'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'.$$

(Если ограничиться несжимаемой однородной жидкостью, то $\rho = \text{const}$ и, следовательно, $\rho' = 0$; $\rho = \bar{\rho}$).

Поле осредненных величин называется осредненным движением, а поле мгновенных значений - актуальным движением. Если осредненное движение не меняется со временем, поток называется установившимся или стационарным. В силу эргодического свойства стационарных случайных полей в установившемся потоке результат осреднения той или иной гидродинамической переменной по реализациям турбулентного движения совпадает с результатом осреднения по времени для любой одной реализации.

В настоящее время турбулентное движение принято характеризовать осредненным по времени значением величин. В уравнениях сохранения массы, количества движения и энергии в потоке вязкой жидкости истинные (мгновенные) величины заменяются осредненными во времени их значениями следующим образом. Истинные величины в данной точке турбулентного потока раскладываются на осредненные и пульсационные их значения, что соответствует физическому представлению турбулентного движения. Тогда уравнения неразрывности, движения и энергии для осредненного турбулентного движения несжимаемой жидкости в общем случае получаются из исходных уравнений после замены в них истинных значений переменных осредненными их значениями и пульсациями с последующим осреднением этих параметров по времени. При

введении в действие новых переменных добавляется три неизвестных: $v'_x; v'_y; p'$, и задача переходит в разряд неопределенных. Для устранения неопределенности и применяется усреднение по времени.

Рассмотрим решение задачи. Возьмем, например, уравнение: $v_x = \bar{v}_x + v'_x$.

Проведя операцию осреднения, его можно записать следующим образом:

$$\bar{v}_x = \bar{\bar{v}}_x + \bar{v}'_x \text{ или } \frac{1}{T} \int_0^T v_x dt = \bar{v}_x + \frac{1}{T} \int_0^T v'_x dt. \text{ (здесь } \bar{\bar{v}}_x = \bar{v}_x, \text{ т.к. второе осреднение по}$$

условию не меняет результата). Так как левая часть уравнения равна \bar{v}_x , то

$$\bar{v}'_x = \frac{1}{T} \int_0^T v'_x dt = 0. \text{ По аналогии } \bar{v}'_y = \frac{1}{T} \int_0^T v'_y dt = 0; \bar{p}' = \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = 0. \text{ Следовательно,}$$

среднее значение пульсационных составляющих равно нулю. (Но надо учесть, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T v'^2_x dt \neq 0; \frac{1}{T} \int_0^T v'_x v'_y dt \neq 0 \text{ и т.д.). Применяя вышесказанное к исходной системе}$$

уравнений (2.1), можно после определенных преобразований получить уравнения турбулентного пограничного слоя в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} (2.2)$$

Здесь а) $\bar{p} = p - p'$; б) $\bar{v}_x = v_x - v'_x$; в) $\bar{v}_y = v_y - v'_y$;

$$\text{г) } \tau_{xy} = -\rho \overline{v'_x v'_y}, \text{ где } \overline{v'_x v'_y} = \frac{1}{T} \int_0^T v'_x v'_y dt, \text{ д) } \tau_{xx} = -\rho v'^2_x,$$

$$\text{где } \overline{v'^2_x} = \frac{1}{T} \int_0^T v'^2_x dt.$$

Видно, что уравнения такие же, как и для ламинарного пограничного слоя, только с добавкой напряжений от турбулентных пульсаций τ_{xx} и τ_{xy} , называемых рейнольдсовыми напряжениями.

Для вывода уравнений турбулентного пограничного слоя надо осреднить исходные уравнения погранслоя, несколько преобразовав первое уравнение - уравнение движения (аналогично случаю ламинарного пограничного слоя).

Для этого уравнение неразрывности умножим на v_x

$$v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0;$$

и добавим его в левую часть первого уравнения системы (2.1)

$$\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

В результате преобразований (как и в случае ламинарного пограничного слоя - уравнение (1.21)) первое уравнение системы (2.1) получим в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(v_x v_y) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Здесь: $\frac{\partial}{\partial x}(v_x v_x) = 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y}(v_x v_y) = v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}$.

Проведем над обеими частями этого равенства операцию осреднения:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{v_x v_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_x v_y}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

$\overline{v_x v_x} = \overline{(\bar{v}_x + v'_x) \cdot (\bar{v}_x + v'_x)} = \overline{\bar{v}_x^2 + 2\bar{v}_x v'_x + v'^2_x} = \bar{v}_x^2 + 2\bar{v}_x \bar{v}'_x + \overline{v'^2_x}$ (для первого члена используется правило осреднения $\overline{\bar{v}_x \bar{v}_x} = \bar{v}_x \bar{v}_x = \bar{v}_x^2$). Так как $\bar{v}'_x = 0$, то $\overline{v_x v_x} = \bar{v}_x^2 + \overline{v'^2_x}$;

$$\overline{v_x v_y} = \overline{(\bar{v}_x + v'_x) \cdot (\bar{v}_y + v'_y)} = \overline{\bar{v}_x \bar{v}_y + \bar{v}_x v'_y + v'_x \bar{v}_y + v'_x v'_y} = \bar{v}_x \bar{v}_y + \bar{v}_x \bar{v}'_y + \bar{v}'_x \bar{v}_y + \overline{v'_x v'_y} = \bar{v}_x \bar{v}_y + \overline{v'_x v'_y}.$$

Так как $p = \bar{p} + p'$, то $\bar{p} = \bar{\bar{p}} + \bar{p}' = \bar{p}$ (т.к. $\bar{p}' = 0$). Аналогично

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x \text{ и } \bar{v}_x = \bar{\bar{v}_x} + \bar{v}'_x = \bar{v}_x \text{ т.к. } \bar{v}'_x = 0$$

Подставляя значения $\overline{v_x v_x}$ и $\overline{v_x v_y}$ в уравнение (2.3), получим:

$$\frac{\partial \bar{v}_x^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_x v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x \bar{v}_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{v'^2_x}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'_x v'_y}}{\partial y} \quad (2.4)$$

Учитывая уравнение неразрывности в осредненном виде:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0, \quad (2.5)$$

можно уравнение движения (2.4) записать так:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{v'^2_x}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'_x v'_y}}{\partial y} \quad (2.6)$$

С этой целью левая часть уравнения (2.4) преобразовывается с учетом уравнения неразрывности следующим образом:

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} - \bar{v}_x \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right) = \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}.$$

Уравнения (2.5) и (2.6) входят в систему дифференциальных уравнений Рейнольдса осредненного турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости, которую можно окончательно представить в виде:

$$\begin{cases} \rho \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \rho \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \overline{v_x'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \overline{v_x' v_y'} \right) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Эта система имеет одинаковый вид как для основного течения жидкости, так и для течения жидкости в погранслое.

Сопоставим первое уравнение системы (2.7) с уравнением движения вязкой жидкости в напряжениях, которое выглядит следующим образом:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right).$$

В случае одномерного стационарного движения и отсутствия массовых сил это уравнение имеет вид:

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Сравнивая уравнение Рейнольдса с уравнением движения в напряжениях, можно представить себе правую часть уравнения Рейнольдса как результат подстановки в уравнение в напряжениях вместо величин p_{xx} и p_{xy} суммы вязких напряжений, определяемых обобщенным законом Ньютона, и дополнительных турбулентных напряжений p'_{xx} и p'_{xy} , возникших за счет наличия в потоке пульсаций, т.е.:

$$p_{xx} = -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + p'_{xx}, \quad p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right) + p'_{xy}.$$

В нашем случае

$$a) \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} \quad (\text{т.к. в уравнении Прандтля пограничного слоя пропадает член}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \text{ при стремлении } Re_{\infty} \rightarrow \infty).$$

$$p'_{xx} = \tau_{xx} = -\overline{\rho v_x'^2}. \text{ Тогда } \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{\rho v_x'^2} \right).$$

б) $\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial p'_{xy}}{\partial y}$ (т.к. в уравнении Прандтля пограничного слоя пропадает

член $\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$ при стремлении $Re_{\infty} \rightarrow \infty$). $p'_{xy} = \tau_{xy} = -\overline{\rho v'_x v'_y}$. Тогда

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{\rho v'_x v'_y} \right).$$

Таким образом получаем полную тождественность уравнений движения в напряжениях (2.8) и Рейнольдса (2.7).

В общем случае трехмерного движения эти дополнительные турбулентные напряжения p'_{xx} , p'_{xy} и т.д. образуют, так же как и вязкие напряжения, симметричный тензор второго ранга:

$$P' = \begin{bmatrix} -\overline{\rho v_x'^2} & -\overline{\rho v'_x v'_y} & -\overline{\rho v'_x v'_z} \\ -\overline{\rho v'_x v'_y} & -\overline{\rho v_y'^2} & -\overline{\rho v'_y v'_z} \\ -\overline{\rho v'_x v'_z} & -\overline{\rho v'_y v'_z} & -\overline{\rho v_z'^2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

называемый тензором турбулентных напряжений с компонентами $p'_{ij} = -\overline{\rho v'_i v'_j}$, которые называются рейнольдсовыми напряжениями.

Итак, приходим к выводу: уравнения осредненного турбулентного движения могут быть написаны в той же форме, что и уравнения действительного движения, если только, помимо вязких (ньютоновских) напряжений, учесть еще дополнительные турбулентные напряжения.

Назовем тензором полного (суммарного) напряжения тензор P , равный

$$P = -\bar{p}E + 2\mu\bar{S} + P', \quad (2.10)$$

и имеющий компоненты:

$$p_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \left(-\overline{\rho v'_i v'_j} \right) \quad (2.11)$$

Не только вид уравнений движения, но и вид уравнений импульсов (интегральное соотношение Кармана) в турбулентном пограничном слое остается таким же, как и для ламинарного пограничного слоя:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{v'_\infty}{v_\infty} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}, \quad (2.12)$$

только значения δ , δ^* , δ^{**} и τ_w (напряжение трения на твердой стенке) будут иными:

а) толщина вытеснения масс в пограничном турбулентном слое

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{v}_x}{v_\infty}\right) dy; \quad (2.13)$$

б) толщина потери импульса в турбулентном погранслое

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\bar{v}_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{\bar{v}_x}{v_\infty}\right) dy; \quad (2.14)$$

в) напряжение трения на твердой стенке $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)_{y=0}$.

Граничные условия будут следующими :

а) на стенке: $y = 0$; $\bar{v}_x = \bar{v}_y = 0$; $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \approx \frac{v_\infty - \bar{v}_x}{\ell}$;

б) на внешней границе турбулентного погранслоя:

$$y = \delta; \quad \bar{v}_x = v_\infty; \quad \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} = 0,$$

Необходимо учесть, что уравнение Эйлера $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v'_\infty v_\infty$ в случае обтекания плоской пластины преобразуется к виду: $v'_\infty = 0$ (т.к. в этом случае $v_\infty = v_{x,\infty}$ постоянна вдоль оси X и тогда $v'_\infty = v'_{x,\infty} = 0$ - нет изменения скорости вдоль пластины) и $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Для плоской пластины уравнение импульсов имеет вид:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2} \quad (2.16)$$

2.4. Двухслойная схема пристенной турбулентности

Чтобы подчеркнуть главную особенность турбулентного движения около твердой стенки, рассмотрим установившееся движение жидкости вдоль безграничной пластины [7]. Расположим ось координат так, чтобы ось x была направлена вдоль пластины, а ось y - по нормали к ней (рис. 11). При такой идеализации течения, когда поток совершает плоское стационарное осредненное движение при отсутствии массовых сил, любые два сечения, перпендикулярные линиям тока, идентичны в кинематическом и динамическом смысле. Это позволяет полагать все производные по X равными нулю, компоненты скорости $v_y = v_z$ а

составляющая скорости v_x и другие элементы движения зависят только от y :

$$v_x = v_x(y); p = p(y)$$

Сравним между собой ламинарное и осредненное турбулентное движения такого типа.

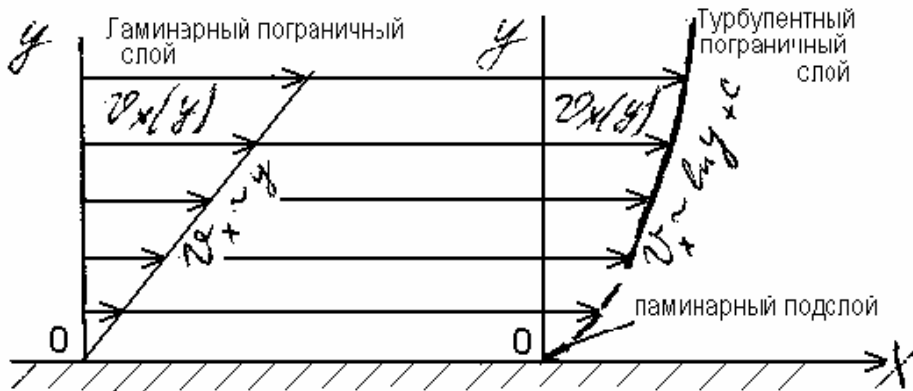


Рис. 11

Замечая, что $v_x = v_x(y)$; $v_y = v_z = 0$; $p = p(y)$, получим уравнения Навье - Стокса ламинарного движения в виде:

$$а) \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0; \quad (2.17)$$

$$б) \frac{dp}{dy} = 0. \quad (2.18)$$

Проинтегрируем эти уравнения, преобразовав (2.17) к виду:

$$а) \frac{d}{dy} \mu \frac{dv_x}{dy} = 0, \quad \mu \frac{dv_x}{dy} \Big|_{y=0} = C_1 = \tau_w - \text{здесь в качестве постоянной интегрирования}$$

принято напряжение трения на стенке.

б) $p = \text{const.}$

После повторного интегрирования уравнения (2.17) распределение скоростей $v_x(y)$ в ламинарном потоке будет:

$$v_x = \frac{\tau_w}{\mu} y + C_2.$$

При $y=0$ $v_x=0$, т.е. на стенке скорость обращается в нуль, что дает постоянную интегрирования $C_2=0$.

Тогда получаем следующее распределение скоростей $v_x(y)$ в ламинарном

$$\text{потоке: } v_x = \frac{\tau_w}{\mu} y.$$

Это свидетельствует о линейном профиле скоростей в ламинарном потоке и о постоянстве напряжения трения между любыми слоями в осредненном движении, равного напряжению трения на стенке:

$$\mu \frac{dv_x}{dy} = \text{const} = \tau_w.$$

Перейдем теперь к турбулентному движению, описываемому в нашем случае уравнением Рейнольдса. Будет считать, что для безграничной пластины все параметры потока не зависят от x . Отбросив черточки над осредненными величинами скоростей (поскольку рассматривается осредненное движение), получим уравнение Рейнольдса осредненного движения несжимаемой вязкой жидкости.

В исходном виде уравнение Рейнольдса движения несжимаемой вязкой жидкости имеет вид:

$$\rho \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \rho \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{v_x'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v_x' v_y'}).$$

Так как все производные по X равны нулю (поскольку все параметры потока не зависят от X); $v_y=0$ для тонкой пластины, то, опуская черточки над v_x , получаем:

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{v_x' v_y'}) = 0 \quad (2.19)$$

или

$$\frac{d}{dy} \left[\mu \frac{dv_x}{dy} + \tau \right] = 0 \quad (2.20)$$

где $\tau = -\rho \overline{v_x' v_y'}$ - напряжение турбулентного трения.

После интегрирования получим:

$$\mu \frac{dv_x}{dy} + \tau = C_3.$$

Для определения постоянной интегрирования воспользуемся граничными условиями на стенке, т.е. при $y=0$. На стенке напряжение турбулентного трения $\tau = -\rho \overline{v_x' v_y'}$ равно нулю, т.к. на стенке не могут существовать нормальные к ней скорости пульсаций v_y' . Тогда при $y=0$

$$C_3 = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0} = \tau_w$$

и, следовательно, получаем:

$$\mu \frac{dv_x}{dy} + \tau = \tau_w. \quad (2.21)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое. Напряжение вязкого трения $\mu \frac{dv_x}{dy}$ будет иметь значительную величину в непосредственной близости от стенки, и с увеличением расстояния от стенки оно будет убывать. Напряжение турбулентного трения τ , наоборот, вблизи стенки мало и по мере удаления от стенки растет. Область вблизи стенки, в которой напряжения полностью определяются вязким трением, а турбулентное трение пренебрежимо мало, называют ламинарным подслоем (см. рис. 11).

В целях изучения профиля скоростей в области преобладания турбулентных напряжений трения рассмотрим область, в которой $\mu \frac{dv_x}{dy}$ становится пренебрежимо малой величиной по сравнению с τ . Тогда в соответствии с уравнением (2.21):

$$\tau = \tau_w = -\overline{\rho v'_x v'_y} \quad (2.22)$$

По аналогии с вязким трением турбулентное напряжение можно представить в виде:

$$\tau = A \frac{dv_x}{dy} = \rho \varepsilon \frac{dv_x}{dy}, \quad (2.23)$$

где A и $\varepsilon = \frac{A}{\rho}$ - аналоги динамического и кинематического коэффициентов вязкости, будем называть их соответствующими коэффициентами турбулентного переноса. По своей физической сущности коэффициенты A и ε , являясь аналогами коэффициентов молекулярного переноса μ и ν , существенно отличаются от последних. В то время как коэффициенты молекулярного переноса (μ и ν) однозначно определяются физическими свойствами жидкостей и газов и их состоянием (температурой и давлением), но не зависят от динамических свойств потоков, коэффициенты турбулентного переноса определяются прежде всего статистическими свойствами движения.

Чтобы вывести формулу для турбулентного напряжения трения, Прандтль использовал некоторые физические предпосылки и теорию размерностей. Можно считать, что по аналогии с вязким трением величина турбулентного трения зависит

от градиента скорости $\frac{dv_x}{dy}$, является функцией расстояния y от стенки и зависит от плотности жидкости ρ (формула (2.22)). Тогда формула для турбулентного напряжения трения, называемая формулой Прандтля, имеет вид:

$$\tau = \tau_w = \rho \ell^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2, \quad (2.24)$$

где ℓ - длина перемешивания, характеризующая собой масштаб турбулентности (т.е. средний размер связанных объемов жидкостей, участвующих в турбулентном переносе).

Замечая, что расстояние "y" данной точки от твердой стенки представляет собой единственную характерную для этой точки в безграничном потоке длину, Прандтль предложил наиболее простую зависимость

$$\ell = \alpha \cdot y,$$

где α - коэффициент пропорциональности (числовая константа, определяемая из опыта). Необходимо отметить, что эта формула имеет место лишь в пристеночной области. Подставив эту зависимость в формулу (2.24), получим:

$$\tau = \tau_w = \alpha^2 \rho y^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2.$$

Решая это уравнение относительно $\left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2$ и интегрируя по "y", получим профиль скоростей при турбулентном движении:

$$v_x = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C. \quad (2.25)$$

Этот так называемый логарифмический профиль скоростей в турбулентном потоке существенно отличается от ламинарного линейного распределения скоростей вблизи стенки.

Так как последняя формула была выведена в предположении, что исследуется движение на некотором расстоянии от стенки, то она может и не удовлетворяться при $y=0$ и, следовательно, нельзя находить произвольную постоянную "C"- из граничных условий на стенке. Действительно, при $y = 0$ скорость v_x должна быть равна нулю, а по уравнению при $y=0$ будет $v_x \rightarrow \infty$. Поэтому для определения постоянной интегрирования "C" приходится выделять

вблизи твердой границы тонкий "вязкий подслоя" с линейным профилем скоростей, а затем произвести сращивание логарифмического решения с линейным.

Согласно прежним рассуждениям, будем искать такое расстояние от стенки $y = \delta_l$, для которого при $y < \delta_l$ существенно преобладает вязкое трение, а при $y > \delta_l$ - турбулентное трение, т.е. при $y < \delta_l$ движение будет ламинарным, а при $y > \delta_l$ - турбулентным. Величина δ_l называется толщиной ламинарного вязкого подслоя. В действительности такой резкой границы между пристеночным подслоем ламинарного движения и областью турбулентного движения не существует. С физической точки зрения весь поток можно разделить по вертикали к пластине на три области: 1) область, непосредственно прилегающую к стенке с резким преобладанием вязкого трения; 2) область на некотором удалении от стенки с преобладанием турбулентного трения; 3) промежуточную или переходную область, в которой вязкое (молекулярное) и турбулентное трение соизмеримы. Эксперимент подтверждает наличие этих трех областей.

Если для удобства ограничиться все-таки наличием лишь двух областей: вязкого подслоя и турбулентного ядра, и воспользоваться методом размерностей, считая толщину подслоя степенной одночленной функцией от величин, ее определяющих - вязкости μ , плотности среды ρ и напряжения трения на стенке τ_w , то получим:

$$\delta_l = \alpha \mu^a \cdot \rho^b \cdot \tau_w^c.$$

Используя размерности μ , ρ , τ_w и имея в виду, что α - безразмерная константа, будем иметь уравнение для размерностей в следующем виде:

$$[M] = \left[\frac{H \cdot c}{M^2} \right]^a \cdot \left[\frac{K \Gamma}{M^3} \right]^b \cdot \left[\frac{H}{M^2} \right]^c$$

или

$$[M] = \left[\frac{K \Gamma \cdot M}{c^2} \cdot \frac{c}{M^2} \right]^a \cdot \left[\frac{K \Gamma}{M^3} \right]^b \cdot \left[\frac{K \Gamma \cdot M}{c^2 \cdot M^2} \right]^c = \left[\frac{K \Gamma}{c \cdot M} \right]^a \cdot \left[\frac{K \Gamma}{M^3} \right]^b \cdot \left[\frac{K \Gamma}{c^2 \cdot M} \right]^c.$$

Сравнивая показатели степеней в уравнении справа и слева (приравнивая их), получим следующую систему:

$$\text{для } [M] \quad 1 = -a - 3b - c,$$

$$\text{для } [K\Gamma] \quad 0 = a + b + c,$$

$$\text{для } [c] \quad 0 = -a - 2c.$$

Эта система имеет единственное решение: $a = 1$, $b = c = -1/2$. Отсюда окончательно получим, что толщина ламинарного подслоя равна

$$\delta_{л} = \alpha \frac{\mu}{\sqrt{\rho\tau_w}} = \alpha \frac{v}{\sqrt{\tau_w/\rho}}. \quad (2.26)$$

Для получения общепринятых формул введем следующие обозначения:

$$v_* = \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}; \quad \frac{v}{v_*} = l_* = \frac{v}{\sqrt{\tau_w/\rho}} \quad (2.27)$$

Величина v_* , имеющая размерность скорости, по своей природе состоит из динамических величин: напряжения трения и плотности, и называется динамической скоростью. Величина l_* , имеющая размерность длины - динамической длиной. Для облегчения запоминания этих важных величин, заметим, что если принять динамическую длину и динамическую скорость за масштабы длин и скоростей, то составленное с их помощью число Рейнольдса ($Re = \frac{v_* l_*}{v}$) всегда равно единице.

Если воспользоваться введенными обозначениями (2.27), то толщина подслоя

$$\delta_{л} = \alpha \frac{v}{v_*} = \alpha l_* = \alpha \frac{v}{\sqrt{\tau_w/\rho}}. \quad (2.28)$$

Полагая, что в подслое величина скорости есть линейная функция от "y", и пользуясь формулой $v_x = \frac{\tau_w}{\mu} y$ - определенной для ламинарного потока вдоль пластины, получим значение скорости на границе подслоя $v_{хл}$, равной:

$$v_{хл} = \frac{\tau_w}{\mu} \delta_{л} = \alpha \frac{\tau_w}{\mu} \frac{v}{\sqrt{\tau_w/\rho}}$$

или

$$v_{хл} = \alpha \sqrt{\tau_w/\rho} = \alpha v_*. \quad (2.29)$$

Таким образом, получены граничные условия (при $y = \delta_{л} = \alpha l_*$; $v_x = v_{хл} = \alpha v_*$) и теперь можно найти постоянную интегрирования "C", введя эти условия в формулу (2.25) логарифмического профиля скоростей при турбулентном движении:

$$v_{хл} = \frac{v_*}{\alpha} \ln \delta_{л} + C.$$

Отсюда:

$$C = v_{xл} - \frac{v_*}{\alpha} \ln \delta_{л} = v_* \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \frac{v}{v_*} \right) = v_* \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right) - \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{v}{v_*}.$$

Подставив значение "С" в формулу(2.25), получим

$$v_x = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + v_* \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right) - \frac{v_*}{\alpha} \ln \frac{v}{v_*}.$$

Разделив обе части равенства на v_* , получим:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{v_* \alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{v}{v_*} + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right)$$

Так как $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$, то

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \left(\ln y - \ln \frac{v}{v_*} \right) + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right)$$

или окончательно:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{y v_*}{v} + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha \right).$$

Переходя от натуральных к десятичным логарифмам, будем иметь:

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{2.303}{\alpha} \lg \frac{y v_*}{v} + \left(\alpha - \frac{2.303}{\alpha} \lg \alpha \right). \quad (2.30)$$

Таким образом, учитывая, что α и α - константы, получим закон распределения скоростей в турбулентном потоке:

$$\frac{v_x}{v_*} = A \cdot \lg \frac{y v_*}{v} + B, \quad (2.31)$$

где А и В - некоторые постоянные, определяемые через универсальные постоянные турбулентного движения α и α следующим образом:

$$A = \frac{2.303}{\alpha}; \quad B = \alpha - \frac{2.303}{\alpha} \lg \alpha.$$

2.5. Математическое моделирование турбулентного течения несжимаемой жидкости в трубах

При ламинарном движении полученные теоретические решения для труб хорошо совпадают с результатами опытов. Для турбулентного движения в трубах точного теоретического решения не существует и все закономерности получены либо из опытов, либо имеют полуэмпирический характер.

Рассмотрим профили скоростей при турбулентном движении в трубе. Между законом сопротивления и характером профиля скоростей в трубе существует однозначная связь, т.е. каждому профилю скоростей соответствует свой закон сопротивления, и наоборот.

Для получения закона распределения скоростей по радиусу трубы будем полагать, что, так же, как и для бесконечной пластины, в непосредственной близости от стенки трубы имеет место ламинарный подслой, в котором скорость - линейная функция от "y":

$$v_x = \frac{\tau_w}{\mu} y = \frac{\tau_w \rho}{\rho \mu} y = v_*^2 \frac{y}{\nu} = v_* \frac{v_* y}{\nu}, \quad (2.32)$$

и что профиль скоростей в остальной части трубы подчиняется закону:

$$\frac{v_x}{v_*} = A \cdot \lg \frac{y v_*}{\nu} + B,$$

где A и B выражаются через универсальные газовые постоянные α и α' .

Известный ученый Никурадзе из анализа опытов с турбулентным потоком в круглой трубе при числах $Re = \frac{\bar{v} D}{\nu}$ (где \bar{v} - средняя расходная скорость, D - диаметр трубы), достигавших $3 \cdot 10^6$, нашел численные значения постоянных $\alpha' = 0.4$ и $\alpha = 11.5$. Таким образом, был получен логарифмический закон профиля скоростей:

$$\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{y v_*}{\nu} + 5.5. \quad (2.33)$$

Из опытов получено, что нижний предел $\frac{v_* y}{\nu} \approx 5.0$, а верхнее предельное значение

≈ 70 . Это означает, что в пределах $5 \leq \frac{v_* y}{\nu} \leq 70$ имеет место переходная область, в

которой вязкое и турбулентное трения соизмеримы. При $5 < \frac{v_* y}{\nu}$ будет только

вязкое (или ламинарное) трение, а при $\frac{v_* y}{\nu} > 70$ только турбулентное трение.

Далее следует, что толщина ламинарного подслоя с учетом формулы (2.28) может быть определена из условия:

$$\delta_l = 11.5 \frac{\nu}{v_*}.$$

Измерения показали, что вблизи центра трубы распределение скоростей несколько отлично от логарифмического, но это отличие не очень существенно и в

практических расчетах не учитывается. Можно считать, что логарифмический профиль скоростей является универсальным, пригодным для широкого диапазона чисел Re.

Вычислим далее так же, как и для ламинарного движения, максимальную v_{\max} и среднюю \bar{v} скорости и расход жидкости при логарифмическом законе распределения скоростей. Очевидно, максимальная скорость v_{\max} будет на оси трубы, т.е. при $y=R$. Подставив это значение в формулу для (2.33), получим:

$$\frac{v_{\max}}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* R}{\nu} + 5.5.$$

Вычитая из этой формулы значение $\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* y}{\nu} + 5.5$, получим так называемый

дефект скорости:

$$\frac{v_{\max} - v_x}{v_*} = -5.75 \cdot \lg \frac{y}{R}$$

или

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{v_{\max}}{v_*} + 5.75 \cdot \lg \frac{y}{R} = \frac{v_{\max}}{v_*} + \frac{5.75}{2.303} \ln \frac{y}{R} = \frac{v_{\max}}{v_*} + 2.5 \cdot \ln \frac{y}{R} = \frac{v_{\max}}{v_*} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{y}{R}.$$

Здесь $\alpha=0.4$ по Никурадзе. Тогда $\frac{v_{\max} - v_x}{v_*} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \lg \frac{y}{R}$.

Величина средней скорости \bar{v} может быть определена как отношение объемного расхода Q к площади поперечного сечения трубы, т.е.

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_x 2\pi(R-y)dy = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R v_x (R-y)dy = 2 \int_0^1 v_x \left(1 - \frac{y}{R}\right) \left(\frac{y}{R}\right) dy.$$

Подставив под интеграл величину скорости по формуле

$$v_x = v_{\max} + \frac{v_*}{\alpha} \lg \frac{y}{R}$$

и разделив обе части выражения для \bar{v} на v_* , получим:

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{v_{\max}}{v_*} + \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \ln \frac{y}{R} \left(1 - \frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{v_{\max}}{v_*} - 3.75.$$

Таким образом, получим зависимость:

$$\frac{v_{\max} - \bar{v}}{v_*} = 3.75.$$

Если взять выражение для $\frac{v_{\max}}{v_*}$ и разделить его на выражение для $\frac{\bar{v}}{v_*}$, то получим отношение максимальной скорости (на оси трубы) к ее среднему (расходному) значению по сечению трубы:

$$\frac{v_{\max}}{\bar{v}} = \frac{5.75 \lg \frac{v_* R}{\nu} + 5.5}{\frac{v_{\max}}{v_*} - 3.75}.$$

В отличие от ламинарного движения в круглой трубе, при котором $\frac{v_{\max}}{\bar{v}} = 2$, в турбулентном движении это отношение уменьшается с ростом числа Re от 1.3 (при Re = 5000) до 1.15 (при Re = $3 \cdot 10^6$). При $Re \rightarrow \infty$ указанное отношение как бы стремится к единице. Это говорит о резком отличии формы профиля скоростей в турбулентном движении от параболы скоростей в ламинарном движении и объясняется тем, что профили скоростей при переходе от ламинарного движения к турбулентному становятся более полными, причем степень их заполненности возрастает с увеличением числа Re.

Более простым, но далеко не универсальным профилем скоростей при турбулентном движении в трубе является так называемый степенной профиль:

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^n. \quad (2.34)$$

Этот степенной профиль скоростей при числах $Re \approx 5 \cdot 10^4$ имеет вид:

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R} \right)^{1/7}$$

и получил название закона одной седьмой.

Экспериментально было показано, что величина показателя степени "n" зависит от числа Re и с его увеличением падает. Оказалось возможным каждому числу Re подобрать такой показатель степени "n", чтобы полученный профиль скоростей наилучшим образом совпадал с результатами эксперимента.

Отношение максимальной к средней по сечению скорости при степенном профиле может быть найдено следующим образом. Определив \bar{v} по формуле

$$\bar{v} = 2v_{\max} \int_0^1 \frac{v_x}{v_{\max}} \left(1 - \frac{y}{R} \right) d\left(\frac{y}{R} \right),$$

найдем:

$$\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = 2 \int_0^1 \left(\frac{y}{R}\right)^n \left(1 - \frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

или окончательно:

$$\frac{v_{\max}}{\bar{v}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Результаты расчетов при различных "n" можно свести в таблицу:

n	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
$\frac{v_{\max}}{\bar{v}}$	1.264	1.224	1.194	1.173	1.156

Можно отметить, что отношения v_{\max}/\bar{v} , полученные по степенному и логарифмическому законам, практически совпадают.

Аналогично обычному степенному закону можно ввести степенное распределение скоростей в виде:

$$\frac{v_x}{v_*} = A \left(\frac{y v_*}{\nu} \right)^n. \quad (2.35)$$

Значение коэффициента A можно определить из граничных условий на границе ламинарного подслоя: при $y=\delta_{\text{л}}$ скорость $v_x=v_{\text{хл}}$ и постоянная

$$A = \frac{v_{\text{хл}}}{v_*} \left(\frac{\nu}{\delta_{\text{л}} v_*} \right)^n. \quad \text{Но так как } \frac{v_{\text{хл}}}{v_*} = \alpha, \text{ а } \delta_{\text{л}} = \alpha \frac{\nu}{v_*}, \text{ то } \frac{\delta_{\text{л}} v_*}{\nu} = \alpha \text{ и тогда}$$

$$A = \alpha \cdot \alpha^{-n} = \alpha^{1-n}.$$

Зная величину α и задаваясь показателем n, можно получить численное значение постоянной A. Если $\alpha=11.5$, то при $n=1/7$ $A=8.74$, и следовательно:

$$\frac{v_x}{v_*} = 8.74 \left(\frac{y v_*}{\nu} \right)^{1/7}.$$

Надо отметить, что такое распределение скоростей при $n=1/7$ хорошо совпадает с экспериментом лишь в области $Re \leq 10^5$, в то время как логарифмический профиль скоростей, который является универсальным законом, дает хорошее совпадение с экспериментом во всем диапазоне скоростей.

Рассмотрим законы сопротивления при турбулентном движении в трубах. Как уже было сказано, между профилем скоростей в трубе и законом сопротивления существует однозначная связь, т.е. каждому профилю скоростей соответствует свой закон сопротивления, и наоборот.

Блазиус предложил степенной закон сопротивления в виде:

$$\lambda = \frac{a}{\text{Re}^m},$$

где λ - коэффициент сопротивления; $a = 0.3164$; $m = 0.25$ (при $\text{Re}_{\text{кр}} < \text{Re} < 5 \cdot 10^4$).

Более поздние опыты показали, что численные значения в законе сопротивления зависят от числа Re . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим связь динамической скорости v_* с коэффициентом сопротивления λ . При равномерном установившемся движении жидкости в трубе перепад ΔP полностью определяется величиной τ_w напряжения трения на стенке, так что безотносительно к характеру движения жидкости в трубе (ламинарному или турбулентному) можно написать следующее равенство:

$$\Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \tau_w \cdot \pi D \ell, \quad (2.36)$$

означающее, что движущийся перепад уравнивается сопротивлением трения. С другой стороны:

$$\Delta P = \lambda \frac{\ell}{D} \cdot \rho \frac{\bar{v}^2}{2}. \quad (2.37)$$

В этих формулах ΔP - перепад давления на участке трубы длиной ℓ ; D - диаметр трубы; \bar{v} - средняя скорость.

Подставив ΔP из формулы (2.37) в формулу (2.36), получим:

$$\tau_w \cdot \pi D \ell = \Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \lambda \frac{\pi}{4} \ell \cdot D \cdot \rho \frac{\bar{v}^2}{2};$$

Откуда величина напряжения на стенке τ_w равна:

$$\tau_w = \frac{1}{4} \frac{D}{\ell} \Delta P = \frac{1}{2} \frac{R}{\ell} \Delta P$$

или $\tau_w = \lambda \rho \frac{\bar{v}^2}{8}$.

Из последней формулы следует, что

$$\frac{\tau_w}{\rho} = v_*^2 = \frac{\lambda}{8} \bar{v}^2,$$

тогда $\frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}$; $\frac{v_*}{\bar{v}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}$.

Если применить формулу степенного профиля скорости $\frac{v_x}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n$ для границы ламинарного подслоя, где при $y = \delta_{\text{л}} = \alpha \frac{v}{v_*}$ скорость $v_x = v_{\text{кл}} = \alpha \cdot v_*$, то получим:

$$\frac{\alpha v_*}{v_{\max}} = \left(\frac{\alpha v}{v_* R}\right)^n,$$

откуда $\frac{v_*}{v_{\max}} = \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{v_* R}\right)^n$.

После преобразования найдем:

$$\frac{v_*}{\bar{v}} \frac{\bar{v}}{v_{\max}} = \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{v_* R}\right)^n = 2^n \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{2v_* R}\right)^n = 2^n \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{2\bar{v}R}\right)^n \left(\frac{\bar{v}}{v_*}\right)^n.$$

Отсюда $\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = 2^n \alpha^{n-1} \left(\frac{v}{2\bar{v}R}\right)^n \left(\frac{\bar{v}}{v_*}\right)^{n+1}$.

Воспользовавшись выражениями, полученными ранее:

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}; \quad \frac{v_{\max}}{\bar{v}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

после простых преобразований получим:

$$\lambda = \frac{2^{\frac{5n+1}{n+1}} \alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} [(n+1)(n+2)]^{\frac{2}{n+1}}}{\text{Re}^{\frac{2n}{n+1}}}.$$

Сравнивая это выражение с формулой Блазиуса: $\lambda = \frac{a}{\text{Re}^m}$, получим:

$$\begin{cases} a = 2^{\frac{5n+1}{n+1}} \alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} [(n+1)(n+2)]^{\frac{2}{n+1}}, \\ m = \frac{2n}{n+1}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что закону сопротивления Блазиуса, в котором $m=1/4$, соответствует закон одной седьмой для профиля скорости.

Более универсальным, пригодным для всего диапазона чисел Re , является логарифмический закон сопротивления. Этот закон соответствует логарифмическому профилю скоростей и легко может быть получен.

Представим формулу для максимальной скорости турбулентного движения при логарифмическом профиле скоростей

$$\frac{v_{\max}}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* R}{v} + 5.5$$

в виде: $\frac{v_{\max} - \bar{v}}{v_*} + \frac{\bar{v}}{v_*} = 5.75 \cdot \lg \frac{v_* R}{v} + 5.5 = 5.75 \cdot \lg \left(\frac{\bar{v} D}{v} \cdot \frac{v_*}{2\bar{v}} \right) + 5.5.$

Так как $\frac{v_{\max} - \bar{v}}{v_*} = 3.75$, а $\frac{\bar{v}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}$, то

$$3.75 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} = 5.75 \lg \left(\operatorname{Re} \frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}} \right) + 5.5$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{5.75}{2\sqrt{2}} \lg(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}) - \frac{5.75}{2\sqrt{2}} \lg(4\sqrt{2}) + \frac{5.5 - 3.75}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx 2 \lg(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}) - 2 \cdot 0.7 + 0.6 \approx 2 \cdot \lg(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.8.$$

Окончательно, логарифмический закон сопротивления имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_1 \lg(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}) + B_1,$$

где $A_1 \approx 2$, $B_1 \approx -0.8$.

Многочисленные опыты Нуссельта, Никурадзе и др. подтверждают эту формулу с округленными коэффициентами:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \lg(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.8.$$

Эта формула для использования неудобна, так как зависимость λ от числа Re дана в неявном виде. Никурадзе предложил пользоваться следующей явной зависимостью:

$$\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{\operatorname{Re}^{0.237}}$$

(для напоминания: при ламинарном движении $\lambda = 64/\operatorname{Re}$).

Один из вариантов расчета установившегося движения жидкости в круглой трубе таков:

а) задаются длина ℓ и диаметр трубы D , кинематический коэффициент вязкости жидкости ν и потребный расход жидкости Q ,

б) по расходу и диаметру находим среднюю скорость $\bar{v} = \frac{Q}{\pi D^2/4}$ и число

$$\text{Рейнольдса } \operatorname{Re} = \frac{\bar{v} \cdot D}{\nu},$$

в) находим коэффициент сопротивления: $\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{\operatorname{Re}^{0.237}}$,

г) находим перепад давления ΔP на заданном участке трубы длины ℓ :

$$\Delta P = \lambda \frac{\ell}{D} \cdot \rho \frac{\bar{v}^2}{2},$$

д) находим сопротивление трения $\tau_w = \frac{\lambda}{8} \rho \bar{v}^2$ и динамическую скорость

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} \bar{v},$$

е) определяем логарифмический профиль скоростей в трубе по формуле:

$$\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \lg \frac{v_* y}{\nu} + 5.5$$

Задача решена.

Наряду с законами сопротивления, соответствующими степенному профилю

скоростей $\frac{v_x}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n$ и логарифмическому профилю скоростей $\frac{v_x}{v_*} = 5.75 \lg \frac{v_* y}{\nu} + 5.5$

практический интерес представляет степенной профиль вида:

$$\frac{v_x}{v_*} = A \left(\frac{v_* y}{\nu} \right)^n,$$

где $A = \alpha^{1-n} = \left(\frac{v_{xл}}{v_*} \right)^{1-n} = \left(\frac{\delta_{л} v_*}{\nu} \right)^{1-n}$.

Запишем данную зависимость для оси трубы ($y=R$):

$$\begin{aligned} \frac{v_{\max}}{v_*} &= A \left(\frac{R v_*}{\nu} \right)^n = A \left(\frac{v_{\max} R}{\nu} \right)^n \left(\frac{v_*}{v_{\max}} \right)^n \\ \left(\frac{v_*}{v_{\max}} \right)^{n+1} &= \frac{1}{A} \left(\frac{v_{\max} R}{\nu} \right)^{-n}. \end{aligned}$$

Вспомянув выражение для $v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$, получим:

$$\left(\frac{\tau_w}{\rho v_{\max}^2} \right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{Re_{\max}^{-n}}{A}, \text{ где } Re_{\max} = \frac{v_{\max} R}{\nu}$$

Тогда закон сопротивления будет иметь вид:

$$\frac{\tau_w}{\rho v_{\max}^2} = \frac{1}{A^{\frac{2}{n+1}}} \cdot Re_{\max}^{\frac{-2n}{n+1}}.$$

В результате получаем для так называемого коэффициента местного сопротивления

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{v_{\max}^2}{2}} = \frac{2}{A^{\frac{2}{n+1}}} \cdot \text{Re}_{\max}^{-\frac{2n}{n+1}} = \zeta \cdot \text{Re}_{\max}^{-\frac{2n}{n+1}},$$

где $\zeta = \frac{2}{A^{\frac{2}{n+1}}}$.

Для наиболее распространенного профиля скоростей - закона одной седьмой ($n=1/7$; $A=8.74$) - закон сопротивления будет иметь вид:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{v_{\max}^2}{2}} = 0.045 \cdot \text{Re}_{\max}^{-1/4} \quad (2.38)$$

или

$$\frac{\tau_w}{\rho v_{\max}^2} = 0.0225 \cdot \text{Re}_{\max}^{-1/4}.$$

В отличие от предыдущих законов сопротивления, в которых дана зависимость $\lambda(\text{Re})$, в формуле (2.38) дается зависимость местного коэффициента

сопротивления $C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{v_{\max}^2}{2}}$ от числа Рейнольдса.

Практика показывает, что законы сопротивления при турбулентном движении в трубах круглого сечения можно использовать и для расчета потерь в трубах любого поперечного сечения, если число Re выразить через гидравлический радиус $\text{Re}_r = \frac{R_r \cdot \bar{v}}{\nu}$, где $R_r = \frac{S}{\Pi}$, S - площадь поперечного сечения трубы, Π - его периметр.

2.6 Математическая модель турбулентного пограничного слоя на пластине

Вид уравнений движения и импульсов в турбулентном пограничном слое остается таким же, как и для ламинарного пограничного слоя, но значения δ , δ^* , δ^{**} и τ_w будут иными.

Уравнение импульсов:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}.$$

В основу полуэмпирической теории турбулентного пограничного слоя положена аналогия между турбулентным движением жидкости в трубе и в пограничном слое. При рассмотрении задачи о движении жидкости в трубе и в ламинарном пограничном слое было установлено, что:

- а) давление зависит от продольной координаты и не зависит от радиуса трубы и от расстояния по нормали к стенке в пограничном слое;
- б) скорости на стенке в обоих случаях равны нулю;
- в) в трубе скорость достигает наибольшего своего значения на оси, а в пограничном слое - на его границе;

Отсюда можно заключить, что радиусу трубы и скорости на оси в трубе соответствует толщина слоя δ и скорость v_∞ на границе в пограничном слое. Эти соотношения можно применить и к осредненному движению. Тогда профили скоростей в турбулентном пограничном слое могут быть представлены в виде степенного или логарифмического законов, полученных ранее для труб.

- 1) Найдем сопротивление продольно обтекаемой пластины, воспользовавшись степенным законом:

$$\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n.$$

Введя обозначение $\eta_1 = \frac{y}{\delta}$, получим величину δ^{**} , необходимую для уравнения импульсов:

$$\begin{aligned} \delta^{**} &= \delta \int_0^1 \frac{v_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 \left(\frac{v_x}{v_\infty} - \frac{v_x^2}{v_\infty^2}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \int_0^1 (\eta_1^n - \eta_1^{2n}) d\eta_1 = \\ &= \delta \left(\frac{\eta_1^{n+1}}{n+1} - \frac{\eta_1^{2n+1}}{2n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{n}{(n+1)(2n+1)} \cdot \delta. \end{aligned}$$

При $n=1/7$, т.е. при законе одной седьмой $\frac{v_x}{v_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$, получим

$$\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta.$$

Для установления связи между τ_w и δ воспользуемся степенным законом сопротивления, полученным для турбулентного движения в трубе.

$$\frac{\tau_w}{\rho v_{\max}^2} = 0.0225 \cdot \text{Re}_{\max}^{-1/4}.$$

Заменив в этом уравнении R на δ и v_{\max} на v_{∞} , получим

$$\tau_w = 0.0225 \rho v_{\infty}^2 \left(\frac{v_{\infty} \delta}{\nu} \right)^{-1/4}.$$

Подставив полученные выражения для δ^{**} и τ_w в уравнение импульсов, будем иметь:

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{v_{\infty} \delta}{\nu} \right)^{-1/4}.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\delta^{1/4} d\delta = \frac{72}{7} \cdot 0.0225 \left(\frac{v_{\infty}}{\nu} \right)^{-1/4} dx.$$

Теперь проинтегрируем это уравнение, используя следующее граничное условие: при $x=0$ $\delta=0$, означающее, что турбулентный пограничный слой начинается с передней кромки пластины.

$$\frac{\delta^{5/4}}{5/4} = 0.232 \left(\frac{v_{\infty}}{\nu} \right)^{-1/4} \cdot x + C.$$

При $x=0$ $\delta=0$, следовательно, $C=0$, и тогда

$$\delta^{5/4} = 0.29 \left(\frac{v_{\infty}}{\nu} \right)^{-1/4} \cdot x; \quad \delta = (0.29)^{4/5} \left(\frac{v_{\infty}}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot x^{4/5},$$

или окончательно получим:

$$\delta = 0.37 \cdot x \cdot \left(\frac{v_{\infty}}{\nu} x \right)^{-1/5} = 0.37 \cdot \left(\frac{v_{\infty}}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot x^{4/5}$$

$$\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta = 0.036 x \cdot \left(\frac{v_{\infty}}{\nu} x \right)^{-1/5} = 0.036 \cdot \left(\frac{v_{\infty}}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot x^{4/5}.$$

Видно, что для турбулентного пограничного слоя характерные толщины слоя пропорциональны $x^{4/5}$, в то время как для ламинарного пограничного слоя они пропорциональны \sqrt{x} (см. формулу $\delta = \sqrt{30 \frac{\nu \cdot x}{v_{\infty}}}$ для ламинарного подслоя).

Следовательно, турбулентный слой растет по x более интенсивно, чем ламинарный. Зная δ , найдем теперь напряжение трения τ_w :

$$\tau_w = 0.0225 \rho v_\infty^2 \left(\frac{v_\infty \delta}{\nu} \right)^{-1/4} = 0.0225 \cdot (0.37)^{-1/4} \cdot \rho v_\infty^2 \left[\frac{v_\infty}{\nu} \left(\frac{v_\infty}{\nu} \right)^{-1/5} \right]^{-1/4} \cdot (x^{4/5})^{-1/4};$$

$$\tau_w = 0.0288 \left(\frac{v_\infty x}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot \rho v_\infty^2 = 0.0288 \rho v_\infty^2 Re_x^{-1/5}.$$

Коэффициент местного сопротивления трения пластины будет иметь вид:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{v_\infty^2}{2}} = 0.0576 \left(\frac{v_\infty \cdot x}{\nu} \right)^{-1/5} = 0.0576 \cdot Re_x^{-1/5},$$

т.е.

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = \frac{0.0576}{\sqrt[5]{Re_x}},$$

Найдем величину полного сопротивления R_x пластины (с двух сторон). Оно равно:

$$R_x = 2b \int_0^\ell \tau_w dx,$$

где b - ширина пластины.

Подставляя выражение для τ_w в виде:

$$\tau_w = 0.0288 \cdot \rho v_\infty^2 \left(\frac{v_\infty}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot x^{-1/5},$$

получим

$$R_x = 2b \int_0^\ell 0.0288 \cdot \rho v_\infty^2 \left(\frac{v_\infty}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot x^{-1/5} dx.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\begin{aligned} R_x &= 0.0576 \cdot \rho v_\infty^2 b \left(\frac{v_\infty}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot \int_0^\ell x^{-1/5} dx = 0.0576 \cdot \rho v_\infty^2 b \left(\frac{v_\infty}{\nu} \right)^{-1/5} \cdot \left. \frac{x^{4/5}}{4/5} \right|_0^\ell = \\ &= 0.072 \rho v_\infty^2 b \cdot \ell^{4/5} \left(\frac{v_\infty}{\nu} \right)^{-1/5}. \end{aligned}$$

Окончательно: $R_x = 0.072 \rho v_\infty^2 b \ell Re^{-1/5}$, где $Re = \frac{v_\infty \ell}{\nu}$.

Коэффициент полного сопротивления (см. формулу (1.29)) равен:

$$C_f = \frac{R_x}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} \cdot 2b \cdot \ell}$$

Подставляя значение R_x , получаем

$$C_f = 0.072 \left(\frac{v_\infty \ell}{\nu} \right)^{-1/5} = 0.072 Re^{-1/5} = \frac{0.072}{\sqrt[5]{Re}}$$

Сравнение с экспериментом показало, что в последней формуле лучше взять коэффициент не 0.072, а 0.074, т.е.

$$C_f = 0.074 Re^{-1/5} = \frac{0.074}{\sqrt[5]{Re}}$$

Сравнение коэффициентов полного сопротивления при турбулентном $\left(C_{fr} = \frac{0.074}{\sqrt[5]{Re}} \right)$

и ламинарного $\left(C_{fn} = \frac{1.444}{\sqrt{Re}} \right)$ пограничных слоев показывает, что при одинаковых числах Re коэффициент полного сопротивления при турбулентном погранслое намного больше, чем при ламинарном ($C_{ft} > C_{fn}$).

Например, при $Re=10^6$ $C_{fn} = \frac{1.444}{10^3} = 0.00144$; $C_{fr} = \frac{0.074}{\sqrt[5]{10^6}} = \frac{0.074}{10 \sqrt[5]{10}} = \frac{0.074}{15.8} = 0.00469$, т.е.

$$C_{fr} / C_{fn} = 3.25.$$

Отсюда следует важный практический вывод: для уменьшения сопротивления трения обтекаемого тела необходимо добиться увеличения участка ламинарного пограничного слоя (рис. 12) и уменьшения участка турбулентного, т.е. необходимо затягивать как можно дальше ламинарное обтекание профиля [8].

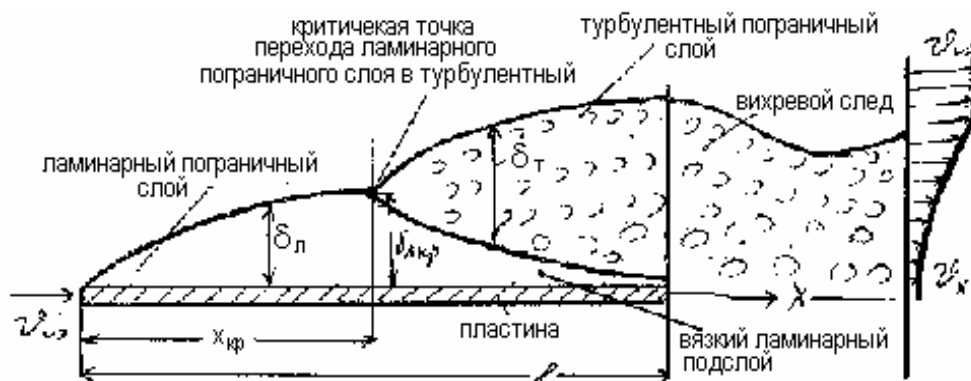


Рис.12

Связь между коэффициентом сопротивления трения при турбулентном пограничном слое и общим коэффициентом сопротивления трения обтекаемого тела C_f можно

$$\text{выразить как } C_{fr} = C_f \left(\frac{\ell - x_{кр}}{\ell} \right), \text{ откуда } C_{fr} = C_f \left(1 - \frac{x_{кр}}{\ell} \right).$$

Это выражение можно записать по другому:

$$C_{fr} = C_f \left(1 - \frac{Re_{кр}}{Re} \right), \text{ где } Re_{кр} = \frac{v_\infty \cdot x_{кр}}{\nu}.$$

Толщина ламинарного пограничного слоя $\delta_l = \sqrt{30 \frac{\nu \cdot x}{v_\infty}}$ или

$$\frac{\delta_l}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}}.$$

Отсюда

$$\delta_{лкр} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_{кр}}} \cdot x_{кр}.$$

Величина $x_{кр}$, а следовательно и $\delta_{лкр}$ определяется из выражения для числа

$Re_{кр} = \frac{v_\infty \cdot x_{кр}}{\nu}$, которое является известным.

2) Логарифмический профиль скоростей для турбулентного пограничного слоя, полученный по аналогии с турбулентным движением в трубе имеет вид.

$$\frac{v_\infty - v_x}{v_*} = -\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Закон сопротивления, соответствующий логарифмическому профилю скоростей, довольно сложен. Коэффициент местного сопротивления трения в данном случае выражается зависимостью:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} = \frac{2}{(5.75 \cdot \lg(Re^{**}) + 3.8)^2}.$$

Коэффициент полного сопротивления трения:

$$C_f = \frac{R_x}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} \cdot 2b \cdot \ell} = \int_0^\ell \frac{\tau_w dx}{\frac{\rho v_\infty^2}{2} \cdot \ell}, \text{ где } R_x = 2b \int_0^\ell \tau_w dx.$$

2.7. Математическое моделирование обтекания турбулентным потоком профиля произвольной формы

Отсутствие строгих теоретических основ турбулентного движения привело к появлению значительного количества полуэмпирических методов расчета турбулентного пограничного слоя на профиле. Изложим так называемый однопараметрический метод расчета [3]. Он выгодно отличается своей простотой и глубокой связью с методом такого же расчета ламинарного пограничного слоя.

В турбулентном погранслое так же, как и в ламинарном, вводится формпараметр. Уравнение импульсов здесь имеет такой же вид, как и для ламинарного пограничного слоя. Допуская, что кривые зависимостей $H(f)$ и $\zeta(f)$ подобны в ламинарном и турбулентном пограничных слоях, получим простое решение задачи.

В отличие от ламинарного слоя, в котором формпараметр f и параметр ζ имели вид:

$$\begin{cases} f = \frac{v'_\infty \delta^{**2}}{v} = \frac{v'_\infty \delta^{**}}{v_\infty} Re^{**}; \\ \zeta = \frac{\tau_w \delta^{**}}{\mu v_\infty} = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2} Re^{**}, \end{cases}$$

где $Re^{**} = \frac{v_\infty \delta^{**}}{v}$,

для турбулентного пограничного слоя в целях большей независимости решения от числа Re вводится более общий вид указанных величин:

$$\begin{cases} f = \frac{v'_\infty \delta^{**}}{v_\infty} G(Re^{**}); \\ \zeta = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2} G(Re^{**}), \end{cases}$$

где $G(Re^{**})$ - некоторая функция от Re^{**} , вид которой будет получен далее.

Выразим уравнение импульсов (1.26) через f и ζ следующим образом:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{v'_\infty \delta^{**}}{v_\infty} (2 + H) = \frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2}, \text{ где } H = \delta^* / \delta^{**}.$$

Умножив это уравнение на $G(Re^{**})$, получим:

$$G(Re^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} + f(2 + H) = \zeta. \quad (2.39)$$

Преобразуем первое слагаемое, представив его через производную от произведения $G(Re^{**}) \cdot \delta^{**}$. Тогда:

$$\begin{aligned}
G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[G(\text{Re}^{**}) \cdot \frac{v'_{\infty} \delta^{**}}{v_{\infty}} \cdot \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right] - \delta^{**} \frac{dG(\text{Re}^{**})}{d\text{Re}^{**}} \frac{d\text{Re}^{**}}{dx} = \\
&= \frac{d}{dx} \left(f \cdot \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) - \delta^{**} \frac{dG(\text{Re}^{**})}{d\text{Re}^{**}} \cdot \left(\frac{v_{\infty}}{v} \cdot \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**} v'_{\infty}}{v} \right) = \\
&= \frac{d}{dx} \left(f \cdot \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) - \text{Re}^{**} \frac{dG(\text{Re}^{**})}{d\text{Re}^{**}} \cdot \frac{d\delta^{**}}{dx} - \text{Re}^{**} \frac{dG(\text{Re}^{**})/d\text{Re}^{**}}{G(\text{Re}^{**})} \cdot f = \\
&= \frac{d}{dx} \left(f \cdot \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) - \text{Re}^{**} \frac{dG(\text{Re}^{**})/d\text{Re}^{**}}{G(\text{Re}^{**})} G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} - \text{Re}^{**} \frac{dG(\text{Re}^{**})/d\text{Re}^{**}}{G(\text{Re}^{**})} \cdot f .
\end{aligned}$$

Введем величину, $m = \text{Re}^{**} \frac{dG(\text{Re}^{**})/d\text{Re}^{**}}{G(\text{Re}^{**})} = \frac{d \lg G(\text{Re}^{**})}{d \lg \text{Re}^{**}}$, по своей структуре слабо

зависящую от Re^{**} , и перепишем предыдущее уравнение в виде:

$$G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(f \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) - mG(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} - m \cdot f ,$$

или $(1+m)G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(f \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) - m \cdot f .$

Найдем отсюда член

$$G(\text{Re}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{1}{(1+m)} \left[\frac{d}{dx} \left(f \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) - m \cdot f \right]$$

и подставим его в уравнение импульсов (2.39). Тогда

$$\frac{1}{(1+m)} \left[\frac{d}{dx} \left(f \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) - m \cdot f \right] + f(2+H) = \zeta .$$

Отсюда $\frac{d}{dx} \left(f \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) = (1+m)\zeta - (2+H) \cdot f \cdot (1+m) + mf$

или

$$\frac{d}{dx} \left(f \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) = (1+m)\zeta - [2+m+(1+m)H] \cdot f . \quad (2.40)$$

Раскрывая производную в левой части, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(f \cdot \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) &= \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \frac{df}{dx} + f \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \right) = \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \frac{df}{dx} + f \cdot \left(\frac{v'_{\infty} v'_{\infty} - v_{\infty} v''_{\infty}}{v'^2_{\infty}} \right) = \\
&= \frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \frac{df}{dx} + f \cdot \frac{v_{\infty} \cdot v''_{\infty}}{v'^2_{\infty}} f .
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.40), получим:

$$\frac{v_{\infty}}{v'_{\infty}} \frac{df}{dx} = (1+m)\zeta - [3+m+(1+m)H]f + \frac{v_{\infty} \cdot v''_{\infty}}{v'^2_{\infty}} f$$

или

$$\left. \begin{aligned} \text{где} \quad \frac{df}{dx} &= \frac{v''_{\infty}}{v'_{\infty}} f + \frac{v''_{\infty}}{v_{\infty}} F(f), \\ F(f) &= (1+m)\zeta - [3+m+(1+m)H]f. \end{aligned} \right\} (2.41)$$

Это уравнение ничем не отличается от своего ламинарного аналога (дифференциального уравнения формпараметра (1.31)), которое являлось основным для расчета ламинарного пограничного слоя на крыловом профиле произвольной формы. Различие заключается лишь в виде функциональной зависимости $F(f)$. Если в выражении (2.41) для турбулентного погранслоя положить $m=1$, то оно совпадает с выражением для $F(f)$ ламинарного пограничного слоя (см. уравнение (1.30)).

Величина $G(Re^{**})$ принимается обратно пропорциональной местному коэффициенту сопротивления трения пластины, для которой $v'_{\infty} = \frac{dv_{\infty}}{dx} = 0$, и, следовательно, значение формпараметра

$$f = \frac{v'_{\infty} \delta^{**2}}{v_{\infty}} G(Re^{**}) = 0.$$

Из формулы $\zeta = \frac{\tau_w}{\rho v_{\infty}^2} G(Re^{**})$ найдем

$$G(Re^{**}) = \frac{\rho v_{\infty}^2}{\tau_w} \Big|_{f=0} (\zeta)_{f=0} = \frac{2}{C_{f,x}} \Big|_{f=0} (\zeta)_{f=0}.$$

Таким образом, можно принять $G(Re^{**}) \sim \frac{\rho v_{\infty}^2}{\tau_w} \Big|_{f=0} \sim \frac{2}{C_{f,x}} \Big|_{f=0}$.

При этом видно, что численное значение коэффициента пропорциональности $(\zeta)_{f=0}$ здесь несущественно, т.к. изменение этого коэффициента вызовет изменение $G(Re^{**})$, а следовательно ζ и f , но не повлияет на функцию m , определяющую вид $F(f)$. Следовательно, можно воспользоваться любым эмпирическим законом сопротивления для турбулентного слоя на пластине. Из многих опытов с длинными пластинами Фолкнер получил чисто эмпирический закон сопротивления в виде:

$$\frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2} = \frac{C_{f,x}}{2} = 0.00655(\text{Re}^{**})^{-1/6}.$$

Воспользовавшись этим законом, получим:

$$G(\text{Re}^{**}) = \frac{\rho v_\infty^2}{\tau_w} \Big|_{f=0} = 153,2 \text{Re}^{**1/6}.$$

Следовательно, формпараметр f и параметр ζ будут иметь вид:

$$f = 153,2 \frac{v'_\infty}{v_\infty} \delta^{**} \text{Re}^{**1/6} = 153,2 \frac{v v'_\infty}{v_\infty^2} \text{Re}^{**7/6},$$

$$\zeta = 153,2 \text{Re}^{**1/6} \left(\frac{\tau_w}{\rho v_\infty^2} \right).$$

Функция m при выбранном $G(\text{Re}^{**})$ равна:

$$m = \text{Re}^{**} \frac{dG(\text{Re}^{**}) / d\text{Re}^{**}}{G(\text{Re}^{**})} = \frac{1}{6}.$$

Это соотношение получается следующим образом: из формулы

$G(\text{Re}^{**}) = 153,2 \text{Re}^{**1/6}$ очевидно, что

$$\frac{dG(\text{Re}^{**})}{d\text{Re}^{**}} = 153,2 \frac{1}{6} \text{Re}^{**5/6}.$$

Тогда $m = \frac{\text{Re}^{**}}{153,2 \text{Re}^{**1/6}} \cdot 153,2 \frac{1}{6} \text{Re}^{**5/6} = \frac{1}{6}$, и функция

$$F(f) = (1+m)\zeta - [3+m+(1+m)H]f = \frac{7}{6}\zeta - \left(\frac{19}{6} + \frac{7}{6}H \right) f.$$

Линеаризуем функцию $F(f)$, положив, как и для пластины, $\zeta = (\zeta)_{f=0} = 1$ и

$H = H_0 = 1,3 \div 1,4$ (из опытных данных).

Принимая эти значения ζ и H , найдем для $F(f)$ линейное представление $F(f)=a-bf$, аналогичное представлению функции $F(f)$ для ламинарного погранслоя, но с другими величинами постоянных a и b , равными для турбулентного погранслоя $a=7/6$ и $b=4.7 \div 4.8$.

Тогда уравнение импульсов для турбулентного погранслоя (2.41) можно представить в виде:

$$\frac{df}{dx} = a \frac{v'_\infty}{v} + \left(\frac{v''_\infty}{v'_\infty} - b \frac{v'_\infty}{v} \right) f,$$

не отличающемся по виду от соответствующего уравнения для ламинарного пограничного слоя и имеющего лишь другие численные значения для коэффициентов a и b .

Решением этого линейного дифференциального уравнения первого порядка является интеграл (решение в виде простой квадратуры):

$$f(x) = \frac{v'_\infty(x)}{v_\infty^b(x)} \left[a \int_0^x v_\infty^{b-1}(x) dx + C \right].$$

Если турбулентный погранслой возникает с начальной точки профиля т.е. ламинарный участок отсутствует, то $C=0$ (так как при $x=0$, $v_\infty=0$) и

$$f(x) = \frac{v'_\infty(x)}{v_\infty^b(x)} \left[a \int_0^x v_\infty^{b-1}(x) dx \right].$$

Так как в числитель и знаменатель в правой части равенства входит скорость, то, следовательно, начальная точка ($x=0$), в которой скорость равна нулю, есть особая точка. Раскрывая неопределенность, получим

$$f(0) = a v'_\infty(0) \frac{v_\infty^{b-1}(0)}{b v_\infty^{b-1}(0) v'_\infty(0)} = \frac{a}{b} = 0.24.$$

Покажем это. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ осуществляем по правилу

Лопиталья, которое гласит, что для разыскания предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ двух функций, бесконечно малых при $X \rightarrow a$, можно рассматривать отношение их производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Если оно стремится к пределу (конечному или бесконечному),

то к этому же пределу стремится и отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Согласно правилу Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a v'_\infty(x)}{v_\infty^b(x)} \int_0^x v_\infty^{b-1}(x) dx =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a v'_\infty(x) \int_0^x v_\infty^{b-1}(x) dx)'}{[v_\infty^b(x)]'} = \frac{a v'_\infty(0) \cdot v_\infty^{b-1}(0)}{b v_\infty^{b-1}(0) \cdot v'_\infty(0)} = \frac{a}{b}.$$

При наличии участка ламинарного пограничного слоя в интервале абсцисс ($0 < x < x_{кр}$), выражение для $f(x)$ несколько усложняется и принимает вид:

$$f(x) = \frac{v'_{\infty}(x)}{v_{\infty}^b(x)} \left[a \int_{x_{кп}}^x v_{\infty}^{b-1}(x) dx + \frac{v_{\inftyкп}^b(x)}{v'_{\inftyкп}(x)} f_{кп} \right].$$

Здесь индексом "кп" обозначены соответствующие величины в точке перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Значение формпараметра

$$f_{кп} = \frac{v'_{\inftyкп} \delta_{кп}^{**}}{v_{\inftyкп}} G(Re_{кп}^{**}) = \frac{v v'_{\inftyкп}}{v_{\inftyкп}^2} Re_{кп}^{**} G(Re_{кп}^{**}), \text{ где } Re_{кп}^{**} = \frac{v_{\inftyкп} \delta_{кп}^{**}}{\nu}.$$

Приняв $G(Re^{**}) = 153,2 Re^{**1/6}$, получим окончательное выражение для формпараметра $f(x)$ при наличии ламинарного участка:

$$f(x) = \frac{v'_{\infty}(x)}{v_{\infty}^b(x)} \left[a \int_{x_{кп}}^x v_{\infty}^{b-1}(x) dx + 153,2 \nu \cdot v_{\inftyкп}^{b-2} Re_{кп}^{**7/6} \right]$$

Согласно принятому условию смыкания ламинарного и турбулентного пограничных слоев, величина $Re_{кп}^{**}$ в точке перехода должна быть рассчитана по теории ламинарного пограничного слоя. Пользуясь последней формулой, определяют $f(x)$, после чего можно найти Re^{**} по формуле

$$Re^{**7/6} = \frac{1}{153,2} \frac{f(x) \cdot v_{\infty}^2}{\nu \cdot v'_{\infty}},$$

а затем

$$G(Re^{**}) = 153,2 Re^{**1/6}.$$

Для проверки: $Re^{**} G(Re^{**}) = 153,2 Re^{**7/6} = \frac{v_{\infty}^2}{\nu \cdot v'_{\infty}} f(x).$

Зная Re^{**} , можно найти $\delta^{**} = \frac{Re^{**} \nu}{v_{\infty}}$, после чего, учитывая, что в принятом

приближении $\zeta=1$, найдем напряжение трения на стенке из формулы:

$$\zeta = 153,2 Re^{**1/6} \left(\frac{\tau_w}{\rho v_{\infty}^2} \right) = \frac{\tau_w}{\rho v_{\infty}^2} \cdot G(Re^{**}).$$

При $\zeta=1$ $\tau_w = \frac{\rho v_{\infty}^2}{G(Re^{**})} = \frac{\rho v_{\infty}^2}{153,2 Re^{**1/6}}$

И, наконец, находим местный коэффициент трения $C_{f,x}$ из соотношения

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2} = \frac{2}{G(Re^{**})} = 0,0131 Re^{**1/6}$$

аналогичного формуле для пластины, но при Re^{**} , рассчитанном для заданного распределения скорости внешнего потока $v_{\infty}(x)$. Определив таким образом τ_w или $C_{f,x}$ в функции от x и просуммировав по поверхности крыла проекции элементарных сил трения $\tau_w dx$ на направление набегающего потока, определим полное сопротивление трения крыла.

Может представить интерес определение толщины вытеснения δ^* . В принятом приближении эта величина равна:

$$\delta^*(x) = H_0 \delta^{**}(x) = (1,3 \div 1,4) \delta^{**}(x).$$

Таким образом, все параметры потока, в том числе полное сопротивление трения, могут быть определены. Надо подчеркнуть, что изложенный выше эмпирический подход, во многом опирающийся на аналогию с задачей о турбулентном пограничном слое на пластине, т.е. на случай постоянства скорости на внешней границе пограничного слоя, при своей простоте не уступает по точности результатов расчета другим, более совершенным методам.

Так как при безотрывном обтекании профиля сопротивление будет определяться почти полностью трением, то, очевидно, в этом случае для уменьшения сопротивления необходимо увеличивать участок ламинарного пограничного слоя. Иначе обстоит дело с плохо обтекаемыми телами, для которых характерно отрывное обтекание. Отрыв турбулентного погранслоя происходит позже, чем ламинарного, затягивание точки отрыва турбулентного слоя существенно влияет на уменьшение величины полного сопротивления плохо обтекаемых тел (таких, как шар или поперечно обтекаемый цилиндр), поскольку при отрыве потока сопротивление возрастает.

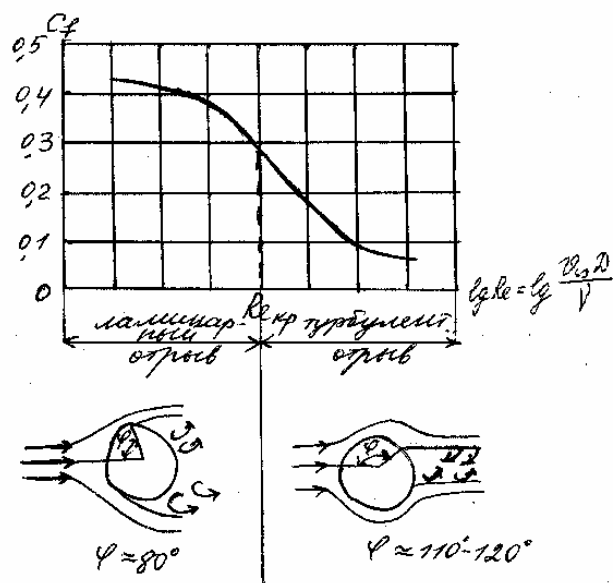


Рис.13

На рис. 13 показана кривая коэффициента сопротивления шара в зависимости от числа Re набегающего потока. Видно, что при достижении критического числа Рейнольдса ($Re_{кр}$) происходит падение коэффициента сопротивления. Это явление называется кризисом обтекания плохо обтекаемых тел, сущность которого состоит в следующем.

Сопротивление плохо обтекаемых тел определяется прежде всего сопротивлением давления, которое зависит от величины области отрыва, а именно, чем больше область отрыва, т.е. чем раньше отрывается поток, тем больше сопротивление. При докритических числах Рейнольдса отрывается ламинарный слой и точка отрыва в этом случае расположена под углом $\varphi \approx 80^\circ$. При увеличении числа Re до критического, т.е. при $Re = Re_{кр}$ точка перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный совпадает с точкой отрыва. Таким образом, при значениях $Re \geq Re_{кр}$ отрывается уже не ламинарный пограничный слой, а турбулентный. При этом точка отрыва расположена при $\varphi \approx 110^\circ - 120^\circ$. Причиной такого затянутого отрыва турбулентного пограничного слоя по сравнению с ламинарным является то обстоятельство, что наличие турбулентных пульсаций приводит к более интенсивному обмену энергией между пограничным слоем и внешним потоком, в результате чего кинетическая энергия частиц жидкости в пограничном слое увеличивается. Причина отмеченного явления резкого уменьшения сопротивления шара видна из кривых распределения давлений по его поверхности (см.рис.14).

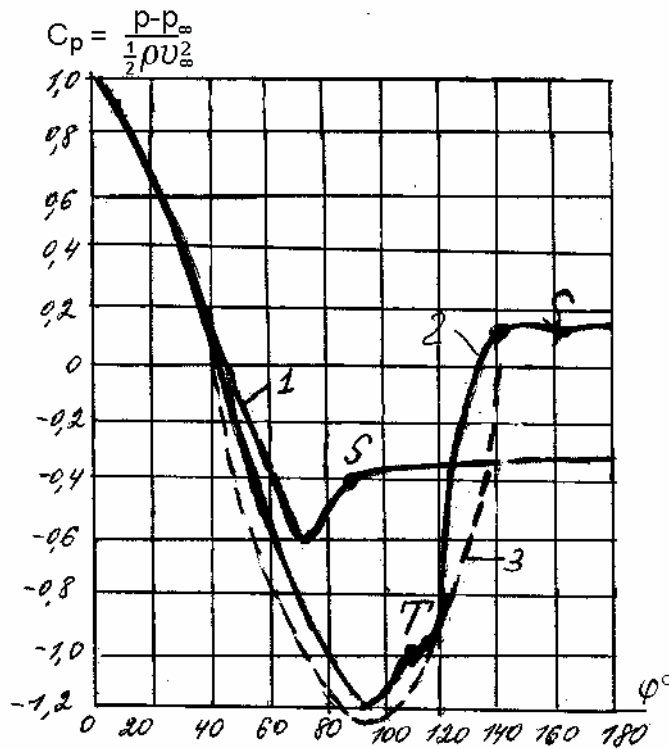


Рис. 14

S - точка отрыва потока

T - точка перехода

ламинарного погранслоя в турбулентный

1. Ламинарный отрыв:

$$Re = \frac{v_\infty d}{\nu} = 1,6 \cdot 10^5;$$

$$C_x = 0,47$$

2. Турбулентный отрыв

$$Re = 4,2 \cdot 10^5; C_x = 0,14$$

3. Идеальное распределение давлений

При значениях $Re \geq Re_{кр}$ ($Re_{кр} \approx 2 \cdot 10^5$) наблюдается резкое возрастание максимального разрежения и смещение вниз по потоку точек отрыва пограничного слоя S, что свидетельствует об улучшении обтекания шара. Наличие при турбулентном обтекании более обширных и глубоких зон разрежения объясняет уменьшение коэффициента сопротивления, так как при более полном охвате поверхности шара потоком, распределение давлений приближается к тому идеальному, при котором, согласно парадоксу Даламбера, сопротивление давления должно равняться нулю. Таким образом, величина области отрыва меньше при числах $Re \geq Re_{кр}$. Этим и объясняется резкое уменьшение сопротивления плохо обтекаемого тела при достижении или превышении критического значения числа Рейнольдса. Величина $Re_{кр}$ сильно зависит от степени турбулентности набегающего потока, причем большей степени турбулентности соответствует меньшее значение $Re_{кр}$. Кризис обтекания можно вызвать искусственно и при докритических числах Re , если искусственно турбулизовать пограничный слой.

Таким образом, для уменьшения сопротивления плохо обтекаемых тел надо уменьшать величину ламинарного участка с тем, чтобы отрывался турбулентный слой, (точка отрыва у которого расположена далее по потоку).

2.8 Профильное сопротивление

Расчет турбулентного пограничного слоя лежит в основе определения сопротивления тела при его движении в вязкой жидкости. Полное сопротивление (его называют еще лобовым) складывается из профильного сопротивления и индуктивного сопротивления. Индуктивное сопротивление обусловлено конечностью размаха тела (неплоским характером обтекания), вследствие чего местная подъемная сила может давать отличную от нуля проекцию на направление общего набегающего потока.

Профильное сопротивление состоит из сопротивления трения и сопротивления давления. Сопротивление трения определяется как проекция на направление движения главного вектора касательных сил, приложенных со стороны жидкости к поверхности тела, а сопротивление давления - соответственно аналогичной проекцией главного вектора нормальных сил. Во многих случаях даже при безотрывном обтекании сопротивление трения не составляет основную часть профильного сопротивления. Поэтому во многих задачах при безотрывном обтекании необходимо знать профильное сопротивление, т.е. сопротивление трения плюс сопротивление давления.

Рассмотрим чуть подробнее вторую составляющую профильного сопротивления. Согласно общему для ламинарного и турбулентного пограничных слоев представлению, вне области пограничного слоя поток может рассматриваться как движущаяся безвихревым образом идеальная, т.е. лишенная вязкого трения, жидкость. При достаточной тонкости погранслоя и известном его свойстве передавать без изменения по сечениям слоя на поверхность тела давление внешнего (по отношению к пограничному слою) потока - главный вектор нормальных сил, согласно парадоксу Даламбера, должен быть равен нулю, а следовательно, и сопротивление давления не должно отличаться от нуля. Это было бы близко к действительности, если бы пограничный слой не возмущал внешний безвихревой поток. На самом же деле линии тока вследствие подтормаживающего влияния стенки оттесняются от поверхности тела на величину

δ^* , называемую толщиной вытеснения и равную смещению действительной линии тока относительно линии тока безвихревого обтекания тела идеальной жидкостью на внешней границе пограничного слоя. На поверхности обтекаемого тела ($y=0$) смещение линии тока исчезает, у обоих сравниваемых потоков (действительного и идеального) общая нулевая линия тока совпадает с поверхностью тела. При удалении от поверхности врыла смещения действительных линий тока по отношению к идеальным возрастают, и на границе пограничного слоя ($y=\delta$) эта величина смещения достигает своего максимального значения.

Такое искажение картины течения приводит к нарушению идеального распределения давлений по поверхности тела. Таким образом, пограничный слой не только управляется внешним потоком, но и оказывает на него обратное влияние, которое проявляется особенно сильно на тех участках пограничного слоя, где слой наиболее толст, например, вблизи точки отрыва или в конце тела.

Как показывают опыты, сопротивление давления хорошо обтекаемого крылового профиля при наличии на его поверхности полностью ламинарного или полностью турбулентного пограничного слоя убывает с ростом числа Re, т.к. при этом толщина погранслоя уменьшается и внешний поток приближается к безвихревому обтеканию профиля идеальной жидкостью.

Выражение коэффициента профильного сопротивления C_{xp} крылового профиля в безграничном плоском потоке жидкости через толщину потери импульса на бесконечности δ_{∞}^{**} имеет вид [9];

$$C_{x,p} = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^2 b} = \frac{2\delta_{\infty}^{**}}{b}; \quad (2.42)$$

где b - хорда крылового профиля; R_x - профильное сопротивление.

Эта формула непосредственно не может быть использована ввиду невозможности определения толщины потери импульса δ_{∞}^{**} на бесконечности за обтекаемым телом. Поэтому выведем приближенную связь этой величины с толщиной потери импульса на задней кромке крылового профиля, допускающей простое теоретическое и непосредственное экспериментальное определение.

Для установления указанной связи применим к следу за обтекаемым телом интегральное соотношение пограничного слоя. Так как в следе $\tau_w = 0$ ввиду отсутствия стенки, то интегральное соотношение Кармана для нашего случая примет вид:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{2}{v_{\infty}} v'_{\infty} \delta^{**} + \frac{v'_{\infty}}{v_{\infty}} \delta^* = 0.$$

Делим это уравнение на δ^{**} и интегрируем его по x вдоль следа от задней кромки (индекс "к") до бесконечно удаленного сечения вниз по потоку (индекс " ∞ "), получаем:

$$\ln \frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_k^{**}} = \ln \frac{v_k^2}{v_{\infty}^2} - \int_{x_k}^{\infty} \frac{\delta^* v'_{\infty}}{\delta^{**} v_{\infty}} dx = 0.$$

Для вычисления последнего интеграла необходимо знать зависимость $\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = H$ от " X " в следе. Ряд исследований показал, что $H(x)$ зависит от формы профиля и его обтекания. Наиболее простой является линейная зависимость H от x , для которой

$$H_{c.p} = \frac{1}{2}(H_k + H_{\infty}).$$

После подстановки найденного значения в интеграл последнее уравнение будет иметь вид:

$$\ln \frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_k^{**}} = \ln \frac{v_k^2}{v_{\infty}^2} + \frac{1}{2}(H_k + H_{\infty}) \ln \frac{v_k}{v_{\infty}} = 0 \text{ или } \ln \frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_k^{**}} = \ln \left(\frac{v_k}{v_{\infty}} \right)^{2 + \frac{1}{2}(H_k + H_{\infty})}.$$

Освобождаясь от логарифмов, запишем $\delta_{\infty}^{**} = \delta_k^{**} \left(\frac{v_k}{v_{\infty}} \right)^{2 + \frac{1}{2}(H_k + H_{\infty})}$.

Подставляя полученное выражение δ_{∞}^{**} в формулу (2.42), получим:

$$C_{x,p} = \frac{2\delta_k^{**}}{b} \left(\frac{v_k}{v_{\infty}} \right)^{2 + \frac{1}{2}(H_k + H_{\infty})}. \quad (2.43)$$

Так как на бесконечности за телом поле скоростей будет выравниваться, можно считать, что $v_{\infty} - v_x = v'_x$ будет всегда малой величиной, и, пренебрегая в достаточном удалении от задней кромки крыла второй степенью малой добавки v'_x , найдем:

$$\delta_{\infty}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{v_x}{v_{\infty}} \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty}} \right) dy.$$

Так как $v_{\infty} - v_x = v'_x$, то разделив на v_{∞} , получим

$$\frac{v_x}{v_{\infty}} = 1 - \frac{v'_x}{v_{\infty}}, \quad 1 - \frac{v_x}{v_{\infty}} = \frac{v'_x}{v_{\infty}}.$$

Подставив эти выражения в формулу для δ_{∞}^{**} , получим

$$\delta_{\infty}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{v'_x}{v_{\infty}} \left(1 - \frac{v'_x}{v_{\infty}}\right) dy = \int_0^{\delta} \frac{v'_x}{v_{\infty}} dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty}}\right) dy = \delta_{\infty}^*.$$

Таким образом $\delta_{\infty}^{**} = \delta_{\infty}^*$ и тогда $N_{\infty} = 1$. Значение N_k на задней кромке меняется от 1.3-1.4 для продольно обтекаемой пластины и 1.8 - 2.0 - для толстых профилей. Обычно берут $N_k = 1.4$ и тогда формула (2.43) для коэффициента профильного сопротивления будет иметь окончательный вид:

$$C_{x,p} = 2 \left(\frac{v_k}{v_{\infty}} \right)^{3.2} \frac{\delta_k^{**}}{b}.$$

Эта известная формула Сквайра и Юнга, дающая хорошее совпадение расчетов с опытными материалами для широкого класса обтекаемых профилей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика сплошных сред. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1954. 795 с.
3. Лойцянский Л.Г., Механика жидкости и газа. М.: Наука. 1987. 840с.
4. Седов Л.И., Механика сплошной среды. Т.1,II. М.: Наука, 1984.
5. Шлихтинг Г., Возникновение турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 302 с.
6. Бай Ши-И. Турбулентное течение жидкостей и газов. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 344 с.
7. Дж. Дейли, Харлеман. Механика жидкости. М.: Энергия, 1971. 400с.
8. Шахов В.Г., Основы теории пограничного слоя. Учеб. пособие. Куйбышев: КуАИ, 1989. 128 с.
9. Повх И.Л., Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1976. 502с.
10. Брэдшоу П., Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974, 278с.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

1. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.....	
1.1. Понятие о пограничном слое.....	
1.2. Ламинарный и пограничный слой в несжимаемой жидкости.....	
1.3. Математическая модель движения вязкой жидкости в ламинарном пограничном слое.....	
1.4. Интегральные соотношения для ламинарного пограничного слоя.....	
1.5. Математическое моделирование обтекания ламинарным потоком профиля произвольной формы.....	
1.6. Математическое моделирование ламинарного течения несжимаемой жидкости в трубах.....	
2. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ.....	
2.1. Переход ламинарного течения в турбулентное.....	
2.2. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости.....	
2.3. Математическая модель осредненного турбулентного движения ...	
2.4. Двухслойная схема пристенной турбулентности.....	
2.5. Математическое моделирование турбулентного течения несжимаемой жидкости в трубах.....	
2.6. Математическая модель турбулентного пограничного слоя на пластине.....	
2.7. Математическое моделирование обтекания турбулентным потоком профиля произвольной формы.....	
2.8. Профильное сопротивление.....	
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	

ИГОРЬ СТЕПАНОВИЧ ЗАГУЗОВ,
КОНСТАНТИН АНАТОЛЬЕВИЧ ПОЛЯКОВ
Математическое моделирование течений вязкой жидкости
вблизи твердых поверхностей

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редакторы - Н.А. Волынкина
Компьютерная верстка, макет - И.С. Колышева
Корректор - Н.В. Голубева

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.

Бумага белая тонкая. Печать оперативная.

Объем печ. л., уч. - изд. л. Тираж 150 экз. С.

Заказ №

Издательство «Самарский университет», 443011, г.

Самара, ул. акад. Павлова 1.

МАО ПО «Сам Вен», 443099, г. Самара, ул. Венцека, 60