И.С. Загузов, К.А. Поляков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АЭРОГИДРОМЕХАНИКЕ

ЧАСТЬ II

Самара
2002

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического моделирования в механике

И.С. Загузов, К.А. Поляков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АЭРОГИДРОМЕХАНИКЕ

ЧАСТЬ II

Учебное пособие

Рекомендовано научно-методическим советом по прикладной математике УМО университетов в качестве учебного пособия

Издательство "Самарский университет"
2002

БКК 22.253
УДК 532.517
З 148

Загузов И.С., Поляков К.А. Математические модели в аэрогидромеханике. Часть 2: Учебное пособие. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2002. 96 С.

ISBN 5-86465-86-9

В учебном пособии к спецкурсам "Математическое моделирование в аэрогидромеханике" и "Математические модели в механике" даны принципы математического моделирования аэрогидромеханических процессов и математические постановки основных задач о движении идеальных жидкостей и газов. Приведены математические модели основных процессов, имеющих место в аэродинамике и газовой динамике, а также математические модели разрывных течений.

Пособие предназначено для студентов механико - математических факультетов университетов (специальность «прикладная математика») и может быть полезным для научных работников в области аэрогидромеханики.

БКК 22.253
УДК 532.517

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. **Е. В. Шахматов**,
д-р физ.-мат. наук, проф. **В. И. Астафьев**

ISBN 5-86465-86-9

© Загузов И.С., Поляков К.А., 2002
© Издательство "Самарский университет", 2002

Загузов Игорь Степанович,
Поляков Константин Анатольевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АЭРОГИДРОМЕХАНИКЕ

ЧАСТЬ II

Учебное пособие

Редактор Т.И. Кузнецова
Компьютерная верстка Т.В. Кондратьева

Лицензия ИД № 06178 от 01.11.2001. Подписано в печать 22.05.02. Формат 60□84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. л. ; уч.-изд. л. .Гарнитура Times.
Тираж 150 экз. Заказ №
Издательство «Самарский университет», 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
УОП СамГУ, ПЛД № 67-43 от 19.02.98.

ВВЕДЕНИЕ

Жидкости и газы с точки зрения механики различаются только степенью сжимаемости. В условиях, когда это свойство не проявляется или не является определяющим, решения уравнений движения сплошной среды оказываются одинаковыми как для жидкостей, так и для газов, Этим объясняется существование дисциплины, называемой аэрогидромеханикой, или механикой жидкостей и газов. Если при изложении этой дисциплины преобладают вопросы движения жидкостей, то ее обычно называют просто гидромеханикой.

В аэрогидромеханике широко используются математические методы, благодаря чему получаемые в ней результаты обладают строгостью и точностью. Однако сложность механической структуры движений реальных жидкостей и газов не позволяет получить такие результаты для большинства случаев, важных для практики, поэтому широко используют приближенные уравнения и приближенные методы их решений. Такие решения требуют обязательной проверки, а иногда и корректировки согласно экспериментальным данным. Кроме того, эксперимент в аэрогидромеханике служит для получения определяющих соотношений и условий однозначности, без чего нельзя построить достоверные расчетные модели.

Аэрогидромеханика находит применение в большинстве отраслей техники и для многих из них является теоретической базой. К числу последних относятся авиация, ракетостроение, энерго-, машиностроение, атомная энергетика, теплотехника, водный транспорт и др. Для каждой из этих отраслей характерен свой круг задач и соответствующих методов их решения. Однако все они основываются на общих законах сохранения, а также на некоторых общих методах моделирования аэрогидромеханических явлений.

Одной из главных целей математического моделирования является получение основных параметров, характеристик или свойств исследуемого процесса. За последние годы существенно повысился практический интерес к разработке математических моделей в новых отраслях науки и техники. Проникновение математических средств моделирования в важные сферы человеческой деятельности означает возможность пользоваться новыми, весьма плодотворными средствами исследования. Вместе с тем на практике оказывается, что одних лишь математических знаний недостаточно для решения той или иной прикладной задачи – необходимо еще получить навыки в переводе исходной формулировки физической задачи на математический язык. Собственно, в этом и состоит проблема овладения искусством математического моделирования.

Математическая модель представляет собой упрощение реальной ситуации. Это упрощение наступает тогда, когда несущественные параметры и связи отбрасываются и исходная сложная задача сводится к идеализиро-

ванной, поддающейся математическому решению и анализу. Именно при таком подходе в прикладной математике возникли блоки без трения, идеальные (невязкие) жидкости и др. Этих понятий нет в реальной действительности. Они являются абстракциями, идеализацией процесса, предпринятой автором математической модели. И, однако, во многих случаях они дают хорошее приближение к реальной ситуации, реальному процессу.

Поэтому, несмотря на то, что все без исключения реальные жидкости обладают вязкостью, является целесообразным начать изучение аэрогидромеханики в предположении, что скольжение частиц жидкости друг по другу не встречает со стороны последней никакого сопротивления. Такая жидкость, лишенная вязкости, называется идеальной или совершенной. Многие выводы, полученные для идеальной жидкости, оказываются применимыми к решению всех чисто практических задач, в которых вязкостью жидкости можно пренебречь.

Из определения идеальной жидкости следует, что развивающиеся в ней внутренние силы не могут иметь касательных составляющих, препятствующих скольжению частиц; следовательно, эти силы в идеальной жидкости всегда направлены по нормалям к поверхностям, проведенным внутри жидкости, и должны рассматриваться как *давления.*

Различие между идеальной и вязкой жидкостью проявляется только при движении. Уравнения же равновесия и для идеальной, и для вязкой жидкости имеют одну и ту же форму. Это следует из того, что при равновесии жидкости нет скольжения частиц друг по другу, а раз нет скольжения, то не будет и сопротивления скольжению. Другими словами, вязкость жидкости проявляется только при ее движении. При равновесии же внутренние силы и в вязкой жидкости представляют собой давления, нормальные к поверхности частиц и направленные внутрь последних.

В идеальных жидкостях и газах отсутствует не только вязкость, но и перенос тепла и вещества. В отличие от идеальных жидкостей, в реальных жидкостях происходят процессы теплопереноса и диффузии покоящихся и движущихся жидкостей. Законы переноса тепла и массы имеют вид, аналогичный закону трения Ньютона.

Жидкости и газы отличаются друг от друга внутренней структурой. В жидкостях межмолекулярные расстояния весьма малы, а, следовательно, силы сцепления между ними достигают больших значений. В газовых средах силы взаимодействия относительно малы, так как расстояния между молекулами велики. По этой причине формы движения частиц в жидкостях и газах оказываются существенно различными. Вследствие различия в молекулярном строении жидкости и газы обладают разными физическими свойствами. Жидкости, как правило, можно считать слабо сжимаемыми средами или, в пределе, несжимаемыми. В процессе движения частицы жидкости практически не меняют объема; плотность жидкостей при умеренных перепадах давления можно принимать постоянной.

Характерной особенностью жидкостей следует считать также их ка-

пиллярные свойства. В результате проявления этих свойств на границах раздела жидкостей и газов образуются поверхности свободного уровня, мениски, капли.

Газы, в отличие от жидкостей, характеризуются проявлением сжимаемости: их плотность является переменной величиной. Вместе с тем при малых скоростях движения, т. е. при малых перепадах давления и в отсутствие теплообмена, сжимаемость газов проявляется слабо. Подчеркнем, что при больших перепадах давления сжимаемость обнаруживается и в жидкостях, однако она по сравнению с газами несоизмеримо мала. Часто газы называют сжимаемыми жидкостями.

В связи с интенсивным развитием скоростной авиации и космической техники возникли проблемы создания математических моделей движения газов при высоких температурах (течения в камерах сгорания авиационных и ракетных двигателей и обтекание корпусов ракет и т.д.) и больших сверхзвуковых скоростях (в соплах двигателей).

Заметим, что все задачи о движении тел в газовой (воздушной) среде или о движении газа в различных каналах составляют раздел аэрогидромеханики, который называют аэродинамикой.

Когда скорость движения газа становится сравнимой со скоростью звука или превышает ее, на передний план выдвигаются эффекты, связанные со сжимаемостью газа. Такого рода движения на практике имеют место у реальных газов. Поэтому об аэродинамике больших скоростей говорят обычно как о газодинамике.

Прежде всего, следует заметить, что в газодинамике почти всегда приходится иметь дело с очень большими значениями чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re} = \upsilon L/\nu$, где υ – скорость газа, L – характерный размер, ν – кинематическая вязкость). Действительно, кинематическая вязкость реального газа, как известно из кинетической теории газов, – порядка величины произведения длины свободного пробега молекул ℓ на их среднюю скорость теплового движения, которая совпадает по порядку величины со скоростью звука a, так что $\nu \sim a\ell$. Если же и характеристическая скорость газодинамической задачи – порядка величины скорости звука, то число Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim \frac{a\mathrm{L}}{a\ell} \sim \frac{\mathrm{L}}{\ell}$, т.е. оно определяется заведомо очень большим отношением характеристических размеров L к длине свободного пробега ℓ (здесь не рассматривается движение тел в очень разреженных газах, когда длина пробега молекул сравнима с размерами тела – это специальный вопрос кинетической теории газов). Как всегда, при очень больших значениях Re вязкость оказывается несущественной для движения газа практически во всем пространстве, и в дальнейшем реальный (вязкий) газ будет рассматриваться как идеальный.

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АЭРОДИНАМИКЕ

Эти модели охватывают разнообразные задачи плоских безвихревых движений идеальной несжимаемой жидкости. Рассмотрим теоремы Кельвина и Лагранжа об условиях существования таких безвихревых течений.

Согласно кинематической теореме Кельвина об изменении во времени циркуляции вектора скорости, индивидуальная производная во времени от циркуляции вектора скорости по замкнутому жидкому (т.е. состоящему во все время движения из одних и тех же частиц жидкости) контуру равна циркуляции вектора ускорения по тому же контуру, т.е.

$$\frac{d}{dt}\oint_C \vec{\upsilon}\cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot d\vec{r}\,. \qquad (1.1)$$

Возьмем уравнение движения Эйлера: $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$, которое, в случае потенциальности объемных сил и баротропности движения, можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\operatorname{grad}(P + \Pi)\,, \qquad (1.2)$$

поскольку $\vec{F} = -\operatorname{grad}\Pi$ (когда объемные силы имеют потенциал П), а градиент функции давления P при баротропном процессе

$$\operatorname{grad} P = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\,.$$

Подставляя уравнение (1.2) в (1.1), получим:

$$\frac{d}{dt}\oint_C \vec{\upsilon}\cdot d\vec{r} = -\oint_C \operatorname{grad}(\Pi + P)\cdot d\vec{r} = -\oint_C d(\Pi + P),$$

т.к. $\operatorname{grad}\cdot d\vec{r} = \frac{d}{d\vec{r}}\cdot d\vec{r} = d\,.$

При однозначности функций P и П контурный интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю, и тогда:

$$\frac{d}{dt}\oint \vec{\upsilon}\cdot d\vec{r} = 0\,.$$

Следовательно, $$\Gamma = \oint \vec{\upsilon}\cdot d\vec{r} = \text{const} \qquad (1.3)$$

Уравнение (1.3) и является выражением теоремы Кельвина.

При баротропном движении идеальной жидкости под действием поля объемных сил с однозначным потенциалом циркуляция вектора скорости по замкнутому жидкому контуру не меняется.

Если учесть, что согласно теореме Стокса циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру равна суммарной интенсивно-

сти вихревых трубок, опоясанных этим контуром, то можно на основании теоремы Кельвина заключить, что при принятых допущениях о баротропности движения и наличии однозначного потенциала объемных сил сохраняется также и интенсивность вихревых трубок:

$$\oint_S (\mathrm{rot}\,\overline{\upsilon})_n \, ds = \mathrm{const}.$$

Предположим, что в начальный момент времени во всех точках области, заполненной жидкостью, отсутствуют завихренности, т.е. элементарные жидкие объемы движутся без вращения, совершая лишь поступательное и деформационное движения. Тогда постоянная, стоящая в правой части последнего уравнения, будет равна нулю, и в любой другой момент времени сохранится равенство:

$$\oint_S (\mathrm{rot}\,\upsilon)_n \, ds = 0.$$

Следовательно, $(\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon})_n = 0$ или $\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon} = 0$

Отсюда следует теорема Лагранжа.

Если во всех точках баротропно движущейся под действием объемных сил с однозначным потенциалом идеальной жидкости вектор вихря скорости в начальный момент времени был равен нулю, то движение останется безвихревым и в любой последующий момент времени.

По аналогии из теоремы Лагранжа следует также, что если вначале движение было вихревым, то оно останется вихревым и в дальнейшем. В действительности, при движении реальной жидкости приходится наблюдать как образование, так и исчезновение вихревых движений. Главной причиной такого нарушения справедливости теорем Кельвина и Лагранжа служит наличие в реальной жидкости внутреннего трения (вязкости), особенно существенного в тонком пограничном слое на поверхности обтекаемого тела и в аэродинамическом следе за телом. Кроме того, возможно образование поверхностей разрыва сплошности жидкости, неустойчивых и сворачивающихся в дискретные вихри. Таковы, например, наблюдаемые в следе за обтекаемым телом вихревые дорожки Кармана.

Однако для идеальной жидкости теоремы Кельвина и Лагранжа являются справедливыми, и тогда рассмотрим для нее понятие потенциала скоростей. Если движение жидкости безвихревое, то из условия равенства нулю вектора вихря скорости $\mathrm{rot}\vec{\upsilon}$ следует существование функции φ, зависящей от координат и времени, связанной со скоростью $\vec{\upsilon}$ равенством: $\vec{\upsilon} = \mathrm{grad}\varphi$, или в проекциях на оси прямоугольных декартовых координат:

$$\upsilon_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \qquad \upsilon_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \qquad \upsilon_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Функция φ называется потенциалом поля скоростей или потенциалом скоростей. Ранее мы шли от противного и говорили: если существует потенциал скорости φ, связанный с вектором скорости соотношением $\vec{\upsilon} = \mathrm{grad}\varphi$ (т.е. течение потенциально), то вектор вихря скорости $\mathrm{rot}\vec{\upsilon}$ равен нулю (т.е. течение безвихревое). Это вытекает из следующих соотношений, записанных с помощью оператора Гамильтона ∇.

$$\vec{\upsilon} = \mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi,$$

$$\mathrm{rot}\vec{\upsilon} = \nabla \times \vec{\upsilon}, \text{ тогда } \mathrm{rot}\vec{\upsilon} = \nabla \times (\nabla\varphi) = (\nabla \times \nabla)\varphi = 0,$$

т.к. векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю. Уравнение поверхности уровня потенциала скоростей: $\varphi(x, y, z, t) = \mathrm{const}$, в случае стационарного поля $\varphi(x, y, z) = \mathrm{const}$.

1.1. Математическая модель плоского движения идеальной несжимаемой жидкости

Под плоским движением понимается такое движение, когда во всех плоскостях, перпендикулярных поверхности обтекания, движение частиц остается одинаковым. В этом случае достаточно рассмотреть задачу обтекания контура в одной плоскости, все прочие поверхности обтекания представляют собой непрерывную систему параллельных плоскостей, в которых течение является одинаковым. Поэтому можно, например, вместо пространственного обтекания крыла бесконечного размаха рассмотреть плоское обтекание крылового контура.

Здесь возникает необходимость применения теории функций комплексного переменного к задаче плоского безвихревого обтекания тел несжимаемой идеальной жидкостью.

Жуковский показал, что задача обтекания кругового цилиндра набегающим идеальным потоком решается аналитически до конца. Тогда это решения можно распространить на произвольный контур, если плоскость круга отображается на плоскость этого контура, т.е. использовать метод конформных отображений. Кинематическая задача охватывается уравнением неразрывности для плоского движения несжимаемой жидкости $\mathrm{div}\vec{\upsilon}(x, y) = 0$ или

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = 0. \qquad (1.4)$$

Это уравнение можно решить, если ввести новую функцию тока ψ, такую, что

$$\upsilon_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \upsilon_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (1.5)$$

Задача свелась к нахождению функции ψ. Запишем для этого дифференциальное уравнение линий тока, которое в случае плоского движения имеет вид:

$$\frac{\partial x}{\upsilon_x} = \frac{\partial y}{\upsilon_y} \text{ или } \upsilon_y dx - \upsilon_x dy = 0 \ . \qquad (1.6)$$

Подставляя в уравнение (1.6) выражение для υ_x и υ_y через ψ, получим $\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$, т.е полный дифференциал $d\psi(x,y)=0$. Тогда $\psi(x,y)=const$, следовательно, функция ψ сохраняет постоянное значение вдоль линий тока. В силу этого функция ψ получила название функции тока. Если взять известные соотношения для проекций вектора скорости через потенциал скорости φ:

$$\upsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \upsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad (1.7)$$

то, подставляя их в уравнение неразрывности (1.4), придем к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 .$$

Если наложено условие потенциальности плоского течения, то имеет место уравнение

$$\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = 0, \qquad (1.8)$$

полученное из уравнения $\mathrm{rot}\vec{\upsilon}(x,y) = \left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$, которое является выражением того, что рассматриваемое поле безвихревое.

Подставляя в уравнение (1.8) выражение для υ_x и υ_y через ψ, получим опять уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$.

Таким образом, в случае потенциального поля скоростей как функции тока, так и потенциалы скоростей определяются одинаковыми уравнениями типа Лапласа.

Если сопоставить соотношения (1.5) и (1.7), то получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} . \qquad (1.9)$$

Эти соотношения для идеальной несжимаемой жидкости выражают условия Коши – Римана. С точки зрения теории функций комплексного переменного эти условия говорят о следующем: существует характеристическая функция $W(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ (для которой действительная часть φ, а мнимая ψ), являющаяся аналитической функцией комплексного аргу-

мента z, где z=x+iy. Если продифференцировать по x характеристическую функцию W(z), то получим: $\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}-i\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\upsilon_x-i\upsilon_y=\overline{\upsilon}$.

Полученное выражение носит название сопряженной скорости и обозначается $\overline{\upsilon}$, а скорость $\upsilon=\upsilon_x+i\upsilon_y$ является комплексной скоростью. Необходимо отметить, что

$$\overline{\upsilon}=\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial (iy)}=\frac{dW}{dz}. \qquad (1.10)$$

Это вытекает из свойств функции W(z) как функции не просто двух переменных (координат x,y), а функции одной комплексной переменной z=x+iy. Действительно, если величина W есть функция только положения точки M с координатой z, то производная от нее в этой точке в свою очередь должна быть функцией только положения точки, т.е. координаты z, и не зависеть от направления дифференцирования в плоскости. Иными словами, производная $\frac{dW}{dz}$ и производные по направлениям действительной и мнимой осей должны быть равны между собой. Действительно,

$$\frac{\partial W}{\partial (iy)}=-i\frac{\partial W}{\partial y}=-i\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}=\upsilon_x-i\upsilon_y=\overline{\upsilon}$$

и, следовательно, получим $\frac{\partial W}{\partial (iy)}=\frac{\partial W}{\partial x}=\overline{\upsilon}=\frac{dW}{dz}$.

Таким образом, производная от характеристической функции W есть сопряженная скорость $\overline{\upsilon}$, а сама функция W(z)=φ+iψ называется комплексным потенциалом или характеристической функцией течения. Поэтому возникает очень интересное предложение: рассматривать не действительное течение и действительные силы, а их зеркальные отображения.

Математический аппарат теории функций комплексного переменного приводит к новому качеству, при помощи которого решение задачи об определении поля скоростей и подъемной силы (сопротивления) рассматривается в зеркальном отображении. Из курса теории функций комплексного переменного известно, что функция комплексного переменного W(z) однозначно отображает точки плоскости комплексного переменного z=x+iy на плоскость комплексного переменного W=φ+iψ. При этом происходит отображение фигур: замкнутых кривых и ограниченных ими частей плоскости z в соответствующие им фигуры или части плоскости W. Такое отображение называют конформным.

1.2 Комплексные потенциалы и характеризуемые ими виды движений

Рассмотрим комплексный потенциал W(z)=φ(x,y)+ιψ(x,y). Отделяя действительную и мнимую части W(z), получим потенциал скоростей φ и функцию тока ψ некоторого плоского безвихревого движения:

$$\varphi(x,y)=\mathrm{Re}\,W(z);\ \psi(x,y)=\mathrm{Im}\,W(z).$$

Приравнивая функцию φ(x,y) различным постоянным φ(x,y)=C, получим семейство изопотенциальных линий, аналогично совокупность равенств ψ(x,y)=C' представляет собой семейство линий тока. Изопотенциальные линии и линии тока в любой точке плоскости течения взаимно ортогональны. Для доказательства этого утверждения надо показать, что взаимно перпендикулярны векторы – градиенты этих функций. Действительно,

$$\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathrm{grad}\psi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\equiv 0,$$

что и доказывает взаимную ортогональность изопотенциальных линий и линий тока (так как скалярное произведение двух векторов равно нулю, если эти векторы перпендикулярны друг другу).

Зная комплексный потенциал W(z), можно определить вектор скорости $\vec{\upsilon}$ или его проекции υ_x и υ_y.

Комплексная скорость $\upsilon=\upsilon_x+i\upsilon_y$, величина этой скорости (или модуль комплексного числа) равна $|\upsilon|=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}$. Сопряженная скорость $\overline{\upsilon}=\upsilon_x-i\upsilon_y$, величина этой скорости $|\overline{\upsilon}|=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=|\upsilon|$.

Если θ - угол между вектором и осью 0x, то

$$\upsilon=\upsilon_x+i\upsilon_y=|\upsilon|(\cos\theta+i\sin\theta)=|\upsilon|e^{i\theta}.$$

Здесь использована формула Эйлера $e^{i\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)$:

$$\overline{\upsilon}=\upsilon_x-i\upsilon_y=|\upsilon|(\cos\theta-i\sin\theta)=|\upsilon|e^{-i\theta},$$

$$\overline{\upsilon}=\upsilon e^{-2i\theta}.$$

Отсюда видно, что сопряженная скорость $\overline{\upsilon}$ является зеркальным отображением υ относительно оси $0\upsilon_x$. Плоскость X0Y называется физической плоскостью или плоскостью течения.

Совокупность значений комплексной скорости υ образует плоскость годографа скорости или плоскость годографа. В этой плоскости располагаются годографы скорости, то есть геометрические места концов векторов скоростей частиц жидкости, проведенных из начала координат.

Производная от комплексного потенциала:

$$\frac{dw}{dz}=\overline{\upsilon}=|\upsilon|e^{-i\theta}=\upsilon_x-i\upsilon_y.$$

Тогда проекции скорости: $\upsilon_x = \mathrm{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right)$; $\upsilon_y = -\mathrm{Im}\left(\frac{dw}{dz}\right)$.

Контурный интеграл от сопряженной скорости $\bar{\upsilon}$ по замкнутому контуру C в плоскости течения равен:

$$\oint_C \bar{\upsilon} dz = \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right) dz = \oint_C dw = \oint_C (d\varphi + i d\psi).$$

Вычисляя действительную и мнимую части этого интеграла, получим:

$$\mathrm{Re}\oint_C \bar{\upsilon} dz = \oint_C d\varphi = \oint_C \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right) = \oint_C (\upsilon_x dx + \upsilon_y dy) = \Gamma;$$

$$\mathrm{Im}\oint_C \bar{\upsilon} dz = \oint_C d\psi = \oint_C \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) = \oint_C (\upsilon_x dy + \upsilon_y dx) = Q.$$

Отсюда видно, что действительная часть контурного интеграла определяет циркуляцию скорости Г по замкнутому контуру, а мнимая – секундный объемный расход жидкости Q через замкнутый контур.

Рассмотрим несколько простых примеров комплексных потенциалов, которые широко используются на практике:

а) линейная функция W(z)=az, где a – в общем случае комплексная постоянная. Составляя сопряженную скорость

$$\bar{\upsilon} = \frac{dW}{dz} = a = \mathrm{const} = \bar{\upsilon}_\infty = \upsilon_{x\infty} - i\upsilon_{y\infty} = |\upsilon_\infty(\cos\alpha - i\sin\alpha)| = |\upsilon_\infty| e^{-i\alpha};$$

видим, что комплексная константа представляет одинаковую по величине и направлению во всем потоке сопряженную скорость. Одинаковой будет и комплексная скорость

$$\upsilon = \upsilon_\infty = \upsilon_{x\infty} + i\upsilon_{y\infty} = |\upsilon_\infty(\cos\alpha + i\sin\alpha)| = |\upsilon_\infty| e^{i\alpha};$$

Следовательно, линейная функция определяет комплексный потенциал однородного потока со скоростью υ_∞, наклоненного к действительной оси физической плоскости под углом α (рис. 1).

$$W = \bar{\upsilon}_\infty z = (\upsilon_{x\infty} - i\upsilon_{y\infty})z = |\upsilon_\infty| e^{-i\alpha} z = |\upsilon_\infty|(\cos\alpha - i\sin\alpha)z.$$

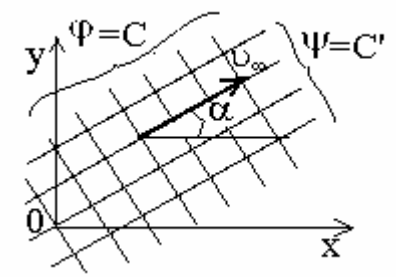


Рис.1

Отделяя действительную и мнимую части, найдем потенциал скоростей φ и функцию тока ψ:

$$W = |\upsilon_\infty|(\cos\alpha - i\sin\alpha)(x + iy) =$$

$$= |\upsilon_\infty|[(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + i(-x\sin\alpha + y\cos\alpha)]$$

Так как w = φ + i ψ, то

$$\varphi = |\upsilon_\infty|(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = \upsilon_{x\infty}x + \upsilon_{y\infty}y$$

$$\psi = |\upsilon_\infty|(-x\sin\alpha + y\cos\alpha) = -\upsilon_{y\infty}x + \upsilon_{x\infty}y$$

Здесь использованы соотношения z=x+iy; $\upsilon_{x\infty} = \upsilon_\infty\cos\alpha$, $\upsilon_{y\infty} = \upsilon_\infty\sin\alpha$.

В частных случаях равенства $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$, получим:

$$\varphi=|\upsilon_\infty|x, \quad \psi=|\upsilon_\infty|y \rightarrow \quad \text{при } \alpha=0;$$

$$\varphi=|\upsilon_\infty|y, \quad \psi=-|\upsilon_\infty|x \rightarrow \quad \text{при } \alpha=\pi/2.$$

Это будут потенциалы скорости и функции тока однородных потоков, направленных соответственно вдоль осей X и Y;

б) логарифмическая функция $W=A\cdot\ln z$, где A – действительная величина. Воспользовавшись полярными координатами (r,θ), полагая $z=re^{i\theta}$ и учитывая, что $\ln e^{i\theta}=i\theta$, получим

$$W=\varphi+i\psi=A\ln(r)+i\theta,$$

откуда $\varphi=A\ln(r)$, $\psi=A\theta$.

Линиями тока служат лучи $\theta=const$, выходящие из начала координат, изопотенциальными линиями – ортогональные к ним окружности $r=const$ (рис.2).

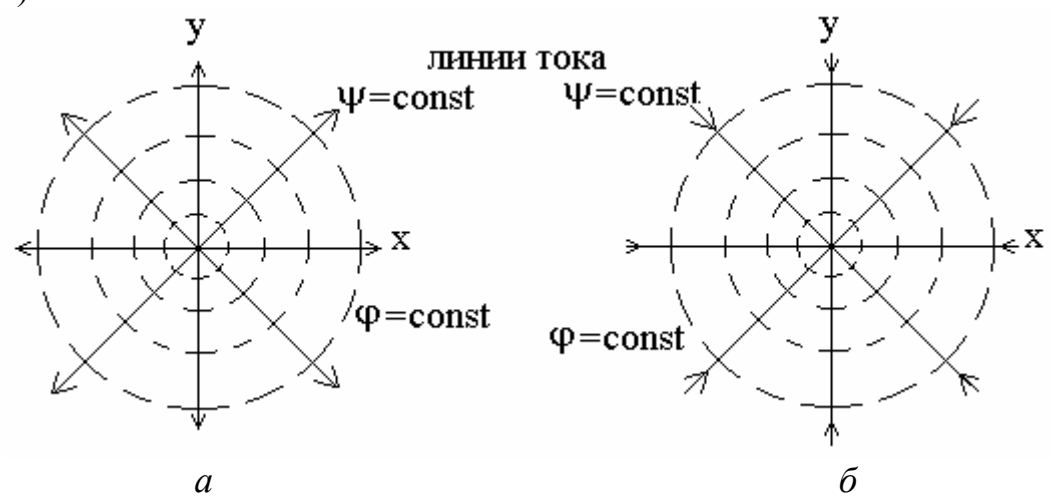


Рис. 2

Картина линий тока на рис. 2 соответствует плоскому течению жидкости из точечного источника (а) или к стоку (б), находящимся в начале координат.

Чтобы найти гидродинамическое значение коэффициента A, введем в рассмотрение мощность (интенсивность) источника или стока Q, определив эту величину как секундный объемный расход жидкости сквозь замкнутый контур, охватывающий источник или сток (в данном случае – начало координат), положительный для источника и отрицательный для стока.

Так как $Q=\oint_C d\psi$, а $\psi=A\theta$, то $Q=\int_0^{2\pi} A d\theta=2\pi A$, откуда $A=\dfrac{Q}{2\pi}$.

Тогда характеристическая функция для расположенного в начале координат источника или стоке с секундным объемным расходом Q будет:

$$W(z)=\frac{Q}{2\pi}\ln z, \text{ а } \varphi=\frac{Q}{2\pi}\ln r \quad \text{и } \psi=\frac{Q}{2\pi}\theta.$$

Далее $\bar{\upsilon}=\dfrac{dW}{dz}=\dfrac{Q}{2\pi}\dfrac{d\ln z}{dz}=\dfrac{Q}{2\pi z}$, $|\upsilon|=\sqrt{\upsilon_r^2+\upsilon_\theta^2}$, где $\upsilon_r=\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}, \upsilon_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$.

В нашем случае $\upsilon_r = \frac{Q}{2\pi}\frac{\partial \ln r}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}, \upsilon_\theta = 0,$ тогда $|\upsilon| = |\upsilon_r| = \frac{|Q|}{2\pi r};$

в) логарифмическая функция W=A lnz, где A – чисто мнимая величина, равная Bi, где B – действительная константа. Тогда потенциалу W=Bilnz будет соответствовать та же сетка кривых линий, что и во втором случае, но только линии тока и изопотенциальные линии поменяются местами.

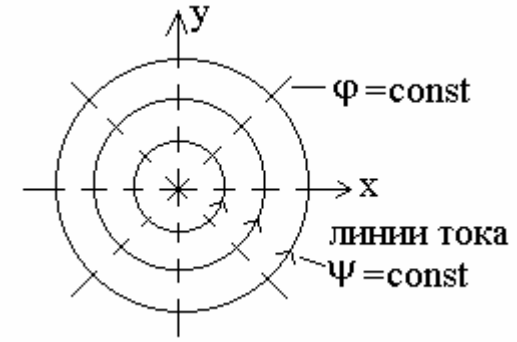


Рис. 3

Картина линии тока соответствует циркуляционному движению жидкости вокруг изолированного точечного вихря, расположенного в начале координат (рис. 3).

Покажем это: поскольку в полярных координатах $z=r\cdot e^{i\theta}$, то

$W = \varphi + i\psi = Bi\cdot \ln z = Bi\cdot(\ln r + iQ) =$

$= -B\theta + iB\cdot \ln r.$

Отсюда $\varphi=-B\theta$; $\psi=B\ln r$,

так как $\Gamma = \oint_C d\varphi = \int_0^{2\pi} -Bd\theta = -2\pi B$, тогда $B = -\frac{\Gamma}{2\pi}$.

Следовательно, комплексный потенциал циркуляционного потока с данной циркуляцией Г будет равен:

$$W = Bi\cdot \ln z = -\frac{\Gamma}{2\pi} i\cdot \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$

При этом знак циркуляции Г определяется как положительный в предположении, что направление интегрирования по контуру выбирается в такую сторону, чтобы при этом площадь, ограниченная контуром, оставалась слева.

Далее $\varphi = -B\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$, $\psi = B\ln r = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$,

$\overline{\upsilon} = \frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{d\ln z}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i z}$; $|\overline{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2}$; $\upsilon_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$; $\upsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$,

тогда $|\upsilon| = |\upsilon_\theta| = \frac{|\Gamma|}{2\pi r}$.

Заметим, что как в случае источника (стока), так и в случае вихря распределение абсолютной величины скорости будет:

в случае источника $|\upsilon| = \frac{|Q|}{2\pi r}$, в случае стока $|\upsilon| = \frac{|\Gamma|}{2\pi r}$, то есть величина скорости обратно пропорциональна расстоянию от источника (стока) или вихря. В начале координат скорость бесконечно велика – начало координат является особой точкой поля скоростей.

1.3. Математическая модель бесциркуляционного обтекания

кругового цилиндра идеальной жидкостью

Для определения комплексного потенциала при бесциркуляционном обтекании кругового цилиндра радиусом а нужно решить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = 0 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{div} \overline{\upsilon} = 0$$

при следующих граничных условиях:

а) при r=a υ_r=0, т.к. проекция вектора скорости υ_r перпендикулярна поверхности цилиндра (рис. 4);

б) при r →∞ $\upsilon_r = \upsilon_\infty \cos\theta$.

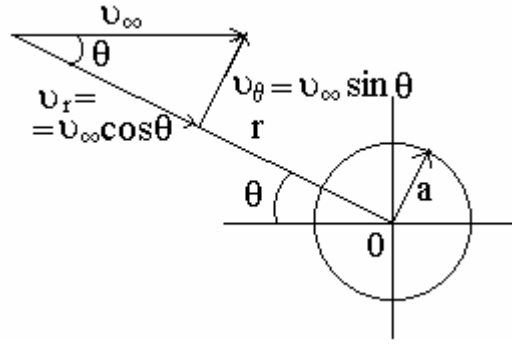


Рис. 4

Решать уравнение неразрывности будем в полярных координатах (r, θ). Его можно получить, вводя так называемые коэффициенты Ламэ:

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_i}\right)^2},$$

где g_i – криволинейные координаты.

Величины H_i (параметры Ламэ) имеют смысл коэффициентов пропорциональности в равенстве, выражающем связь между элементарным приращением dS_i длины отрезка и приращением соответствующей криволинейной координаты: $dS_i=H_i dg_i$. Здесь dS_1, dS_2, dS_2 – длины ребер элементарной ячейки; g_1, g_2, g_3, – оси криволинейных координат. Тогда $dS_1=H_1dg_1$, $dS_2=H_2dg_2$, $dS_3=H_3dg_3$.

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_1}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_3}\right)^2}.$$

Из векторного анализа известно:

$$\operatorname{div}\vec{\upsilon} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial g_1}\left(\upsilon_{g1}H_2H_3\right) + \frac{\partial}{\partial g_2}\left(\upsilon_{g2}H_1H_3\right) + \frac{\partial}{\partial g_3}\left(\upsilon_{g3}H_1H_2\right)\right].$$

В полярной системе координат криволинейными координатами являются g_1=r, g_2=θ, связанные с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$

Найдем коэффициенты для нашего случая плоского обтекания:

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} = 1,$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(-r\sin(\theta))^2 + (r\cos(\theta))^2} = r.$$

В криволинейных полярных координатах для плоского случая

$$\mathrm{div}\vec{\upsilon} = \frac{1}{H_r H_\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\upsilon_r H_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\upsilon_\theta H_r)\right].$$

Подставляя значения H_r=1 и H_θ=r, получим $\mathrm{div}\vec{\upsilon} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\upsilon_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\upsilon_\theta)\right].$

Тогда уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\upsilon_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\upsilon_\theta) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \upsilon_r}{\partial r} + \frac{\upsilon_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\upsilon_\theta) = 0. \qquad (1.11)$$

Это и есть уравнение неразрывности в полярных координатах для плоского течения.

В работах Жуковского вводится функция потенциала скорости, определяемая соотношениями: $\upsilon_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$; $\upsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$, т.к. в полярных координатах приращениями координатных линий являются ∂r и $r\partial\theta$. Тогда подставляя в уравнение (1.11) выражения для υ_r и υ_θ, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \qquad (1.12)$$

Это дифференциальное уравнение является уравнением Лапласа, записанным для плоской задачи в полярной системе координат. Его можно решать методом Пуассона, согласно которому $\varphi(r,\theta) = R(r)\vartheta(\theta)$. Найдем производные из (1.12), учитывая, что R зависит только от r, а ϑ зависит только от θ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = R'\vartheta; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = R''\vartheta; \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = R\vartheta''.$$

Подставляя эти значения в уравнение Лапласа (1.12), получим:

$R''\vartheta + \frac{1}{r}R'\vartheta + \frac{1}{r^2}R\vartheta'' = 0$ или, умножив на r^2: $\vartheta(rR' + r^2R'') + \vartheta''R = 0$.

Очевидно, что оно может быть записано в виде

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} = -\frac{(rR' + r^2R'')}{R} = -n^2. \qquad (1.13)$$

Такая запись справедлива, поскольку левая часть зависит только от ϑ, а правая - только от R. Введем коэффициент $-n^2$, который изменяется в пределах ($1 \le n \le \infty$). Тогда уравнение (1.13) распадается на два:

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta''+n^2\vartheta=0\\&r^2R''+rR'-n^2R=0\end{aligned}\right\}\qquad(1.14)$$

Первое уравнение системы (1.14) – это однородное линейное уравнение второго порядка, его решение имеет вид:

$$\vartheta = C_1\cos(n\theta) + C_2\sin(n\theta). \qquad (1.15)$$

Второе уравнение системы (1.14) является уравнением Эйлера. Решение этого уравнения ищется в виде: $R=r^m$, тогда $R'=m\,r^{m-1}$, $R''=m(m-1)r^{m-2}$. Вносия полученные значения во второе уравнение системы (1.14), получим следующее:

$m(m-1)\,r^m + m\,r^m - n^2r^m = 0 \Rightarrow (m^2 - n^2)r^m = 0 \Rightarrow (m^2 - n^2) = 0$ и тогда $m = \pm n$.

Следовательно, решение второго уравнения системы (1.14) следует искать в следующем виде:

$$R = C_3\,r^n + C_4\,r^{-n}. \qquad (1.16)$$

Тогда частный интеграл уравнения Лапласа (1.12) можно записать в следующем обобщенном виде:

$$\varphi(r,\theta) = R(r)\vartheta(\theta) = \left[A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right]r^n + \left[C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta)\right]r^{-n}.$$

Общий интеграл исходного уравнения Лапласа для плоской задачи будет равен сумме частных решений:

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right]r^n + \left[C_n\cos(n\theta) + D_n\sin(n\theta)\right]r^{-n}. \qquad (1.17)$$

Отыщем коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n, воспользовавшись граничными условиями. Найдем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left[A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right]r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n\left[C_n\cos(n\theta) + D_n\sin(n\theta)\right]r^{-n-1}.$$

Возьмем второе граничное условие: при $r\to\infty$ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \upsilon_r = \upsilon_\infty\cos(\theta)$.

В этом случае при n=1, $\upsilon_\infty\cos(\theta) = A_1\cos(\theta)$ и, следовательно, $A_1 = \upsilon_\infty$. Другие коэффициенты $A_2 = A_3 = \ldots A_n = 0$; $B_1 = B_2 = \ldots B_n = 0$ при всех остальных n>1. Тогда производную можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \upsilon_\infty\cos(\theta) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos(n\theta) + D_n\sin(n\theta)\right]r^{-n-1}.$$

Возьмем другое граничное условие: при r=a → $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = \upsilon_r = 0$. В этом случае при n=1: $0 = \upsilon_\infty\cos\theta - C_1 a^{-2}\cos\theta$, откуда $C_1 = \upsilon_\infty a^2$, $C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 0$ и $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0$ при всех $n > 1$.

Подставим все найденные значения коэффициентов A_n, B_n, C_n и D_n в общий интеграл уравнения Лапласа (1.17) и получим искомый потенциал скоростей:

$$\varphi(r,\theta) = r\upsilon_\infty \cos\theta + \upsilon_\infty \frac{a^2}{r}\cos\theta = \upsilon_\infty \cos\theta\left(r + \frac{a^2}{r}\right). \qquad (1.18)$$

Для нахождения характеристической функции W(z) надо найти ортогональную к функции φ функцию тока ψ. Воспользуемся условиями Коши – Римана, которые в полярной системе координат запишутся так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta}; \quad \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Найдем производные $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$.

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Тогда с учетом (1.18) $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\upsilon_\infty \sin\theta\left(r + \frac{a^2}{r}\right) = -r\upsilon_\infty \sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$ и, следовательно:

а) $\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \upsilon_\infty \sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$;

б) $\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = r\upsilon_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = \upsilon_\infty \cos\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$, т.к. с учетом (1.18): $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \upsilon_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$.

Интеграл от функции $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta$ (как полного дифференциала) является криволинейным интегралом 2 рода. Берется он следующим образом: сначала интегрируем $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ по r : $\psi = \upsilon_\infty \sin\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right) + C(\theta)$, затем полученное выражение дифференцируем по θ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \upsilon_\infty \cos\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right) + C'(\theta).$$

Результат сравниваем с производной $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, записанной ранее: получаем $C'(\theta) = 0$,тогда C(θ)=const, и, следовательно, $\psi = \upsilon_\infty \sin\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right) + \text{const}$.

Итак, опуская константу, что не меняет физической картины течения, получаем

$$\psi = \upsilon_\infty \sin\theta\left(r - \frac{a^2}{r}\right). \qquad (1.19)$$

Характеристическая функция W(z) будет равна:

$$W(z) = \varphi(r,\theta) + i\,\psi(r,\theta) = \upsilon_\infty\,[r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{a^2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)],$$

$$W(z) = \upsilon_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right). \qquad (1.20)$$

Здесь $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta} = z$; $\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r\,e^{i\theta}} = \frac{1}{z}$.

Поставленная здесь задача решена до конца.

Рассмотрим кинематические характеристики обтекания. Найдем скорость потока на поверхности обтекаемого тела:

$$\upsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\upsilon_\infty\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \text{т.к.} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} == -r\upsilon_\infty\sin\theta\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right),$$

при r=a: $\upsilon_\theta = -2\upsilon_\infty\sin\theta$,

$$\upsilon_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \upsilon_\infty\cos\theta\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \rightarrow \text{при } r=a\text{: } \upsilon_r=0,$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2}\text{; при } r=a \rightarrow \upsilon = 2\upsilon_\infty\sin\theta \text{ или } \frac{\upsilon}{\upsilon_\infty} = 2\sin\theta. \qquad (1.21)$$

Коэффициент давления $C_p = \frac{p - p_\infty}{1/2(\rho\upsilon_\infty^2)}$ можно найти с помощью уравнения Бернулли: $p + \frac{\rho\upsilon^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho\upsilon_\infty^2}{2}$, из которого $p - p_\infty = \frac{\rho\upsilon_\infty^2}{2} - \frac{\rho\upsilon^2}{2}$. Тогда

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{1/2(\rho\upsilon_\infty^2)} = 1 - \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_\infty}\right)^2,$$

или, учитывая полученный выше результат (1.21), на поверхности обтекаемого цилиндра получим

$$C_p = 1 - 4\sin^2\theta. \qquad (1.22)$$

Выясним физическое содержание полученных соотношений. В точках A и B (рис. 5) значение скорости υ будет равно нулю, т.к. в этих точках θ=0, $\sin\theta = 0$ и $\upsilon = 2\upsilon_\infty\sin\theta = 0$, тогда C_p=1. Эти точки в аэродинамике называют критическими: точка A – передняя критическая точка или лобовая точка, точка B – задняя критическая точка или кормовая точка.

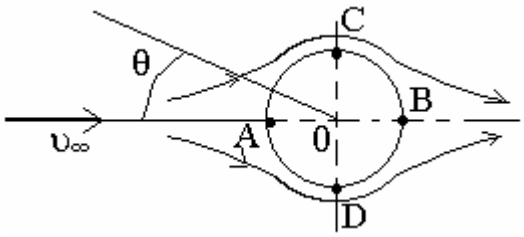


Рис. 5

В точках C и D ($\theta=\pm 90^0$): $\frac{\upsilon}{\upsilon_\infty} = 2$, C_p=-3. Эти точки также являются характерными точками при обтекании контура. Они называются миделевыми точками, в них будет удвоенная скорость υ_∞,

т.е. $\upsilon=2\upsilon_\infty$.

На контуре CAD в передней точке разветвления (точка A) коэффициент давления имеет максимальное значение, затем при движении к точкам C и D происходит разгон жидкости от нуля до $2\upsilon_\infty$. Это конфузорная часть контура. На участке CBD происходит падение скорости и рост давления – это диффузорная часть контура. Необходимо обратить внимание на симметричную картину обтекания кругового цилиндра как относительно оси OX, так и оси OY.

Вычислим главную аэродинамическую реакцию (равнодействующую сил давлений жидкости на цилиндр) и главный аэродинамический момент при помощи интегральных соотношений, предложенных Чаплыгиным и независимо от него Блазиусом.

При введении характеристической функции W рассматривается зеркальное отображение, следовательно, и при вычислении реакции и момента с использованием W рассматривают зеркальную задачу. Главный вектор сил гидродинамических давлений $\vec{R}$ жидкости на цилиндр равен в общем случае $\vec{R}=-\oint\limits_C P\vec{n}d\ell$. Кроме того, $\vec{R}=R_x+iR_y$. Его зеркальное отображение

$$\overline{R}=R_x-iR_y=-\oint\limits_C(pn_x-ipn_y)d\ell=-\oint\limits_C p[\cos(n,x)-i\cos(n,y)]d\ell=$$

$$=-\oint\limits_C p[\sin\theta+i\cos\theta)]d\ell=-i\oint\limits_C p[\cos\theta-i\sin\theta)]d\ell=-i\oint\limits_C pe^{-i\theta}d\ell;$$

$$\overline{R}=-i\oint\limits_C pd\overline{z}. \qquad (1.23)$$

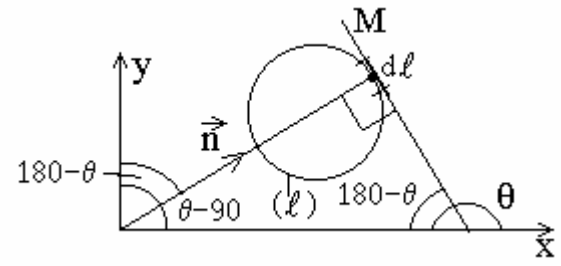


Рис. 6

Здесь θ – угол между осью X и касательной к поверхности цилиндра в точке M (см. рис. 6);
$n_x=\cos(n\hat{}x)$; $n_y=\cos(n\hat{}y)$;
$(n\hat{}x)=\theta-90^0$; $(n\hat{}y)=180^0-\theta$;
$dz=dx+idy=d\ell(\cos(\theta)+i\cdot\sin(\theta))=e^{i\theta}d\ell$;
$d\overline{z}=dx-idy=d\ell(\cos(\theta)-i\cdot\sin(\theta))=e^{-i\theta}d\ell$;
$d\overline{z}=e^{-2i\theta}dz$.

Обратимся к интегралу Бернулли: $p+\dfrac{\rho\upsilon^2}{2}=\text{const}$, откуда $p=\text{const}-\dfrac{\rho\upsilon^2}{2}$. Здесь υ – величина скорости, которая в теории комплексного переменного обозначается как модуль комплексного числа: $\upsilon=|\upsilon|=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}$. Подставим p и $|\upsilon|$ в формулу (1.23) и получим:

$$\overline{R}=\frac{i\rho}{2}\oint\limits_C|\upsilon|^2d\overline{z}-i\oint\limits_C\text{const}\cdot d\overline{z}.$$

Здесь $-i\oint\limits_C \text{const}\cdot d\bar{z} \equiv 0$, поскольку $d\bar{z}$ является полным дифференциалом, а интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю. Тогда получим:

$$\bar{R} = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C |\upsilon|^2 d\bar{z} = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C |\upsilon|^2 e^{-2i\theta} dz = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C \bar{\upsilon}^2 dz,$$

так как $\bar{\upsilon} = |\upsilon|\cdot e^{-i\theta}$.

Поскольку $\bar{\upsilon} = \dfrac{dW}{dz}$, то $\bar{R} = \dfrac{i\rho}{2}\oint\limits_C \left(\dfrac{dW}{dz}\right)^2 dz$. (1.24)

Это первое интегральное выражение Чаплыгина-Блазиуса. Следовательно, если известна характеристическая функция W, то можно найти главный аэродинамический вектор $\bar{R}$, возникающий при обтекании контура.

Главный момент L сил гидродинамических давлений жидкости на цилиндр определяется относительно оси, расположенной перпендикулярно плоскости течения и проходящей через начало координат.

$$L = \oint\limits_C (xn_y - yn_x)pd\ell = -\oint\limits_C (x\cos(n,y) - y\cos(n,x))pd\ell =$$

$$= -\oint\limits_C p(-x\cos(\theta) - y\sin(\theta))d\ell = \oint\limits_C p(xdx + ydy),$$

так как $dx = \ell\cos(\theta)$; $dy = \ell\sin(\theta)$.

Поскольку $zd\bar{z} = (x+iy)(dx-idy) = (xdx+ydy)+ i(ydx-xdy)$, то отсюда $(xdx+ydy)=\text{Re}(zd\bar{z})$ и тогда $L = \text{Re}\oint\limits_C pzd\bar{z}$.

Из уравнения Бернулли: $p = \text{const} - \dfrac{\rho|\upsilon|^2}{2}$. Следовательно, $L = -\dfrac{\rho}{2}\text{Re}\oint\limits_C |\upsilon|^2 zd\bar{z}$, поскольку второй интеграл от полного дифференциала $d\bar{z}$ равен нулю.

Так как $d\bar{z} = e^{-2i\theta}dz$; $\bar{\upsilon} = |\upsilon|e^{-i\theta}$, то $L = -\dfrac{\rho}{2}\text{Re}\oint\limits_C |\upsilon^2| e^{-2i\theta} zdz =$

$= -\dfrac{\rho}{2}\text{Re}\oint\limits_C \bar{\upsilon}^2 zdz$ и окончательно

$$L = -\frac{\rho}{2}\text{Re}\oint\limits_C \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 zdz. \quad (1.25)$$

Это второе интегральное выражение Чаплыгина-Блазиуса.

Следовательно, зная W(z), можно найти и динамический момент L сил давления потока на профиль C – в нашем случае на круговой цилиндр.

Итак, поскольку характеристическая функция для кругового профиля имеет вид:

$W(z) = \upsilon_\infty z + \frac{a^2\upsilon_\infty}{z}$, то, чтобы судить о динамике процесса, надо найти: $\frac{dW(z)}{dz} = \upsilon_\infty - \frac{a^2\upsilon_\infty}{z^2}$;

$$\left(\frac{dW(z)}{dz}\right)^2 = \upsilon^2{}_\infty - \frac{2a^2\upsilon^2{}_\infty}{z^2} + \frac{a^4\upsilon^2{}_\infty}{z^4}$$

и подставить последнее выражение в (1.24) и (1.25).

Вспомним интегральную теорему Коши, в соответствии с которой комплексный контурный интеграл $\oint\limits_C f(z)dz = 0$, если f(z) - аналитическая функция в некоторой области D, где C – замкнутый контур, принадлежащий этой области. Эти условия для нашей задачи выполняются и тогда $\overline{R} = 0$ и L=0.

Иными словами: при обтекании идеальным потоком кругового цилиндра главный аэродинамический вектор и главный момент сил давления жидкости на цилиндр равны нулю. Это означает, что при обтекании идеальным потоком кругового цилиндра – сам цилиндр не оказывает никакого влияния на поток.

Этот принцип называется парадоксом Даламбера: при обтекании идеальным потоком тела реакция между ним и потоком отсутствует. Парадокс Даламбера опровергается при рассмотрении реального вязкого течения с образованием вихрей в пограничном слое вокруг тела, да еще с отрывом слоев вблизи миделевых точек.

Н.Е. Жуковский показал, что если идеальный поток обтекает круговой цилиндр, имеющий вращение, то возникает подъемная сила.

1.4. Математическая модель циркуляционного обтекания кругового цилиндра идеальной жидкостью

Посмотрим, как подошел к этой проблеме Жуковский. Мы видели, что при анализе решения задачи бесциркуляционного обтекания кругового цилиндра у нас появилось такое выражение: $\varphi(r,\theta)=R(r)\cdot\vartheta(\theta)$ и $\frac{\vartheta''}{\vartheta} = -\frac{r^2R''+rR'}{R} = -n^2$ (при $1 \le n \le \infty$). Теперь необходимо рассмотреть решение, когда $0 \le n \le \infty$. В этом случае будут две системы уравнений:

а) при n=0: $\frac{\vartheta''}{\vartheta}=0$ и $r^2R''+rR'=0$. (1.26)

Это означает наличие вихря в начале координат с циркуляцией Г;

б) уравнения, охватывающие случаи $1 \le n \le \infty$, которые были уже рассмотрены при бесциркуляционном обтекании кругового цилиндра.

Поскольку задача линейная, то комплексные потенциалы процессов а) и б) складываются.

Итак, решаем систему уравнений а):

$$\vartheta'(\theta)=C_1;\ \vartheta(\theta)=\int C_1 d\theta + C_2;\ \vartheta(\theta)=C_1\theta + C_2.$$

Далее $R''=-\frac{R'}{r}$. Обозначим R'=p, тогда $p'=-\frac{p}{r}$, или $\frac{dp}{dr}=-\frac{p}{r}$. Разделяя переменные, запишем: $\frac{dp}{p}=-\frac{dr}{r}$. Интегрируя, получим: $\ln p = -\ln r + \ln C_3$, потенциируем : $p=\frac{C_3}{r}$ или $\frac{dR}{dr}=\frac{C_3}{r}$.

Разделим переменные : $dR=\frac{dr}{r}C_3$.

Интегрируя, получим : $R=\ln r \cdot C_3 + C_4$.

Таким образом, $R(r)=\ln r \cdot C_3 + C_4$.

Так как $\varphi(r,\theta)=R(r)\cdot\vartheta(\theta)$, то $\varphi(r,\theta)=(C_1\theta + C_2)(\ln r \cdot C_3 + C_4)$.

Для нахождения констант используем граничное условие на поверхности обтекаемого профиля: при r=a → $\upsilon_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0$.

Найдем $\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\upsilon_r=(C_1\theta + C_2)\frac{1}{r}C_3=0$.

Поскольку $C_1\theta + C_2=\vartheta(\theta)\neq 0, \frac{1}{r}\neq 0$, то отсюда $C_3=0$ и, следовательно, можно записать $\varphi(r,\theta)=(C_1\theta + C_2)C_4$.

Отбрасывая константу $C_2\cdot C_4$, что не меняет физического смысла задачи, получим $\varphi=A\theta$.

Тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=A$, а $\upsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{A}{r}$, откуда $\partial\varphi=\upsilon_\theta r\partial\theta=A\partial\theta$.

Для определения произвольной постоянной интегрирования A найдем циркуляцию Г, равную $\Gamma=\oint_C d\varphi=\oint_C \upsilon_\theta r\partial\theta=\int_0^{2\pi}A\partial\theta=2\pi A$.

Отсюда $A=\frac{\Gamma}{2\pi}$, следовательно, $\varphi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$; $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\Gamma}{2\pi}$. (1.27)

Определим теперь функцию $\psi(r,\theta)$, используя условия Коши-Римана для полярных координат:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2\pi}; \qquad (1.28)$$

$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$, так как $\upsilon_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ при обтекании контура профиля. Интегрируя уравнение (1.28) и опуская константу, имеем

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r. \qquad (1.29)$$

Тогда характеристическая функция с учетом выражений (1.27), (1.29):

$$W(z) = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}(\theta - i\cdot\ln r).$$

Умножим и разделим это выражение на i: $W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln r + i\theta)$. В полярных координатах $z = e^{i\theta}$, тогда $\ln z = \ln r + i\theta$ и

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z. \qquad (1.30)$$

Таким образом, при учете нулевого решения для характеристической функции W, то есть при циркуляционном обтекании кругового цилиндра идеальной жидкостью, имеем (складывая потенциалы):

$$W(z) = \upsilon_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z. \qquad (1.31)$$

Как показывает формула (1.31), для кругового цилиндра циркуляционное обтекание получают наложением вихря с циркуляцией Г на бесциркуляционое обтекание.

Рассмотрим кинематическую картину обтекания. Составим производную: $\frac{dW}{dz} = \upsilon_\infty - \frac{\upsilon_\infty a^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} = \overline{\upsilon}$. (1.32)

Положим величину производной, равной нулю. Это означает, что имеют место критические точки A’ и B’, в которых $\overline{\upsilon} = 0$. Умножив все члены (1.32) на z^2/υ_∞, получим квадратное уравнение:

$$z^2 - \frac{i\Gamma}{2\pi\upsilon_\infty}z - a^2 = 0.$$

Здесь также освободились от мнимости в знаменателе во втором слагаемом. Решение этого уравнения имеет вид.

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty}\right)^2} = 0.$$

Это решение указывает на три возможных типа обтекания кругового цилиндра радиуса a в зависимости от величины циркуляции. Направление потока, как правило, совпадет с положительным направлением оси Ox.

1. Когда циркуляция мала: $|\Gamma| < 4\pi a \upsilon_\infty$, то есть $\frac{|\Gamma|}{4\pi\upsilon_\infty} < a$. В этом случае корни уравнения комплексные:

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty}\right)^2} + \frac{i\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty},$$

имеют общую ординату $\frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty}$ и отличаются лишь знаками абсцисс по модулю, меньших а. Модуль каждого из корней равен а, то есть они расположены на окружности радиуса а. Картина обтекания и положение критических точек показаны на рис. 7. Критическими точками будут не А и В (как при бесциркуляционном обтекании), а А' и В'. При уменьшении Г до нуля критические точки будут перемещаться: А' → А, В' →В, стремясь занять положение на пересечении окружности с осью ОХ, как это и должно быть при Г=0 (для справки – циркуляция положительная при направлении вращения против часовой стрелки).

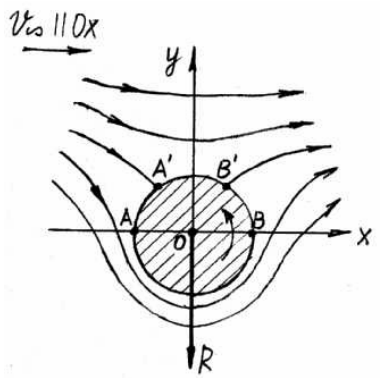


Рис. 7

2. Промежуточный случай, когда: $|\Gamma| = 4\pi a \upsilon_\infty$, то есть $\frac{|\Gamma|}{4\pi\upsilon_\infty} = a$. В этом случае корни z_1 и z_2 равны между собой. Модуль их равен а, критические точки совпадают (рис. 8) и находятся на мнимой оси в точке $z_1 = z_2 = ai$.

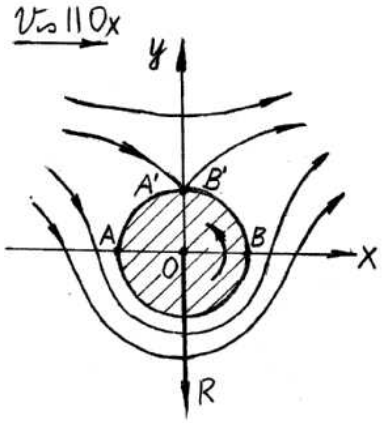


Рис. 8

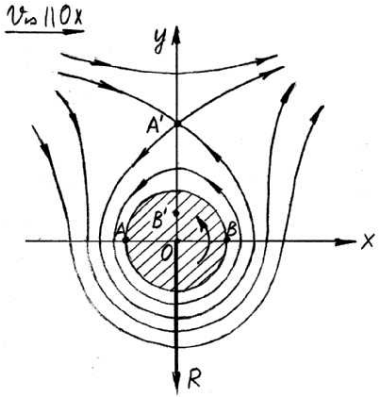


Рис. 9

3. Когда циркуляция велика: $\Gamma| > 4\pi a\upsilon_\infty$, то есть $\frac{|\Gamma|}{4\pi\upsilon_\infty} > a$. В этом случае в выражении для z под знаком радикала будет стоять отрицательная величина и можно записать:

$$z = \left(\frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty}\right)^2 - a^2} \right) i.$$

Оба корня квадратного уравнения мнимые, причем модуль одного больше радиуса цилиндра, другого - меньше. В самом деле, корень z_1 имеет модуль (при $\Gamma>0$):

$$|z_1| = \frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty}\right)^2 - a^2} > \frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty} > a.$$

Второй корень имеет модуль:

$$|z_2| = \frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi\upsilon_\infty}\right)^2 - a^2} = \frac{a^2}{\Gamma/4\pi\upsilon_\infty + \sqrt{(\Gamma/4\pi\upsilon_\infty)^2 - a^2}}.$$

Это выражение получают, умножив и разделив формулу для $|Z_2|$ на член, стоящий в знаменателе выражения. Заменим в знаменателе последнего выражения $\Gamma/4\pi\upsilon_\infty$ на меньшую величину a, тем самым как бы увеличивается $|Z_2|$ и тогда получим: $|z_2| = \frac{a^2}{a} = a$, то есть на самом деле $|z_2| < a$.

Таким образом, первый корень дает критическую точку A’, лежащую вне круга на положительной стороне мнимой оси (рис. 9), второй корень – критическую точку B, лежащую на той же оси, но внутри круга.

Как видно, при циркуляционном обтекании кругового цилиндра сохраняется симметрия только относительно оси OY и нарушается относительно оси OX. В связи с этим главный вектор сил давления жидкости на поверхность цилиндра будет отличен от нуля и направлен вдоль оси OY. Заметим, что в слоях жидкости под цилиндром скорости бесциркуляционного обтекания цилиндра и чисто циркуляционного потока вокруг цилиндра складываются (направлены в одну сторону), а под цилиндром - вычитаются (т.к. направлены в разные стороны). При этом под цилиндром скорости получаются большие, а давления, согласно уравнению Бернулли, меньшие. Над цилиндром, наоборот, скорости меньшие, а давления большие. Это приводит к тому, что в указанном на рис. 9 обтекании главный вектор сил давления R жидкости на цилиндр будет направлен по оси OY в отрицательную сторону (вниз).

При циркуляционном течении по часовой стрелке (Г<0) картина обтекания при том же расположении осей координат изменяется на перевернутую вокруг оси ОХ на 180^0, и главный вектор сил давления окажется направленным по оси ОУ в положительную сторону, то есть вверх (т.к. тогда скорости сложатся над цилиндром и давления над ним станут меньшими по сравнению с давлениями под цилиндром). Можно дать простое правило определения направления главного вектора сил давления жидкости на поверхность цилиндра: поместив начало вектора скорости $\overline{\upsilon}_\infty$ в центр цилиндра 0, повернуть его на 90^0 в сторону, противоположную направлению циркуляционного движения – это и даст направление главного вектора R.

Теперь необходимо вычислить величину R:

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = \left(\upsilon_\infty - \frac{\upsilon_\infty a^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}\right)^2.$$

Подставим это выражение в первое интегральное выражение Чаплыгина-Блазиуса:

$$\overline{R} = \frac{i\rho}{2}\oint_C \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz.$$

Опуская промежуточные выкладки, получаем формулу Жуковского:

$$\overline{R} = i\rho\upsilon_\infty\Gamma. \qquad (1.33)$$

1.5. Теорема Жуковского о подъемной силе крыла

Поскольку $\overline{R} = R_x - iR_y$, а $R_x = 0$ (из условия симметрии картины обтекания кругового цилиндра относительно оси ОУ), то $\overline{R} = -iR_y$. Аналогично, т.к. $R = R_x + iR_y$, то при $R_x = 0 \to R = iR_y$.

Из этих формул очевидно, что

$$R = -i\rho\upsilon_\infty\Gamma. \qquad (1.34)$$

Таким образом, векторы R и $\overline{R}$ по модулю одинаковы, но противоположны по направлению. Для нашего случая обтекания цилиндра потоком с положительной циркуляцией вектор R равен по модулю $|R| = \rho\upsilon_\infty\Gamma$ и направлен вниз по оси ОУ, что совпадает с физическим объяснением направления главного вектора сил давления R, приведенного на рис. 9. Необходимо отметить, что главный момент сил давления L=0.

Полученное выражение (1.34) определяет общую теорему Жуковского о подъемной силе крыла в безвихревом плоскопараллельном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

В этой формуле говорится о том, что при циркуляционном обтекании возникает поперечная сила, равная произведению плотности жидкости на скорость набегающего потока и на циркуляцию.

Для нашего случая теорема Жуковского формулируется следующим образом:

При безотрывном обтекании кругового цилиндра поступательным потоком при наличии циркуляции возникает подъемная сила, равная произведению плотности жидкости на скорость и циркуляцию, направление которой определяется поворотом вектора скорости потока υ_∞ *в т. 0 на прямой угол в сторону, противоположную направлению циркуляции.*

Необходимо отметить, что подъемная сила возникает только при наличии вращения цилиндра (то есть при наличии циркуляции), когда критические точки А и В стягиваются к одной половине окружности, образуя несимметричный профиль, а обтекание любого несимметричного профиля приводит к возникновению подъемной силы. При вращении цилиндра, например по часовой стрелке, точки А и В переходят в А’ и В’, верхняя дужка становится больше нижней, и в силу неразрывности (сплошности) среды скорость обтекания верхней дужки будет больше, чем нижней, а давление меньше, и образуется вектор R, идущий из центра 0 в сторону, противоположную направлению циркуляции, то есть вверх.

В своей теореме Н.Е. Жуковский впервые установил вихревую природу сил, действующих со стороны потока на крыло, и указал на наличие простой зависимости между этой силой и циркуляцией вектора скорости по контуру, охватывающему обтекаемое крыло.

Физическая природа возникновения циркуляции связана с наличием в жидкости трения (вязкости). Частицы реальной жидкости, проходящие в непосредственной близости к поверхности профиля, образуют тонкий пограничный слой. В этой области движение жидкости будет вихревым, причем интенсивность вихрей может достигать больших значений, т.к. скорость частиц в пограничном слое резко меняется от нуля на поверхности обтекаемого тела до величины порядка скорости υ_∞ на внешней границе пограничного слоя. Так, например, на крыле самолета максимальная толщина пограничного слоя не превосходит нескольких сантиметров, в то время как разность скоростей на поверхности крыла и на внешней границе пограничного слоя достигает сотен метров в секунду. При таких значительных неоднородностях скоростного поля суммарная интенсивность вихрей в пограничном слое, а тем самым и циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру, охватывающему крыло, может достигать больших значений.

Теория идеальной жидкости, не учитывающая наличия трения, естественно, не могла объяснить возникновения вихрей в набегающем на тело безвихревом потоке. Для того чтобы, оставаясь в рамках теории идеального бехвихревого потока, определить величину воздействия потока на помещенное в него тело, Жуковский предполагает, что происходит движение с особенностью – вихрем, имеющим интенсивность, равную сумме интенсивностей вихрей, которые образовались бы на самом деле в тонком слое

на поверхности тела при обтекании его реальной жидкостью. Такой вихрь Н.Е. Жуковский назвал присоединенным. Интенсивность присоединенного вихра, или, что то же самое, циркуляцию вектора скорости по контуру, охватывающему крыловой профиль, можно вычислить при помощи теории движения реальной жидкости в пограничном слое.

Существенным является тот факт, что единственной силой, действующей на профиль в плоскопараллельном безвихревом потоке идеальной несжимаемой жидкости, является перпендикулярная к направлению набегающего потока или в обращенном движении поперечная к направлению движения профиля сила, которая может быть названа подъёмной или поддерживающей силой, т.к. именно эта сила обеспечивает подъём самолета в воздух и поддерживает его крыло при горизонтальном полете.

Введем коэффициент подъёмной силы как отношение величины подъёмной силы |R| к скоростному напору набегающего потока $\frac{1}{2}\rho|\upsilon_\infty|^2$ и длине хорды b. Обычно ось OX направляют по скорости v_∞; тогда подъёмная сила будет направлена по оси OY и может быть обозначена через R_y. Вот почему коэффициент подъёмной силы принято обозначать через C_y, а коэффициент сопротивления – через C_x. При этом обозначении будем иметь:

$$C_y = \frac{|R|}{\frac{1}{2}\rho|\upsilon_\infty|^2 b}.$$

1.6. Математическая модель обтекания крылового профиля по методу конформных отображений

Полученное выше общее решение задачи об обтекании поступательным потоком кругового цилиндра позволяет решить задачу об обтекании произвольного контура, если только известно конформное отображение внешности этого контура на внешность круга.

Рассмотрим приложение метода конформных отображений к решению прямой задачи обтекания крыловых профилей. Под крыловым профилем (рис. 10) понимают плавный, вытянутый в направлении набегающего на него потока, замкнутый и самопересекающийся геометрический контур с закругленной передней кромкой и заостренной задней кромкой. Отрезок прямой, соединяющей некоторую точку передней кромки с вершиной угла на задней кромке, называют хордой крылового профиля, а длину хорды – длиной профиля, максимальную толщину профиля в направлении, перпендикулярном к хорде, называют толщиной профиля, а отношение толщины

к длине – относительной толщиной крылового профиля. Угол, образованный вектором скорости набегающего потока вдалеке от профиля (вектором скорости «на бесконечности») и направлением хорды, носит наименование угла атаки.

Подъемную силу крыла с достаточной степенью точности можно рассматривать как силу, происходящую от давлений, проложенных к поверхности крыла (составляющая подъёмной силы от касательных напряжений пренебрежительно мала). Как показывают опыты, типичная картина распределения давления имеет вид, представленный на рис. 10, *а*.

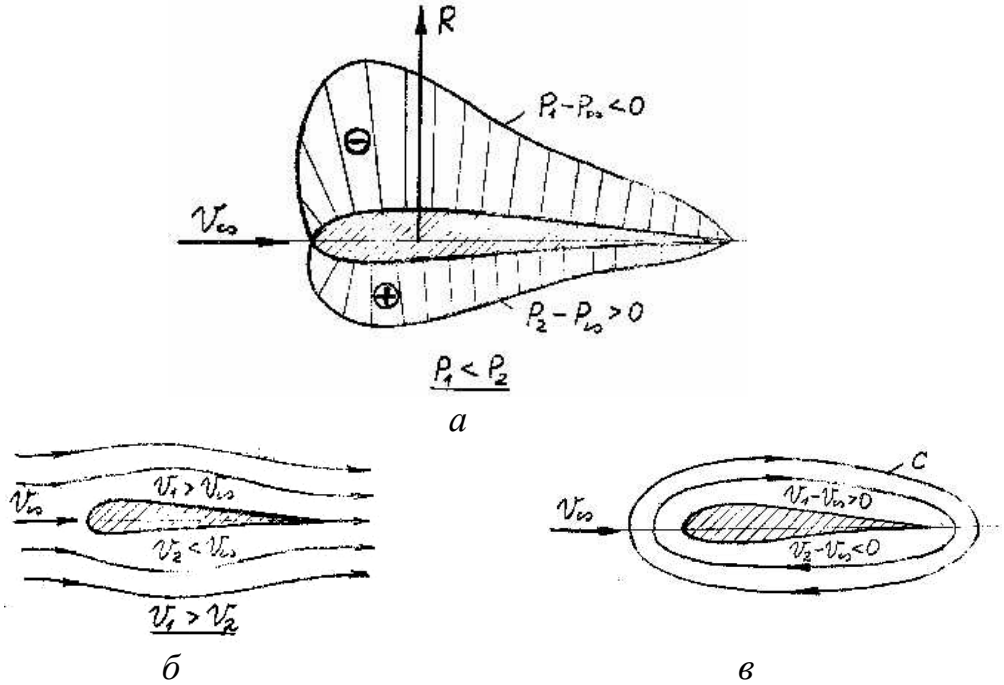


Рис. 10

Видно, что на нижней дужке крылового профиля местное давление p_2 больше атмосферного давления p_∞ $(p_2 - p_\infty > 0)$, на верхней дужке местное давление p_1 меньше атмосферного $(p_1 - p_\infty < 0)$, то есть наблюдается разрежение. Можно отметить также, что абсолютные величины подсасывания на верхней дужке крылового профиля значительно больше величины давлений на нижней дужке, следовательно, подъёмная сила профиля образуется главным образом за счет разрежения на верхней его дужке. О кинематической картине обтекания профиля можно судить по эпюре распределения давления. Применим уравнение Бернулли $p + \frac{\rho\upsilon^2}{2} = \text{const}$ к двум струйкам; одной, идущей из бесконечности и обтекающей нижнюю дужку крылового профиля (рис. 10,*б*), и другой, идущей тоже из бесконечности и обтекающей верхнюю дужку. Тогда получим, что на нижней дужке, где давление p_2 будет больше давления на бесконечности p_∞ (атмосферного), скорость υ_2 меньше скорости потока на бесконечности υ_∞; а на верхней дужке, где $p_1 < p_\infty$, скорость υ_1 будет больше υ_∞. Аналогичные заключе-

ния можно сделать и по поводу других струек, близких к рассмотренным. Таким образом, наличие крыла в поступательном потоке изменяет его поле скоростей, уменьшая скорости под крылом и увеличивая над ним. Чтобы выяснить, какой именно поток создается в жидкости вследствие наличия крыла, вычтем (геометрически) из поля скоростей потока, обтекающего крыло, поле скоростей поступательного потока υ_∞. В результате вычитания получим поток, скорости которого в области под крылом направлены в сторону, противоположную υ_∞ (т.к. $\upsilon_2 < \upsilon_\infty$), а в области над крылом – в ту же сторону, что υ_∞ (т.к. $\upsilon_1 > \upsilon_\infty$). Так как влияние крыла – местное, то есть убывает по мере удаления от крыла и равно нулю на бесконечности, то линии тока этого потока не уходят в бесконечность. Такой поток с замкнутыми линиями тока вокруг крылового профиля (рис.10,*в*) называется циркуляционным потоком. В действительности этот поток (в силу вязкости) происходит от вращения частиц в непосредственной близости к крылу (в пограничном слое), и его можно рассматривать как результирующий поток множества плоских вихрей, расположенных по поверхности крыла. Очевидно, что работа вектора скорости по замкнутому контуру С определится как контурный интеграл:

$$\Gamma = \oint_C \vec{\upsilon} \cdot d\vec{r} = \oint_C \upsilon_r dr = \oint_C \upsilon_x dx + \oint_C \upsilon_y dy,$$

где $d\vec{r}$ - элемент контура С, υ_r - проекция скорости на направление элемента $d\vec{r}$. Определенная таким образом величина Г и есть циркуляция вектора скорости по замкнутому контуру.

Таким образом, поток у крыла можно представить себе как результат суммирования двух потоков: поступательного со скоростью υ_∞ и циркуляционного потока со скоростью $|\upsilon - \upsilon_\infty|$.

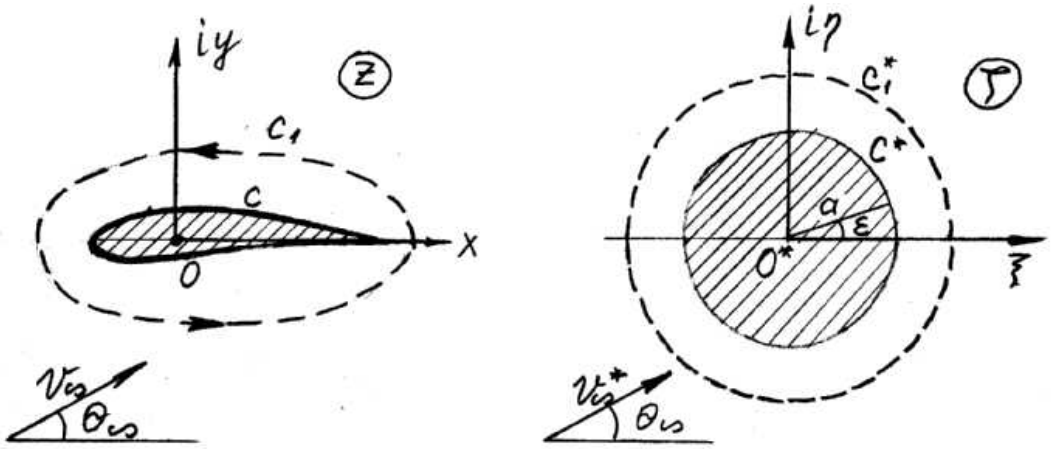
На практике при вычислении циркуляции нет надобности всякий раз вычитать из потока υ, обтекающего крыло, поступательный поток υ_∞ (как это было сделано для разъяснения появления циркуляции вокруг крылового профиля), потому что поступательный поток сам по себе не изменяет величины циркуляции вектора скорости, для него Г=0 по любому контуру. Поэтому берут в потоке, обтекающем крыло, произвольный замкнутый контур С, охватывающей профиль и вычисляют циркуляцию вектора скорости по этому контуру:

$$\Gamma = \oint_C \vec{\upsilon} \cdot d\vec{r} = \oint_C \upsilon_r dr.$$

Величина циркуляции будет такая же, как и при вычитании поступательного потока. При вычислении контурного интеграла за положительное направление обхода контура обычно принимают такое направление, чтобы при обходе по контуру ограничиваемая им область все время оставалась по левую сторону. Обычные представления положительного направления

вращения (например, против хода часовой стрелки) здесь непригодны, т.к. для контуров сложной формы они давали бы противоречивые указания.

Перейдем к математической постановке задачи обтекания крылового профиля плоским, однородным на бесконечности, безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости.



а *б*

Рис. 11

Набегающий поток зададим комплексным вектором скорости υ_∞, образующим в общем случае с осью Ox угол θ_∞. Физическая плоскость z имеет заштрихованный вырез (рис. 11,*а*), что делает ее двухсвязной, для определенности задачи необходимо задать наперед циркуляцию вектора скорости Г по произвольному, охватывающему профиль, контуру C_1.

Пусть функция комплексного переменного $z = f(\zeta)$ представляет собой преобразующую (или отображающую) функцию, осуществляющую конформное отображение внешней по отношению к ограниченной контуром C (заштрихованной) области плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ на внешнюю по отношению к заштрихованному кругу C* с радиусом a и центром в начале координат системы $O^*\xi\eta$ часть вспомогательной плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Наложим на отображенную функцию $z = f(\zeta)$ дополнительные условия:

а) чтобы бесконечно удаленная точка $z = \infty$ переходила при отображении в бесконечно удаленную точку $\zeta = \infty$;

б) чтобы направление скорости на бесконечности υ_∞ при переходе из плоскости z в плоскость ζ сохранялось. Тогда, как доказывается в теории функций комплексного переменного (теорема Римана), при выполнении этих условий преобразование $z = f(\zeta)$ является единственным.

Пусть $W(z)$ – искомый комплексный потенциал течения в физической плоскости, а $W^*(\zeta)$ – комплексный потенциал течения во вспомога-

тельной плоскости, а именно комплексный потенциал циркуляционного обтекания кругового цилиндра (он считается заданным). Тогда

$$W(z) = \upsilon_\infty z + \upsilon_\infty \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z;$$

$$W^*(\zeta) = \upsilon_\infty^* \zeta + \upsilon_\infty^* \frac{a^2}{\zeta} + \frac{\Gamma^*}{2\pi i}\ln \zeta;$$

где υ_∞^* и Γ^* – соответственно скорость на бесконечности и циркуляция вектора скорости по произвольному контуру C_1^*, охватывающему C^* во вспомогательной плоскости ζ. Если известна функция, отображающая внешнюю область кругового цилиндра в плоскости ζ на внешнюю область профиля в плоскости z, то есть дана зависимость: $z = f(\zeta)$, то можно записать:

$$W(z) = w[f(\zeta)] = w^*(\zeta).$$

Взяв производную по ζ от обеих частей этого равенства, получим:

$$\frac{dW^*}{d\zeta} = \frac{dW}{dz}\cdot\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dW}{dz}\cdot f'(\zeta).$$

Поскольку $\frac{dW}{dz} = \overline{\upsilon}$, а $\frac{dW^*}{d\zeta} = \overline{\upsilon}^*$, то $\overline{\upsilon}^* = \overline{\upsilon}\cdot f'(\zeta)$, и в бесконечно удаленных точках: $\overline{\upsilon}_\infty^* = m_\infty \overline{\upsilon}_\infty$, где $m_\infty = f'(\infty)$.

По принятому ранее условию направление вектора скорости на бесконечности υ_∞ при конформном отображении сохраняется, т.е. векторы υ_∞^* и υ_∞ параллельны друг другу. Отсюда следует параллельность и сопряженных векторов $\overline{\upsilon}_\infty^*$ и $\overline{\upsilon}_\infty$, а поскольку m_∞ - действительная величина (будем считать ее для определенности положительной), то $\upsilon_\infty^* = m_\infty \upsilon_\infty$.

Рассмотрим теперь циркуляцию Γ^*. Учитывая, что $\mathrm{Re}\oint \overline{\upsilon} dz = \Gamma$, представим Γ^* как действительную часть интеграла:

$$\Gamma^* = \mathrm{Re}\oint_{C_1^*} \overline{\upsilon}^* d\zeta = \mathrm{Re}\oint_{C_1^*} \overline{\upsilon}\frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \mathrm{Re}\oint_{C_1^*} \overline{\upsilon} dz = \Gamma.$$

Видно, что циркуляция вектора скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый профиль, при конформном отображении сохраняет свое значение.

Приведенные рассуждения позволили выразить неизвестные величины υ_∞^* и Γ^* через заданные величины υ_∞, Γ и коэффициент $m_\infty = f'(\infty) = \frac{dz}{d\zeta}$. Следовательно, будем иметь окончательное выражение

комплексного потенциала W в плоскости течения в виде параметрической зависимости от параметра ζ:

$$W(z) = W^*(\zeta) = m_\infty\left(\upsilon_\infty\zeta + \frac{\upsilon_\infty a^2}{\zeta}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta,$$

где $z = f(\zeta)$; $\upsilon_\infty^* = m_\infty\upsilon_\infty$; $\Gamma^*=\Gamma$.

Таким образом, если известно решение геометрической задачи $z = f(\zeta)$ о конформном отображении внешней по отношению к обтекаемому контуру C области физической плоскости z на внешнюю по отношению к кругу C* произвольного радиуса a область вспомогательной плоскости ζ, то решение гидродинамической задачи об определении комплексного потенциала W(z) уже не составит труда.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

В этом разделе рассмотрим вначале основы математического моделирования одномерных движений идеального газа. С этой целью выведем изоэнтропийные соотношения для идеального газа, которые применим при создании математической модели течения газа по соплу Лаваля. Затем рассмотрим математическое моделирование плоских безвихревых движений идеального сжимаемого газа, на основе которого разработаем математические модели дозвукового и сверхзвукового обтеканий тонких профилей потоком идеального сжимаемого газа.

Если вдоль линии тока или траектории движения (при стационарных процессах) энтропия S сохраняет свою величину, то такое движение называется изоэнтропийным. Адиабатический обратимый процесс, у которого $dq = 0$ или $dS = \frac{dq}{T} = 0$, является изоэнтропийным процессом. Введем понятие скорости звука a при изоэнтропийном движении идеального сжимаемого газа. Из вывода волнового уравнения в курсе математической физики местная скорость звука $a = \sqrt{dp/d\rho}$. Используем уравнение адиабатического процесса (адиабата Пуассона)

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \tag{2.1}$$

где k – показатель адиабаты. Найдем $p = \rho^k \text{const}$; $dp = k\rho^{k-1} d\rho \cdot \text{const}$, откуда $\frac{dp}{d\rho} = k\rho^{k-1}\text{const}$. Взяв константу из (2.1) $\text{const} = \frac{p[}{\rho^k}$ и подставив в последнее уравнение, получим $\frac{dp}{d\rho} = k\frac{p}{\rho}$. Если использовать уравнение Клапейрона $\frac{p}{\rho} = RT$ (R – универсальная газовая постоянная), то $\frac{dp}{d\rho} = kRT$. С учетом этих соотношений

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \tag{2.2}$$

Впервые эта формула была получена Лапласом и носит название лапласовой скорости звука $a_\Lambda = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$, в отличие от ньютоновой скорости звука $a_Н = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$, выведенной Ньютоном из условия изотермического распространения звука. В самом деле, при изотермическом процессе при

T=const из уравнения Клапейрона следует: $\frac{p}{\rho} = const$, тогда $dp = d\rho \cdot const$, откуда $\frac{dp}{d\rho} = const = \frac{p}{\rho}$ и, следовательно, $a_н = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$.

Спор при жизни этих великих ученых так и не был разрешён, и лишь в дальнейшем проведенные точные эксперименты по измерению скорости распространения звука в различных телах подтвердили правильность формулы Лапласа, а, следовательно, и его утверждения, что процесс распространения звука в средах является адиабатическим, и для него $a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$.

2.1. Изоэнтропийные соотношения для идеального газа

Интеграл Бернулли уравнения энергии для единицы массы газа:

$$h + \Pi + \frac{\upsilon^2}{2} = const, \qquad (2.3)$$

где h – энтальпия (или полное теплосодержание), П – потенциал массовых сил.

При пренебрежении массовыми силами (П=0) получим: $h + \frac{\upsilon^2}{2} = const$. Записав выражение для нулевых условий, получим

$$h + \frac{\upsilon^2}{2} = h_0 + \frac{\upsilon_0{}^2}{2}.$$

Здесь индекс «0» соответствует скорости потока υ_0=0, т.е. скорости заторможенного потока.

Тогда $$h_0 = h + \frac{\upsilon^2}{2} = const. \qquad (2.4)$$

В этом случае уравнение (2.4) определяет энтальпию адиабатически заторможенного потока. Далее все параметры без индекса будем называть статическими параметрами, а параметры с индексом «0» - параметрами торможения или заторможенными параметрами.

Поскольку $h = C_p T$, $h_0 = C_p T_0$, где C_p - теплоёмкость при постоянном давлении, которую будем считать постоянной при движении газа, то с учётом (2.4):

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{\upsilon^2}{2}.$$

Из этого соотношения можно найти температуру адиабатически заторможенного потока или температуру торможения:

$$T_0 = T\left(1 + \frac{\upsilon^2}{2C_pT}\right). \qquad (2.5)$$

Преобразуем выражение C_pT следующим образом: $h = C_pT = \frac{C_p}{R}RT$.

Используя далее соотношение Майера $C_p - C_v = R$ и выражение для отношения теплоёмкостей $\frac{C_p}{C_v} = k$ (C_v – теплоёмкость при постоянном объёме), получим:

$$\frac{C_p}{R}RT = \frac{C_p}{C_p - C_v}RT = \frac{C_p/C_v}{C_p/C_v - 1}RT = \frac{k}{k-1}RT = \frac{a^2}{k-1}.$$

Таким образом:

$$\left.\begin{aligned} h = C_pT = \frac{a^2}{k-1}; \\ h_0 = C_pT_0 = \frac{a_0{}^2}{k-1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Подставляя выражение для C_pT в уравнение (2.5), получим: $T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}\frac{\upsilon^2}{a^2}\right)$

Используя формулу для числа Маха $M = \frac{\upsilon}{a}$, получим

$$T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right). \qquad (2.7)$$

Подставив выражения (2.6) в уравнение (2.4), приходим к уравнению энергии для адиабатического процесса движения идеального сжимаемого газа при отсутствии массовых сил:

$$\frac{a_0{}^2}{k-1} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{\upsilon^2}{2} = \text{const}. \qquad (2.8)$$

Из уравнения (2.7) получим первое изоэнтропийное соотношение:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2. \qquad (2.9)$$

Российский ученый С.А. Чаплыгин использовал в своих вычислениях скоростной коэффициент λ, названный коэффициентом Чаплыгина: $\lambda = \frac{\upsilon}{a^*}$, где a^* – критическая скорость потока, равная скорости звука, то есть $a^* = a = \upsilon$. В этом случае число Маха M=1, и местная скорость звука

становится равной критической. Такой режим течения газа, когда его скорость достигает скорости звука, называется критическим.

Определим в уравнении энергии (2.8) константу из условия критического режима движения газа, подставив в (2.8) вместо а и $\upsilon \to a^*$. Тогда получим:

$$\frac{\upsilon^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{a^{*2}}{2}+\frac{a^{*2}}{k-1}=\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}.$$

Разделим обе части равенства на υ^2:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{k-1}\frac{1}{M^2}=\frac{k+1}{2(k-1)}\frac{1}{\lambda^2}.$$

Умножим обе части равенства на $\frac{2(k-1)}{(k+1)}$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\frac{1}{M^2}.$$

Получим связь между скоростным коэффициентом λ и числом Маха М, легко разрешимую относительно λ и М.

Решим, например, это уравнение относительно λ:

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{(k-1)M^2+2}{(k+1)M^2}; \qquad \lambda^2=\frac{(k+1)M^2}{2+(k-1)M^2} \quad \text{или}$$

$$\lambda^2=\frac{\frac{k+1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}=\frac{k+1}{2}\cdot\frac{M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}.$$

Тогда скоростной коэффициент Чаплыгина

$$\lambda=\sqrt{\frac{k+1}{2}}\cdot\frac{M}{\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M^2}}. \qquad (2.10)$$

Обратное соотношение, т.е. выражение для числа Маха

$$M=\sqrt{\frac{2}{k+1}}\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}. \qquad (2.11)$$

Если М=0, то и λ=0; если же $M\to\infty$, то $\lambda\to\lambda_{max}=\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$.

Из соотношений для М и λ можно получить и другую связь между ними. Разделим обе части выражения (2.10) на λ, (2.11) – на М. Тогда получим:

$$1=\sqrt{\frac{k+1}{2}}\cdot\frac{\frac{M}{\lambda}}{\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M^2}}$$

и $$1=\sqrt{\frac{2}{k+1}}\cdot\frac{\frac{\lambda}{M}}{\sqrt{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}.$$

Поскольку эти выражения равны между собой, то очевидно, что

$$\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}},$$

и окончательно получаем связь между M и λ в виде:

$$1+\frac{k-1}{2}M^2=\frac{1}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}. \qquad (2.12)$$

Для получения второго изоэнтропийного соотношения используем уравнение энергии (2.8) в виде:

$$\frac{a^2}{k-1}+\frac{\upsilon^2}{2}=\frac{a_0{}^2}{k-1}. \qquad (2.13)$$

Умножив обе части этого равенства на $\frac{k-1}{a^2}$, получим:

$$\frac{a_0}{a}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{1/2}. \qquad (2.14)$$

Здесь a_0 – скорость звука заторможенного потока (при $\upsilon_0=0$); a – местная скорость звука.

Формула (2.14) и является вторым изоэнтропийным соотношением.

Далее, учитывая первое изоэнтропийное соотношение (2.7) и уравнение адиабатического процесса в виде $\frac{T}{p^{\frac{k-1}{k}}}=\text{const}$, получим:

$$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (2.15)$$

Это третье изоэнтропийное соотношение.

Учитывая первое изоэнтропийное соотношение (2.7) и уравнение адиабатического процесса в виде $\frac{T}{\rho^{k-1}}=\text{const}$, получим:

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (2.16)$$

Это четвёртое изоэнтропийное соотношение.

Сравнивая (2.14) и (2.15), получим: $\frac{p_0}{p}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k$, т.е. адиабату Пуассона.

Наконец, $$\frac{\upsilon}{a_0}=\frac{\upsilon\cdot a}{a_0\cdot a}=M\cdot\frac{a}{a_0}=M\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1/2}. \qquad (2.17)$$

Все полученные уравнения являются первой формой изоэнтропийных соотношений. Они выражают **параметрическую** связь между T, P, ρ, υ при помощи **параметра M**.

Эта же первая форма изэнтропийных соотношений может быть получена в виде уравнений **параметрической связи** между T, P, ρ и υ при помощи **параметра** λ, если учесть уравнение (2.12) в виде:

$$\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right).$$

Тогда получим следующие соотношения:

$$\frac{T}{T_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right);$$

$$\frac{a}{a_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{1/2};$$

$$\frac{p}{p_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}};$$

$$\frac{\upsilon}{a_0}=\frac{\upsilon}{a^*}\cdot\frac{a^*}{a_0}=\lambda\cdot\sqrt{\frac{2}{k+1}}.$$

Последнее соотношение использует выражение для a^*/a_0, которое получается из уравнения энергии (2.13) для критического режима, когда $a=\upsilon=a^*$. В этом случае получим: $\frac{a^{*2}}{k-1}+\frac{a^{*2}}{2}=\frac{a_0^{\,2}}{k-1}$ или $\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}=\frac{a_0^{\,2}}{k-1}$. Тогда $\frac{k+1}{2}a^{*2}=a_0^{\,2}$ и $\frac{a^{*2}}{a_0^{\,2}}=\frac{2}{k+1}$.

Окончательно $$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}\,. \qquad (2.18)$$

Здесь и далее параметры с индексом * – это критические параметры.

Далее, вводя вместо местных значений параметров критические, получим следующие соотношения:

Так как $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2$ - из первого и второго изоэнтропических соотношений, то

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}. \qquad (2.19)$$

Так как $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{P}{P_0}$ – из первого и третьего изоэнтропических соотношений, то

$$\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (2.20)$$

Так как $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{\rho}{\rho_0}$ – из первого и четвёртого изоэнтропических соотношений, то

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (2.21)$$

Из (2.18) видно, что $\frac{a^*}{a_0} < 1$, т.к. k>1 и, следовательно, $a^* < a_0$, т.е. критическая скорость меньше скорости звука в неподвижной среде.

Составив изоэнтропические соотношения для каких-нибудь двух точек одного и того же потока с числами M_1 и M_2 или λ_1 и λ_2, или для точек двух потоков, но с одинаковыми параметрами заторможенного газа, и разделив соответствующие соотношения почленно друг на друга, получим следующие уравнения:

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^{\,2}}{1+\frac{k-1}{2}M_1^{\,2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^{\,2}}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^{\,2}}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (2.22)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^{\,2}}{1+\frac{k-1}{2}M_1^{\,2}} = \frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^{\,2}}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^{\,2}}; \qquad (2.23)$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^{\,2}}{1+\frac{k-1}{2}M_1^{\,2}}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^{\,2}}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^{\,2}}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \qquad (2.24)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^{\,2}}{1+\frac{k-1}{2}M_1^{\,2}}\right)^{\frac{1}{k-1}}=\left(\frac{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^{\,2}}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_2^{\,2}}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \qquad (2.25)$$

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=\frac{\upsilon_1}{a_0^*}\cdot\frac{a_0^*}{\upsilon_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{M_1}{M_2}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^{\,2}}{1+\frac{k-1}{2}M_1^{\,2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.26)$$

Выражения (2.22) - (2.26) являются изоэнтропийными соотношениями во второй форме.

2.2. Математическая модель движения газа по соплу Лаваля

Для решения задачи используется следующая система уравнений:

а) интеграл Бернулли уравнения движения, который при отсутствии массовых сил запишется как $\int\limits_{P_0}^{P}\frac{dp}{\rho}+\frac{\upsilon^2}{2}=\text{const}$;

б) уравнение расхода газа через сопло, которое для стационарного режима запишется в виде $\rho\upsilon A=\text{const}$, где A – площадь поперечного сечения сопла;

в) уравнение адиабатического процесса $\frac{p}{\rho^k}=\text{const}$.

Преобразуем исходную систему уравнений. Продифференцируем первое уравнение: $\frac{dp}{\rho}+\upsilon d\upsilon=0$; $\upsilon d\upsilon=-\frac{dp}{\rho}=-\frac{dp}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{\rho}=-a^2\frac{dp}{\rho}$;

$$\frac{dp}{\rho}=-\frac{\upsilon}{a_2}d\upsilon. \qquad (2.27)$$

Прологарифмируем и продифференцируем второе уравнение:

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{d\upsilon}{\upsilon}+\frac{dA}{A}=0. \qquad (2.28)$$

Подставим уравнение (2.27) в (2.28): $\frac{d\upsilon}{\upsilon} - \frac{\upsilon}{a^2} d\upsilon = -\frac{dA}{A}$; $\left(1 - \frac{\upsilon^2}{a^2}\right)\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{dA}{A}$; $\left(M^2 - 1\right)\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{dA}{A}$. И окончательно:

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{1}{M^2 - 1}\frac{dA}{A}. \qquad (2.29)$$

Это уравнение носит имя Гюгонио.

Рассмотрим три случая движений, вытекающие из уравнения Гюгонио:

1. Дозвуковая область движения, M<1; знак $d\upsilon$ противоположен знаку dA. В этом случае для увеличения скорости движения газа требуется уменьшение площади поперечного сечения сопла A. Это конфузорное или суживающееся сопло.
2. Сверхзвуковая область движения, M>1; знак $d\upsilon$ одинаков со знаком dA. В этом случае для увеличения скорости движения газа требуется увеличение A. Это диффузорное или расширяющееся сопло.
3. M=1, $dA = 0$. В этом случае соответствующее сечение сопла будет критическим (минимальным).

С учетом вышесказанного сопло Лаваля выполняется из двух сопел: суживающегося, вплоть до критического сечения, а затем переходящего в расширяющееся. В таком сопле газ может разгоняться до высоких сверхзвуковых скоростей. Необходимо отметить, что полученные результаты справедливы только для стационарного движения. Для нестационарного течения газа можно даже в цилиндрическом канале получить сверхзвуковую скорость, – например, при выстреле из ружья или пушки с цилиндрическим стволом можно разогнать газ до чисел M, равных десяти. В условиях же стационарного течения разогнать газ до сверхзвуковых скоростей можно только в сопле Лаваля, состоящим из конфузорной и диффузорной частей (рис. 12).

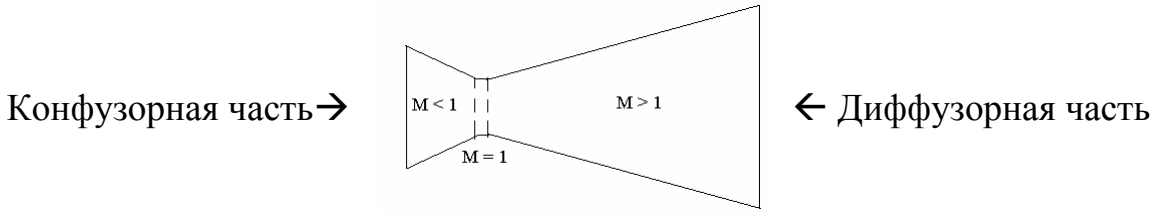


Рис. 12

Теперь получим параметрическую систему уравнений для определения характеристик течения идеального газа и профиля сопла Лаваля на основе изоэнтропийных соотношений.

Уравнение неразрывности $\rho\upsilon A = const$ запишем в виде: $\rho\upsilon A = \rho^*\upsilon^* A^*$, где «*» относится к критическим параметрам в минимальном сечении сопла. Тогда: $\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*\upsilon^*}{\rho\upsilon} = \frac{\rho^*\upsilon^* a^* a}{\rho\upsilon a^* a} = \frac{\rho^*}{\rho}\cdot\frac{M^*}{M}\cdot\frac{a^*}{a}$.

Так как M*=1, то

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\cdot\frac{\rho^*}{\rho}\cdot\frac{a^*}{a}. \qquad (2.30)$$

Найдем $\frac{\rho^*}{\rho}$ с учётом изоэнтропийных соотношений (2.16) и (2.21) следующим образом:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho}\cdot\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{1}{k-1}}. \qquad (2.31)$$

Найдем $\frac{a^*}{a}$ с учётом изоэнтропийных соотношений (2.14) и (2.18):

$$\frac{a^*}{a} = \frac{a_0}{a}\cdot\frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^{*2}}\right)^{1/2} = \left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.32)$$

Тогда, внося $\frac{\rho^*}{\rho}$ и $\frac{a^*}{a}$ в формулу (2.30), получим:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}. \qquad (2.33)$$

Итак, имеем следующее уравнение для нахождения площади поперечного сечения сопла Лаваля:

$$\frac{A_*}{A} = M\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}. \qquad (2.34)$$

Аналогично предыдущим получим следующие изоэнтропийные соотношения:

для $\frac{p^*}{p}$ с учётом (2.15) и (2.20):

$$\frac{p^*}{p} = \frac{p^*}{p_0}\cdot\frac{p_0}{p} = \left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{k}{k-1}}; \qquad (2.35)$$

для $\frac{T^*}{T}$ с учётом (2.9) и (2.19):

$$\frac{T^*}{T}=\frac{T^*}{T_0}\cdot\frac{T_0}{T}=\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]; \qquad (2.36)$$

для $\frac{a^*}{\upsilon}$ с учётом (2.17) и (2.18):

$$\frac{a^*}{\upsilon}=\frac{a^*}{a_0}\cdot\frac{a_0}{\upsilon}=\frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.37)$$

Эта система, состоящая из уравнений (2.31), (2.32), (2.34)-(2.37), называется параметрической системой уравнений для определения профиля сопла Лаваля и параметров газа в любом сечении сопла. В качестве расчётного параметра принимается число M.

Зачастую вместо этих уравнений используют выражения с коэффициентом λ. Для этого в полученную систему уравнений вносят соотношения (2.11) и (2.12), связывающие числа M и λ, и получают:

$$\frac{A}{A^*}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left[\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]^{-1};$$

$$\frac{\rho}{\rho^*}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}};$$

$$\frac{p}{p^*}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

$$\frac{T}{T^*}=\frac{k+1}{2}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right).$$

Для профилирования сопла Лаваля используют метод $\theta-$расчёта. Из уравнения неразрывности: $\rho\upsilon A=\rho^*\upsilon^*A^*$ имеем $\frac{A^*}{A}=\frac{\rho\upsilon}{\rho^*a^*}$. Обозначим $\frac{A^*}{A}=\theta(M)=\theta(\lambda)$. Задаваясь последовательно значениями M или λ, находят ряд отношений $\frac{A^*}{A}=\theta$ и строят график $\theta=\theta(M)$ или $\theta=\theta(\lambda)$. Далее по приведенным выражениям для $\frac{p}{p^*}$; $\frac{\rho}{\rho^*}$; $\frac{T}{T^*}$ находят значения параметров газа при его движении по соплу. Для удобства расчётов имеются специально разработанные газодинамические таблицы.

Рассмотрим диаграммы процессов движения газа по соплу Лаваля. Отметим на диаграмме «давление – удельный объём» (p – V) (рис.13) процессы, протекающие внутри сопла Лаваля. Верхняя часть диаграммы пред-

ставляет процесс движения газа по конфузорной части сопла Лаваля до его критического сечения. Нижняя часть диаграммы характеризует движение газа в закритической (диффузорной) части сопла. Здесь индексы 1,2 характеризуют вход и выход из сопла Лаваля, * - критическое сечение.

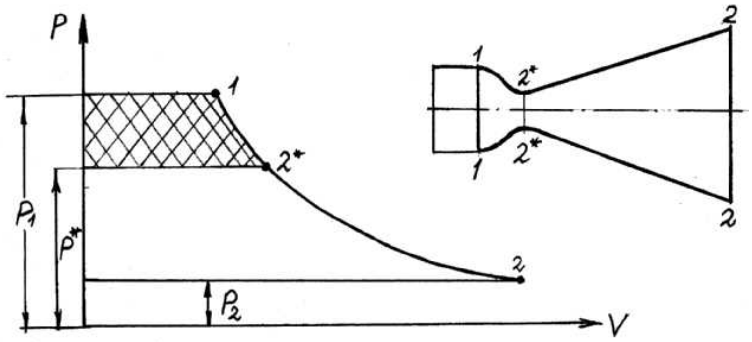


Рис. 13

Можно выделить три характерных режима работы сопла Лаваля:

1. Давление газа на выходе из сопла равно атмосферному, т.е. $P_2 = P_H$. Такой режим работы называют расчётным.
2. $P_2 > P_H$. Это недорасширенный режим работы сопла, в котором недоиспользованы энергетические возможности потока.
3. $P_2 < P_H$. Это режим перерасширения, при котором происходит отрыв потока внутри сопла, в результате чего выходная часть сопла Лаваля не работает, ракета несет на себе лишний груз.

Скорость истечения газа из суживающегося (конфузорного) сопла можно определить следующим образом:

а) $\frac{\upsilon}{a^*} = \lambda \rightarrow \upsilon = \lambda \cdot a^* = \lambda \frac{a^*}{a_0} \cdot a_0$ Из изоэнтропических соотношений $\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}$; адиабатическая скорость звука в неподвижной среде $a_0 = \sqrt{k\frac{p_0}{\rho_0}}$. Тогда $\upsilon = \lambda\sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}} = \lambda\sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0}$;

б) если взять интеграл Бернулли уравнения движения для адиабатического процесса при отсутствии массовых сил (потенциал П=0): $P + \frac{\upsilon^2}{2} = const = \frac{\upsilon_0{}^2}{2}$; где функция давления $P = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$.

Тогда $\upsilon^2 = \upsilon_0{}^2 + \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$.

Определим теперь значения основных параметров газа при движении по соплу Лаваля. Для этого рассмотрим истечение газа при отсутствии энергетического обмена. В этом случае нетрудно убедиться в том, что скорость истечения газа никогда не может быть выше некоторой максимальной величины υ_{max}. На самом деле, из интеграла Бернулли уравнения энергии при отсутствии массовых сил (П=0): $h_0 = h + \frac{\upsilon^2}{2} = c_p T_0$ следует, что максимальная скорость получается в случае, когда h=0, т.е. когда полное теплосодержание газа (полная энтальпия h_0) целиком преобразуется в кинетическую энергию. Тогда $\frac{\upsilon_{max}^2}{2} = h_0$, откуда $\upsilon_{max} = \sqrt{2h_0} = \sqrt{2c_p T_0}$. Для воздуха при условии постоянства теплоёмкости c_p имеем $\upsilon_{max} \approx 44{,}8\sqrt{T_0}$, где T_0 – температура адиабатически заторможенного газа. Действительно, для воздуха:

$$c_p = 1{,}004 \frac{\text{кДж}}{\text{кГ} \cdot \text{К}} = 1{,}004 \cdot 10^3 \frac{\text{кГ} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кГ} \cdot \text{К}} = 1{,}004 \cdot 10^3 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}.$$

Тогда $\upsilon_{max} = \sqrt{2 \cdot 1{,}004 \cdot 10^3 T_0} \approx 44{,}8\sqrt{T_0}$. Видно, что увеличение максимального значения скорости истечения газа из сопла Лаваля может быть достигнуто только путем повышения температуры торможения T_0 (полного теплосодержания h_0), то есть за счет энергетических возможностей компонентов ракетного топлива.

Найдем связь между предельной скоростью истечения газа υ_{max} и скоростью звука в неподвижном газе a_0: $\upsilon_{max} = \sqrt{2c_p T_0}$,

$$c_p T_0 = \frac{c_p}{R} R T_0 = \frac{c_p}{c_p - c_v} R T_0 = \frac{k}{k-1} R T_0, \text{ тогда: } \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R T_0}.$$

Так как $a_0 = \sqrt{kRT_0}$, то $\upsilon_{max} = a_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1}}$.

Для воздуха (при k=1,4): $\upsilon_{max} \approx 2{,}23 a_0$, т.е. максимальная скорость истечения не может превосходить скорость звука в неподвижном воздухе более, чем в 2,23 раза.

Скорость звука в потоке $a = \sqrt{kRT}$. Так как статическая температура T всегда меньше температуры заторможенного потока T_0, то $a < a_0$ (т.е. скорость звука в потоке всегда меньше скорости звука в заторможенном газе).

Для воздуха (при k=1,4): $a \approx 20{,}1\sqrt{T}$; $a_0 \approx 20{,}1\sqrt{T_0}$, причём, если скорость звука в потоке является переменной величиной, зависящей от стати-

ческой температуры газа, то скорость звука заторможенного потока для конкретного газа является величиной постоянной (т.к. для него $T_0 = const$).

Из первого изоэнтропийного соотношения $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2$ видно, что максимальное значение числа $M \to \infty$ при $T \to 0$.

Критическая скорость звука $a^* = \sqrt{kRT^*}$. Скорость звука в заторможенном газе $a_0 = \sqrt{kRT_0}$. Тогда $\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}$ и, следовательно, $a^* = a_0\sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0}$. Так как для воздуха $a_0 \approx 20{,}1\sqrt{T_0}$, то получаем $a^* \approx 18{,}3\sqrt{T_0}$, т.е. $a^* \approx 0{,}91a_0$. Следовательно, критическая скорость звука всегда меньше скорости звука заторможенного потока.

Итак, при течении газа по соплу Лаваля его параметры меняются следующим образом:

1. При движении по соплу статическая температура T потока **постоянно** падает, скорость потока υ растёт до υ_{max}, скорость звука в потоке a **постоянно** падает.
2. В критическом сечении сопла Лаваля местная скорость звука в потоке $a = \upsilon = a^* = \upsilon^*$. В этом же сечении число Маха, которое **постоянно** растет по длине сопла, становится равным критическому $M = M^* = 1$.
3. Температура заторможенного потока T_0; скорость звука в неподвижном газе a_0; критическая температура T^*; критическая скорость потока υ^* и критическая скорость звука a^* – величины постоянные (причём $a^* < a_0$, $T^* < T_0$).
4. **Предельные** значения параметров при истечении газа из сопла: $T \to 0$; $a \to 0$; $M \to \infty$; $\upsilon_{max} = a_0\sqrt{\frac{2}{k-1}}$.

2.3. Распространение малых возмущений в потоке сжимаемого газа

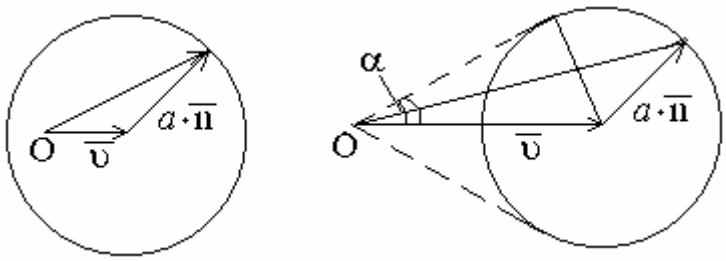
Движение газа имеет существенно различный характер в зависимости от того, является ли оно дозвуковым или сверхзвуковым. Одним из наиболее существенных принципиальных отличий сверхзвукового потока является возможность существования в нем так называемых ударных волн (свойства которых рассмотрим ниже). Другая характерная особенность сверхзвукового течения связана со свойствами распространения в газе малых возмущений.

Если в каком-нибудь месте стационарно движущийся газ подвергается

слабому возмущению, то влияние этого возмущения распространяется по газу со скоростью (относительно самого газа), равной скорости звука. Скорость же распространения возмущения относительно неподвижной системы координат складывается из двух частей: во-первых, возмущение сносится потоком газа со скоростью $\bar{\upsilon}$; во-вторых, распространяется относительно газа со скоростью звука a в некотором направлении $\bar{n}$.

Рассмотрим для простоты однородный плоскопараллельный поток газа с постоянной скоростью $\bar{\upsilon}$. Пусть в некоторой (неподвижной в пространстве) точке О газ подвергается малому возмущению. Скорость ($\bar{\upsilon}+a\bar{n}$) распространения исходящего из точки О возмущения (относительно неподвижной системы координат) имеет различное значение в зависимости от направления единичного вектора $\bar{n}$. Все возможные ее значения мы получим, отложив из точки О вектор $\bar{\upsilon}$, а из его конца, как из центра, построим сферу радиуса a.

Векторы, проведенные из точки О в точки этой сферы, и определяют возможные величины и направления скорости распространения возмущения.



$\upsilon<a$ $\upsilon>a$

а *б*

Рис. 14

Рассмотрим случай, когда $\upsilon<a$. Тогда векторы $\bar{\upsilon}+a\bar{n}$ могут иметь любое направление в пространстве (см. рис. 14,*а*). Другими словами, в дозвуковом потоке возмущение, исходящее из некоторой точки, распространяется в конце концов по всему газу. Напротив, в сверхзвуковом потоке, когда $\upsilon>a$, направления векторов $\bar{\upsilon}+a\bar{n}$, как видно из рис. 14,*б*, могут лежать только внутри конуса с вершиной в точке О, касающегося построенной из конца вектора $\bar{\upsilon}$ (как из центра) сферы. Для угла раствора 2α этого конуса имеем (см. рис. 14,*б*):

$$\sin(\alpha)=a/\upsilon.$$

Таким образом, в сверхзвуковом потоке исходящее из некоторой точки возмущение распространяется только вниз по течению внутри конуса с углом раствора тем меньшим, чем меньше отношение a/υ. На всей области потока вне этого конуса возмущение в точке О не отразится вовсе.

Угол $\alpha=\arcsin(a/\upsilon)$ называется углом возмущений, а поверхность, ограничивающая область, куда достигает исходящее из данной точки воз-

мущение, называется поверхностью возмущений или характеристической поверхностью.

В общем случае произвольного стационарного течения поверхность возмущений может и не быть конической во всем объеме потока. Однако по-прежнему можно утверждать, что эта поверхность пересекает в каждой своей точке линию тока под углом, равным углу возмущений. Значение же угла возмущений меняется от точки к точке соответственно изменению скоростей υ и a . Отметим, что при движении газа с большими скоростями скорость звука различна в разных местах, меняясь вместе с параметрами потока (давлением, плотностью и т.д.), функцией которых она является. Поэтому о скорости звука как функции координат точки говорят как о местной скорости звука.

Описанные свойства сверхзвукового течения придают ему характер, совершенно отличный от характера дозвукового движения. Если дозвуковой поток газа встречает на своем пути какое-либо препятствие, например, обтекает какое-либо тело, то наличие этого препятствия изменяет движение во всем пространстве как вверх, так и вниз по течению; влияние обтекаемого тела исчезает лишь асимптотически при удалении от тела. Сверхзвуковой же поток натекает на препятствие как бы слепо, неожиданно; влияние обтекаемого тела сказывается лишь на определенную область вниз по течению, а по всей остальной области пространства газ движется так, как если бы никакого тела вообще не было.

В случае плоского стационарного течения газа вместо характеристических поверхностей говорят о характеристических линиях или просто о характеристиках в плоскости движения. Через всякую точку *0* этой плоскости проходят две характеристики AA’ и BB’ (рис. 15), пересекающие проходящую через эту точку линию тока под углами, равными углу возмущения.

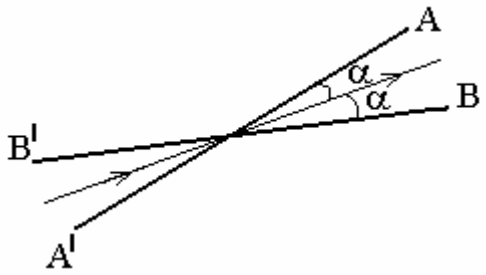


Рис. 15

2.4. Математическая модель плоского безвихревого течения идеального сжимаемого газа

Будем рассматривать плоское течение идеального сжимаемого газа как с дозвуковой, так и сверхзвуковой скоростями.

Рассматриваемая стационарная задача близка к теории обтекания крыла (где массовыми силами можно пренебречь). Запишем основные уравнения движения идеального газа:

1) $\rho\left(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}$;

$$\rho\left(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Это проекции векторного уравнения движения на оси координат в случае отсутствия массовых сил для плоского стационарного течения;

2) необходимо к уравнениям движения добавить уравнение неразрывности для плоского стационарного движения идеальной сжимаемой жидкости: $\frac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\upsilon_y)}{\partial y} = 0$;

3) введем также уравнение энергии, нелинейное за счет левой части, и уравнение состояния, или вместо них можно записать уравнение процесса: $\rho = \rho(p)$ для баротропного равновесия газа.

Теперь плоская задача будет полностью сформулирована, если еще добавить:

4) условие отсутствия вихря $(\mathrm{rot}\ \bar{\upsilon})_z=0$ или $\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = 0$;

5) условие набегающего потока на границе (интеграл Бернулли уравнения энергии)

$$\frac{\upsilon^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{\upsilon_\infty^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{k-1}.$$

Итак, система, включающая в себя: уравнения движения, уравнение неразрывности, уравнение процесса и дополнительно условие отсутствия вихря и условие на границе – и есть система уравнений, необходимая для решения газодинамической задачи плоского безвихревого течения, которая действительна в случае тонких профилей. Будем упрощать исходную систему дифференциальных уравнений.

При условии баротропного движения газа $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}$.

Тогда первые два уравнения движения (уравнения Эйлера) принимают следующий вид:

$$\frac{\rho}{a^2}\left(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial x}; \qquad (2.38)$$

$$\frac{\rho}{a^2}\left(\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial y}. \qquad (2.39)$$

Уравнение неразрывности после дифференцирования запишем в виде

$$\rho\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}\right)+\upsilon_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\rho}{\partial y}=0. \qquad (2.40)$$

Если объединить уравнение неразрывности с уравнениями движения, подставив $\partial\rho/\partial x$ и $\partial\rho/\partial y$ из (2.38) и (2.39) в (2.40), то после преобразований получим следующее уравнение:

$$(a^2-\upsilon_x^2)\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}-\upsilon_x\upsilon_y\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}\right)+(a^2-\upsilon_y^2)\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}=0. \qquad (2.41)$$

Это основное уравнение газовой динамики, справедливое как для безвихревого, так и для вихревого движений. Отметим, что уравнение является типично нелинейным (даже при наличии ряда допущений).

В математическую модель входят также следующие уравнения:

а) условия отсутствия вихря

$$\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}-\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}=0; \qquad (2.42)$$

б) уравнение энергии

$$\frac{\upsilon^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{\upsilon_\infty^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{k-1}, \qquad (2.43)$$

справедливое при безвихревом стационарном адиабатическом течении идеального газа во всей области (плоскости) движения.

Итак, задачу плоской газовой динамики можно свести к нелинейному уравнению относительно всех входящих в него величин: υ_x, υ_y, a. Интегрирование основного уравнения газовой динамики при обычных условиях непроницаемости твердых стенок обтекаемых тел и заданных значениях скорости на бесконечности представляет значительные трудности, связанные с нелинейностью уравнения (2.41).

Рассмотрим простейший случай плоского обтекания тонких, слабо искривленных тел, расположенных в однородном газовом потоке под малым углом атаки. В этом случае возмущения, создаваемые телом в однородном потоке, будут малыми, и уравнение может быть подвергнуто линеаризации.

2.5. Линейные преобразования Прандля для определения малых возмущений параметров газа

Для дальнейшего упрощения задачи используем прием линеаризации, который состоит в следующем. Выберем направление однородного потока, совпадающее с направлением оси Ox, и обозначим через υ_∞ , p_∞, ρ_∞, a_∞ - скорость, давление, плотность, скорость распространения звука в однородном потоке. Возмущения, вносимые в этот поток тонким телом, обозначим через υ', p', ρ', a', так что будем иметь:

$\upsilon_x=\upsilon_\infty+\upsilon'_x$; $\upsilon_y=\upsilon'_y$; $p= p_\infty+ p'$; $\rho=\rho_\infty+\rho'$; $a= a_\infty+ a'$.

Величины, отмеченные штрихом, являются малыми по сравнению с величинами без штрихов. Подчеркнем, что это допущение действительно лишь для обтекания тонкого профиля. Подставим эти соотношения в уравнение газовой динамики (2.41) и опустим такие произведения, как $\upsilon'_x\cdot\upsilon'_y$, $\upsilon'_x\cdot\dfrac{\partial\upsilon'_x}{\partial x}$, положив их равными нулю как величины второго порядка малости. Тогда после преобразований получим:

$$(a^2-\upsilon_x^2)\frac{\partial\upsilon'_x}{\partial x}+a^2\frac{\partial\upsilon'_y}{\partial y}=0, \qquad (2.44)$$

или

$$(1-M_\infty^2)\frac{\partial\upsilon'_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon'_y}{\partial y}=0. \qquad (2.45)$$

Последнее выражение является линеаризованным уравнением газовой динамики.

Использование этого приема несколько ухудшает точность (по сравнению с численными методами решения), но задача решается намного проще и физичнее.

Если имеет место потенциальное (безвихревое) течение, то

$$\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}-\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}=0.$$

Это условие позволит ввести в рассмотрение потенциал скоростей $\varphi(x,y)$ и записать:

$$\upsilon_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \qquad \upsilon_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Применим к $\varphi(x,y)$ этот же прием линеаризации: $\varphi=\varphi_\infty+\varphi'$,

где φ - потенциал скоростей возмущенного потока, φ_∞ - потенциал скоростей невозмущенного потока, φ' – потенциал скоростей малых возмущений.

Тогда $\upsilon_x=\dfrac{\partial\varphi_\infty}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi'}{\partial x}$; $\upsilon_y=\dfrac{\partial\varphi_\infty}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi'}{\partial y}$, но $\dfrac{\partial\varphi_\infty}{\partial y}=0$, так как рассматриваем тонкий профиль. Поскольку $\upsilon_x=\upsilon_\infty+\upsilon'_x$, а $\upsilon_y=\upsilon'_y$, то можно записать, что

$$\upsilon_\infty = \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial x}, \quad \upsilon_x' = \frac{\partial\varphi'}{\partial x}, \quad \upsilon_y = \frac{\partial\varphi'}{\partial y}.$$

Тогда после интегрирования первого соотношения потенциал скоростей невозмущенного движения $\varphi_\infty = \upsilon_\infty x + \text{const}$, и тогда потенциал возмущенного движения $\varphi = \varphi_\infty + \varphi' = \upsilon_\infty x + \varphi' + \text{const}$.

Выражения $\upsilon'_x = \frac{\partial\varphi'}{\partial x}$; $\upsilon'_y = \frac{\partial\varphi'}{\partial y}$ внесем в (2.45) и получим линеаризованное уравнение для определения потенциала скоростей малых возмущений φ':

а) для дозвуковых потоков сжимаемого газа

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} = 0; \qquad (2.46)$$

б) для сверхзвуковых потоков сжимаемого газа

$$(M_\infty^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} = 0. \qquad (2.47)$$

Уравнение (2.46) – эллиптического, уравнение (2.47) – гиперболического типа.

Интересно отметить, что для несжимаемого газа a=∞, $M = \frac{\upsilon}{a} = 0$, и вышеприведенные уравнения приобретают вид классического уравнения Лапласа. Таким образом, наличие числа Маха в уравнениях (2.46) и (2.47) свидетельствует о сжимаемости газа.

Полученные выше преобразования называются линейными преобразованиями Прандтля.

При рассмотрении дозвукового обтекания профиля возмущения, вызываемые этим обтеканием, распространяются на всю область течения (уравнение эллиптического типа), так как они распространяются со звуковой скоростью. При сверхзвуковом обтекании профиля или для уравнений гиперболического типа возмущения, вносимые телом в поток, распространяются только за телом по конусу возмущений (то есть только в следе за тонким профилем). Рассмотрение уравнений гиперболического типа приводит к интересному результату, а именно наличию вектора аэродинамических сил, следовательно, несмотря на то, что рассматривается обтекание идеальным газом без циркуляции, парадокс Даламбера теряет свой смысл.

Введем в рассмотрение функцию тока ψ(x,y). Ее существование вытекает из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\upsilon_y)}{\partial y} = 0,$$

согласно которому можно положить $\rho\upsilon_x = \rho_\infty \frac{\partial\psi}{\partial y}$; $\rho\upsilon_y = -\rho_\infty \frac{\partial\psi}{\partial x}$.

Для проверки этой гипотезы подставим эти соотношения в предыдущее уравнение и получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_\infty \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho_\infty \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\left(\rho_\infty \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)-\left(\rho_\infty \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\right)=0,$$

то есть уравнение удовлетворяется.

Таким образом, связь между потенциалом скоростей φ и функцией тока ψ возмущенного движения сжимаемого газа имеет вид:

$$\upsilon_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y};\ \upsilon_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

где ρ_∞ - плотность невозмущенного однородного потока.

Если записать для функции тока возмущенного движения соотношение $\psi=\psi_\infty+\psi'$, то из условия существования функции тока:

$$\rho\upsilon_x=\rho_\infty\frac{\partial\psi}{\partial y};\ \ \rho\upsilon_y=-\rho_\infty\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

с учетом линеаризации имеем:

$$\left.\begin{aligned}(\rho_\infty+\rho')(\upsilon_\infty+\upsilon_x')&=\rho_\infty\left(\frac{\partial\psi_\infty}{\partial y}+\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\\(\rho_\infty+\rho')\upsilon'_y&=-\rho_\infty\left(\frac{\partial\psi_\infty}{\partial x}+\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(2.48)$$

Перемножив почленно и убрав в левой части уравнений (2.48) члены второго прядка малости, получим:

$$\left.\begin{aligned}\rho_\infty\upsilon_\infty+\boldsymbol{\rho'u_\infty}+\boldsymbol{\rho_\infty u_x'}&=\rho_\infty\frac{\partial\psi_\infty}{\partial y}+\boldsymbol{\rho_\infty\frac{\partial\psi'}{\partial y}}\\\boldsymbol{\rho_\infty u'_y}&=-\rho_\infty\frac{\partial\psi_\infty}{\partial x}-\boldsymbol{\rho_\infty\frac{\partial\psi'}{\partial x}}\end{aligned}\right\}\qquad(2.49)$$

Здесь обычным шрифтом обозначены конечные величины, а выделенным шрифтом обозначены величины первого порядка малости. Тогда, сравнивая конечные величины, приходим к следующему дифференциальному уравнению: $\rho_\infty\upsilon_\infty=\rho_\infty\frac{\partial\psi_\infty}{\partial y}$, откуда $\upsilon_\infty=\frac{\partial\psi_\infty}{\partial y}$. Интегрируя, получаем: $\psi=\upsilon_\infty y+\mathrm{const}$, и тогда функция тока возмущенного движения:

$\psi=\psi_\infty+\psi'=\upsilon_\infty y+\psi'+C$.

При сравнении величин первого порядка малости уравнений (2.49) получаем следующую систему равенств:

$$\left.\begin{aligned}\rho'\upsilon_\infty+\rho_\infty\upsilon_x'&=\rho_\infty\frac{\partial\psi'}{\partial y}\\\upsilon'_y&=-\frac{\partial\psi'}{\partial x}\end{aligned}\right\}\qquad(2.50)$$

Обратимся к интегралу Бернулли в виде: $\frac{\upsilon^2}{2}+P=\frac{\upsilon_\infty^2}{2}$; $\frac{\upsilon^2}{2}+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)}=\frac{\upsilon_\infty^2}{2}$.

Здесь $\upsilon^2=\upsilon_x^2+\upsilon_y^2=(\upsilon_x+\upsilon_x')^2+\upsilon_y^2$. Для адиабатического течения: $P(p)=\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)}=-\frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{k-1}\right]$ и тогда с учетом линеаризации можно записать: $\frac{(\upsilon_\infty+\upsilon_x')^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{k-1}-1\right]+\frac{\upsilon_y'^2}{2}=\frac{\upsilon_\infty^2}{2}$. Раскроем скобки в левой части и отбросим малые второго порядка - $\upsilon_x'^2$ и $\upsilon_y'^2$. Кроме того, учитывая, что, так как $\rho=\rho_\infty+\rho'$, то $\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{k-1}=\left(1+\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)^{k-1}$, и окончательно получаем

$$\upsilon_\infty\upsilon_x'+\frac{a_\infty^2}{k-1}\left[\left(1+\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)^{k-1}-1\right]=0.$$

Здесь $\frac{kp_\infty}{\rho_\infty}=a_\infty^2$.

Так как при разложении в биномиальный ряд

$$\left(1+\frac{\rho'}{\rho_\infty}\right)^{k-1}=1+(k-1)\frac{\rho'}{\rho_\infty}+\ldots,$$

то последнее выражение будет иметь вид:

$\upsilon_\infty\upsilon_x'+a_\infty^2\frac{\rho'}{\rho_\infty}=0$, откуда выражение для малых возмущений плотности

$$\rho'=-\frac{\rho_\infty\upsilon_\infty\upsilon_x'}{a_\infty^2} \qquad (2.51)$$

С другой стороны, $p'=p-p_\infty=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_\infty(\rho-\rho_\infty)=a_\infty^2\rho'$ (разложили в ряд Тейлора и ограничились первым членом). Тогда, с учетом выражения (2.51), имеем для малых возмущений давления:

$$p'=-\rho_\infty\upsilon_\infty\upsilon_x'. \qquad (2.52)$$

Если выражение (2.51) подставить в первое уравнение системы (2.50), то получим $-\frac{\rho_\infty\upsilon_\infty\upsilon_x'}{a_\infty^2}+\rho_\infty\upsilon_x'=\rho_\infty\frac{\partial\psi'}{\partial y}$, или, разделив на ρ_∞ имеем

$\upsilon'_x(1-M_\infty^2)=\dfrac{\partial\psi'}{\partial y}$, где $\dfrac{\upsilon_\infty^2}{a_\infty^2}=M_\infty^2$. Тогда получим окончательное выражение для малых возмущений компоненты скорости

$$\upsilon'_x=\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial\psi'}{\partial y} \qquad (2.53)$$

Для вычисления компоненты скорости υ'_y используем второе уравнение системы (2.50)

$$\upsilon'_y=-\frac{\partial\psi'}{\partial x}. \qquad (2.54)$$

Условие отсутствия вихря для плоского случая: $\dfrac{\partial\upsilon_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\upsilon_x}{\partial y}=0$ преобразуется для возмущенного движения в уравнение $\dfrac{\partial\upsilon_y'}{\partial x}-\dfrac{\partial\upsilon_x'}{\partial y}=0$. Покажем это. Для возмущенного движения были получены компоненты скорости $\upsilon_x=\upsilon_\infty+\upsilon'_x$; $\upsilon_y=\upsilon'_y$. Подставим эти выражения в условие отсутствия вихря и получим: $\dfrac{\partial\upsilon_y'}{\partial x}-\dfrac{\partial\upsilon_x'}{\partial y}-\dfrac{\partial\upsilon_\infty}{\partial y}=0$, но $\dfrac{\partial\upsilon_\infty}{\partial y}=0$, так как однородный поток направлен вдоль оси Ox и его изменения вдоль оси Oy нет. Следовательно, условие отсутствия вихря для возмущенного движения: $\dfrac{\partial\upsilon'_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\upsilon'_x}{\partial y}=0$. Подставляя в него выражения для υ'_x (2.53) и υ'_y (2.54), приходим к следующим соотношениям:

а) при $M_\infty<1$: $$(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}=0, \qquad (2.55)$$

б) при $M_\infty>1$: $$(M_\infty^2-1)\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}=0. \qquad (2.56)$$

Следовательно, для определения функции тока малых возмущений ψ' имеем два линеаризованных соотношения (при $M_\infty<1$ и $M_\infty>1$). Аналогично для потенциала скоростей малых возмущений φ' имеем уравнения (2.46), (2.47). Связь между потенциалом скорости φ' и функцией тока малых возмущений ψ' имеет вид:

$$\upsilon'_x=\frac{\partial\varphi'}{\partial x}=\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial\psi'}{\partial y};\quad \upsilon'_y=\frac{\partial\varphi'}{\partial y}=-\frac{\partial\psi'}{\partial x}.$$

Итак, видим, что уравнения, определяющие возмущения как для потенциала скоростей, так и для функции тока, имеют одинаковые выражения. Следовательно, для решения задачи обтекания тонкого профиля сжимаемым газом достаточно рассмотреть проблему интегрирования уравне-

ний либо для потенциала скоростей возмущений, либо для функции тока возмущений.

При дозвуковом обтекании тонкого профиля целесообразно рассмотреть задачу отыскания функции тока ψ, так как нулевая линия тока является при безотрывном обтекании самим контуром профиля, то есть имеется готовое граничное условие равенства нулю функции тока на поверхности профиля.

Ограничим задачу для дозвукового обтекания тонкого профиля рассмотрением дифференциального уравнения для функции тока малых возмущений (2.55).

Для вычисления давления потока на поверхности тела найдем выражение для коэффициента давления C_p из соотношения:

$$p' = p - p_\infty = -\rho_\infty \upsilon_\infty \upsilon'_x .$$

Обе части этого уравнения разделим на $\frac{1}{2}\rho_\infty \upsilon_\infty^2$, тогда получим:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty \upsilon_\infty^2} = -2\frac{\upsilon'_x}{\upsilon_\infty}. \qquad (2.57)$$

Существование коэффициента C_p свидетельствует о наличии вектора сил гидродинамических давлений жидкости на обтекаемое тело.

2.6. Математическая модель дозвукового обтекания тонкого профиля потоком идеального сжимаемого газа

В основу решения положим полученное уравнение для функции тока возмущений ψ' (2.55). Для решения задачи нужно добавить граничные условия. Запишем уравнение верхней дужки контура рассматриваемого профиля через $y=h_1(x)$. Уравнение нижней дужки контура запишем в виде $y=h_2(x)$. Используем условие, что функция тока при обтекании равна $\psi=\psi_\infty+\psi'$. Это соотношение обладает следующим свойством: если рассматривать точки на самом контуре, то для них ψ есть нулевая функция тока, следовательно, на контуре $\psi=0$ и тогда на поверхности профиля: $\psi' = -\psi_\infty$. С другой стороны, $\psi_\infty=\upsilon_\infty y+C$. Тогда из этих двух соотношений следуют граничные условия:

а) $\psi' = -\upsilon_\infty h_1(x)$ при $y = h_1(x)$ – для верхней дужки профиля;

б) $\psi' = -\upsilon_\infty h_2(x)$ при $y = h_2(x)$ – для нижней дужки профиля.

Эти условия справедливы для $a \le x \le b$, где a – координата передней точки профиля A на оси Ox, b – координата задней точки B на оси Ox;

в) граничное условие на бесконечности: $\psi' \to 0$, если $x,y \to \infty$, которое сводится к убыванию возмущений до нуля при удалении их от профиля (справедливо только для $M_\infty < 1$). Если мы найдем для тонкого профиля

значения tg углов между касательными к верхней и нижней дужкам и осью Ox, то увидим, что для такого профиля эти величины будут малыми, следовательно, нашу задачу можно свести к обтеканию тонкого прямолинейного отрезка. Тогда получим следующие граничные условия:

$$\left.\begin{array}{l} а)\ \psi' = -\upsilon_\infty h_1(x) \text{ при } y = +0 \\ б)\ \psi' = -\upsilon_\infty h_2(x) \text{ при } y = -0 \\ в)\ \psi' \to 0 \text{ при } x, y \to \infty \end{array}\right\} a \le x \le b$$

Чтобы подчеркнуть, что разбирается задача об обтекании тонкого профиля сжимаемым потоком, запишем уравнение (2.55) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = 0, \qquad (2.58)$$

где $\omega^2 = 1 - M_\infty^2$. Тогда для этого уравнения граничные условия запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} а)\ \psi'_{сж} = -\upsilon_\infty h_1(x) \text{ при } y = +0 \\ б)\ \psi'_{сж} = -\upsilon_\infty h_2(x) \text{ при } y = -0 \\ в)\ \psi'_{сж} \to 0 \text{ при } x, y \to \infty \end{array}\right\} a \le x \le b \qquad (2.59)$$

Перейдем к новым координатам ξ и η, введя аффинные преобразования (деформацию координат): ξ=x; $\eta = y\omega = y\sqrt{1 - M_\infty^2}$. Тогда уравнение (2.58) и граничные условия (2.59)запишутся в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \psi'_{сж}}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 \psi'_{сж}}{\partial \eta^2} = 0 \\ а)\ \psi'_{сж} = -\upsilon_\infty h_1(\xi) \text{ при } \eta = +0 \\ б)\ \psi'_{сж} = -\upsilon_\infty h_2(\xi) \text{ при } \eta = -0 \\ в)\ \psi'_{сж} \to 0 \text{ при } \xi, \eta \to \infty \end{array}\right\} \qquad (2.60)$$

Здесь $\dfrac{\partial \psi'}{\partial y} = \dfrac{\partial \psi'}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \omega\dfrac{\partial \psi'}{\partial \eta}$ и с учетом правила Лейбница

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \eta^2}\omega^2.$$

Рассмотрим теперь задачу обтекания тонкого профиля несжимаемым потоком, для которого ω=1, так как для несжимаемой жидкости a=∞ ($a^2 = \dfrac{dp}{d\rho}$, при ρ=const → dρ=0 → a=∞) и, следовательно, M_∞=0. В этом случае исходное уравнение (2.58) и граничные условия (2.59) принимают вид:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\psi'_{несж}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi'_{несж}}{\partial y^2}=0\\ а)\ \psi'_{несж}=-\upsilon_\infty h_1(x)\ при\ y=+0\\ б)\ \psi'_{несж}=-\upsilon_\infty h_2(x)\ при\ y=-0\\ в)\ \psi'_{несж}\to 0\ при\ x,y\to\infty\end{array}\right\}\qquad(2.61)$$

Тогда, сопоставляя системы (2.60) и (2.61), приходим к очевидным соотношениям:

$$\psi'_{сж}(\xi,\eta)\equiv\psi'_{несж}(x,y);\qquad \frac{\partial\psi'_{сж}}{\partial\xi}\equiv\frac{\partial\psi'_{несж}}{\partial x};\ \frac{\partial\psi'_{сж}}{\partial\eta}\equiv\frac{\partial\psi'_{несж}}{\partial y}.$$

Следовательно, с учетом (2.53) можем записать:

$$\upsilon'_{x\,сж}=\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial\psi'_{сж}}{\partial y}=\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial\psi'_{сж}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{1-M_\infty^2}\omega\frac{\partial\psi'_{сж}}{\partial\eta}=\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\partial\psi'_{несж}}{\partial y}$$

Так как $\upsilon_x{}'_{несж}=\dfrac{1}{1-M_\infty^2}\dfrac{\partial\psi'_{несж}}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi'_{несж}}{\partial y}$ ($M_{\infty\,несж}$=0), то

$$\upsilon_x{}'_{сж}=\frac{\upsilon_x{}'_{несж}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}.\qquad(2.62)$$

Если обратиться к уравнению (2.57), тогда получим: $C_{p\,сж}=-2\dfrac{\upsilon'_{x\,сж}}{\upsilon_\infty}$. Следовательно, коэффициент давления:

$$C_{p_{сж}}=-\frac{2}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\upsilon_x{}'_{несж}}{\upsilon_\infty}=\frac{C_{p_{несж}}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}.\qquad(2.63)$$

Это выражение называется уравнением Прандтля – Глауэрта.

Как видно из уравнения (2.63), сжимаемость среды увеличивает коэффициент давления для дозвуковых течений.

Эти уравнения были экспериментально проверены, и установлено, что если угол атаки не превышает 4°, то теория и опыт дают близкие результаты, и только в области трансзвуковых течений (близких к скорости звука) имеется расхождение результатов.

Следовательно, полученное решение дозвукового обтекания тонкого профиля при скоростях до M_∞=0,7 удовлетворительно совпадает с опытными данными.

Соотношение $C_{p_{сж}}=\dfrac{C_{p_{несж}}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ выражает следующее правило Прандтля – Глауэрта:

Распределение коэффициента давления в плоском безвихревом линеаризованном дозвуковом потоке сжимаемого газа при данном значении

$M_\infty<1$ может быть получено из соответствующего распределения в потоке несжимаемой жидкости, если все ординаты этого распределения увеличатся в $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$.

Вычислим коэффициент давления подъемной силы $C_{усж}$ при дозвуковом обтекании сжимаемым газом тонкого профиля по формуле:

$$C_{у\,сж} = \frac{R_{у\,сж}}{\frac{1}{2}\rho_\infty \upsilon_\infty b},$$

где b – хорда профиля, R_y – подъемная сила профиля, определяемая следующим образом:

$\vec{R} = R_x - iR_y = -\oint p\bar{n}d\ell$, тогда $R_y = \oint pn_y d\ell$ [$p=p_\infty+p'$; но p_∞ (давление в однородном потоке) тяги не создает, поэтому остается p']. Тогда

$$R_{у\,сж} = \oint p'_{сж}\, n_y d\ell = \oint p'_{сж}\, dx = \frac{1}{2}\rho_\infty \upsilon_\infty^2 \oint C_{р\,сж} dx,$$

так как из формулы для $C_р = \dfrac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty \upsilon_\infty^2}$ имеем $p'_{сж} = p_{сж} - p_\infty = \frac{1}{2}\rho_\infty \upsilon_\infty^2 C_{р\,сж}$.

Тогда $C_{у\,сж} = \dfrac{R_{у\,сж}}{\frac{1}{2}\rho_\infty \upsilon_\infty^2 b} = \oint C_{р\,сж} d\bar{x}$, где $\bar{x} = \dfrac{x}{b}$.

Аналогично $C_{у\,несж} = \dfrac{R_{у\,несж}}{\frac{1}{2}\rho_\infty \upsilon_\infty^2 b} = \oint C_{р\,несж} d\bar{x}$. Тогда для профиля с одним и тем же контуром (то есть в частности с одной и той же хордой b) коэффициент подъемной силы в потоке сжимаемого газа определяется через коэффициент подъемной силы в несжимаемой жидкости по формуле:

$$C_{у_{сж}} = \frac{C_{у_{несж}}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}, \qquad (2.64)$$

так как $\dfrac{C_{у_{сж}}}{C_{у_{несж}}} = \dfrac{C_{р_{сж}}}{C_{р_{несж}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ (по правилу Прандтля - Глауэрта)

2.7. Математическая модель сверхзвукового обтекания тонкого профиля потоком идеального сжимаемого газа

В отличие от дозвукового течения, описываемого уравнением эллиптического типа, при сверхзвуковом течении газа ($M_\infty>1$) основным уравнением является уравнение гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}=0, \qquad (2.65)$$

где $\omega^2 = M_\infty^2 - 1$

Решение гиперболического уравнения является частным случаем решения уравнений математической физики (отметим, что при M>5 решение гиперболического уравнения дает большую ошибку). Гиперболическое уравнение было получено Даламбером при рассмотрении бегущей волны в струне – так называемое уравнение бегущей волны. Далабмер решал это уравнение введением новых переменных:

$\xi = x - \omega y, \quad \eta = x - \omega y.$

Если применить этот прием для гиперболического уравнения (2.65), то оно примет более простой вид. Найдем все производные, входящие в это уравнение:

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x}=\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\psi'}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}; \qquad \frac{\partial\psi'}{\partial y}=\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\psi'}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Для вычисления вторых производных используем знаменитое правило Лейбница в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2\psi'}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2\psi'}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.$$

Если сделать подстановку всех производных в исходное гиперболическое уравнение с учетом того, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=1; \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y}=-\omega; \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}=1; \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\omega,$$

то после преобразований получим:

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}\cdot 1+2\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi\partial\eta}\cdot 1\cdot 1+\frac{\partial^2\psi'}{\partial\eta^2}\cdot 1,$$

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}(-\omega)^2+2\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi\partial\eta}(-\omega)(\omega)+\frac{\partial^2\psi'}{\partial\eta^2}(\omega)^2.$$

Подставим эти выражения в исходное гиперболическое уравнение (2.65) и приведем подобные члены

$$\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi^2}\right)+4\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi\partial\eta}+\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2\psi'}{\partial\eta^2}\right)=0$$

или

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial\xi\partial\eta}\equiv 0. \qquad (2.66)$$

Поскольку ξ и η являются независимыми переменными, то интеграл от этого выражения равен:

$$\psi'(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции своих аргументов.

Другими словами, общее решение этого волнового уравнения может быть выражено формулой.

$$\psi'(x,y) = f_1(x - \omega y) + f_2(x + \omega y). \qquad (2.67)$$

Рассмотрим частное решение $\psi'(x,y) = f_1(x - \omega y)$. Оно имеет следующий смысл: в плоскости течения (x,y) существует семейство прямых линий $x - \omega y = const$, вдоль которых функция тока возмущений, а следовательно, и вообще возмущения параметров движения и состояния газа будут сохранять постоянные значения. Эти прямые представляют собой первое семейство (C_1) характеристик волнового уравнения (характеристики I рода) и играют роль линий возмущения в рассматриваемом сверхзвуковом потоке. Их называют линиями или волнами Маха.

Точно так же частному решению $\psi'(x,y) = f_1(x + \omega y)$ соответствует второе семейство (C_2) характеристик или линий возмущения $x + \omega y = const$, вдоль которых возмущения параметров движения и состояния газа тоже сохраняют постоянные значения.

Рассмотрим угловые коэффициенты этих семейств кривых. В общем случае y=kx, где k - угловой коэффициент: k=tgα. Для нашей задачи $y = \pm\frac{1}{\omega}x$, то есть $k = \pm\frac{1}{\omega}$; $tg\alpha = \pm\frac{1}{\omega} = \pm\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$.

Воспользуемся формулой для sinα через tgα: $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$. Пусть $tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$, тогда

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{M_\infty^2 - 1}}} = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{M_\infty\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{1}{M_\infty}.$$

Аналогично, если $tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$, то $\sin\alpha = -\frac{1}{M_\infty}$.

Очевидно, что углы α, образованные линиями возмущения с направлением невозмущенного движения (осью Ox), равны:

$$\alpha = \pm\arcsin\frac{1}{M_\infty}, \text{ т.к. } \sin\alpha = \pm\frac{1}{M_\infty}$$

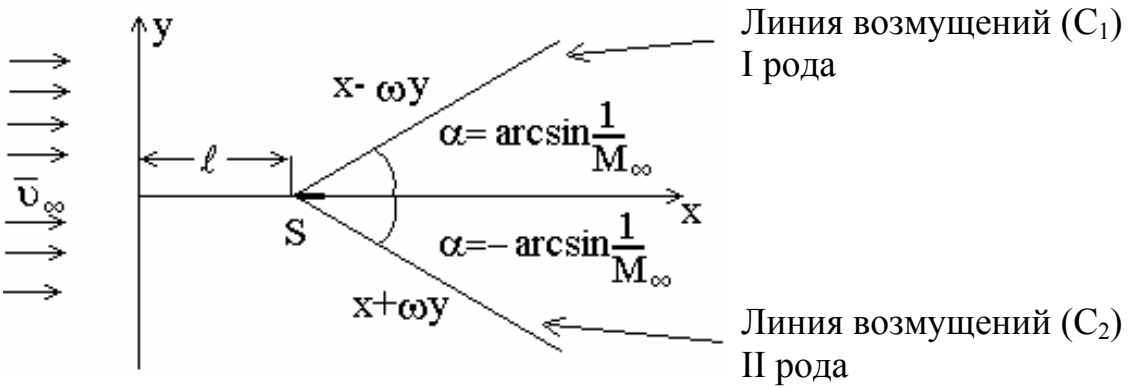


Рис. 16

На рис. 16 показаны две линии возмущений от точечного источника возмущений S, находящегося на оси Ox на расстоянии ℓ от начала координат. От точечного источника в пространстве линии возмущения располагаются на конической поверхности с вершиной в точке S и углом полураствора α. Этот конус называют конусом возмущений или конусом Маха, угол α - углом Маха. По наклону линий возмущения можно судить о величине числа Маха однородного потока (чем больше M_∞, тем меньше угол α). Введение характеристик I и II рода используется для графического построения линий тока при безотрывном обтекании тонкого профиля сверхзвуковым потоком.

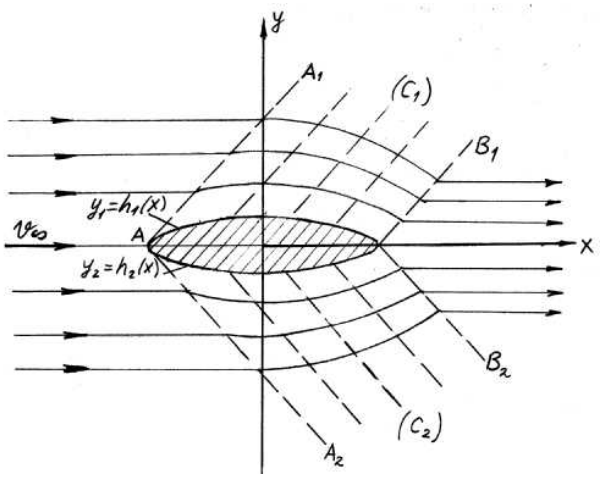


Рис. 17

Построим обтекание тонкого профиля сверхзвуковым потоком. Обобщенное решение волнового уравнения гиперболического типа имеет вид $\psi'(x,y) = f(x \pm \omega y)$, где характеристики $x - \omega y = C_1$ и $x + \omega y = C_2$, называемые волнами Маха, являются волнами небольшой интенсивности. Контур тонкого профиля, как и для дозвукового потока, будем задавать ординатами верхней $h_1(x)$ и нижней $h_2(x)$ поверхностей, т.е. $y = h_{1,2}(x)$.

Заполним область течения сверху и снизу от контура профиля (рис. 17) соответственно характеристиками первого (C_1) и второго (C_2) семейств. Граничное условие представим, как и прежде, в форме

$$\psi' = -\upsilon_\infty h_{1,2}(x) \text{ при } a \le x \le b.$$

Свойства характеристик для первого семейства (частное решение волнового уравнения $\psi'(x,y) = f_1(x - \omega y)$) и для второго семейства (частное решение волнового уравнения $\psi'(x,y) = f_2(x + \omega y)$) позволяют заключить, что общее решение волнового уравнения при вышеуказанном граничном условии может быть представлено в форме:

$$\psi' = -\upsilon_\infty h_{1,2}(x \mp \omega y). \qquad (2.68)$$

Здесь индексу «1» при h соответствует верхний знак в круглой скобке, индексу «2» - нижний.

В отличие от дозвукового обтекания функция тока возмущений $\psi'(x,y)$ при удалении на сколь угодно большое расстояние от контура профиля не обращается в нуль, а сохраняет внутри верхней и нижней полос, ограниченных крайними характеристиками AA_1, BB_1 и AA_2, BB_2 при y $\to \pm\infty$, такое же распределение по x, как и на верхней и нижней поверхностях профиля. Вне указанных полос поток остается невозмущенным. Как видно из общего решения волнового уравнения и из рис. 16, линии тока возмущенного движения ($\psi = \upsilon_\infty y + \psi' = \text{const}$) представляют собой кривые, которые могут быть получены параллельным переносом верхнего и нижнего контуров профиля соответственно вдоль характеристик первого и второго рода. Здесь необходимо отметить, что асимптотические методы теории малых возмущений показывают, что на больших расстояниях от профиля влияние малых второго порядка становится существенным уже в первом приближении и искажает картину течения, изображенную на рис. 16. Характеристики искривляются и перестают быть параллельными между собой.

С учетом уравнений (2.53) и (2.54) для нашего случая имеем

$$\upsilon'_x = -\frac{1}{M_\infty^2 - 1}\frac{\partial\psi'}{\partial y}; \qquad \upsilon'_y = -\frac{\partial\psi'}{\partial x}.$$

Из общего решения волнового уравнения гиперболического типа (2.68) найдем частные производные

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} = \pm\omega\upsilon_\infty h'_{1,2}(x \mp \omega y) \text{ и } \frac{\partial\psi'}{\partial x} = -\omega\upsilon_\infty h'_{1,2}(x \mp \omega y),$$

где штрих над h означает производную по всему аргументу, стоящему в круглой скобке.

Тогда получим следующее распределение возмущений, составляющих скорости:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon'_x &= \mp\frac{\omega\upsilon_\infty}{M_\infty^2-1}h'_{1,2}(x\mp\omega y);\\ \upsilon'_y &= \upsilon_\infty h'_{1,2}(x\mp\omega y), \end{aligned}\right\}$$

или, поскольку $\omega=\sqrt{M_\infty^2-1}$ для сверхзвукового потока, то:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon'_x &= \mp\frac{\upsilon_\infty}{\sqrt{M_\infty^2-1}}h'_{1,2}(x\mp\omega y);\\ \upsilon'_y &= \upsilon_\infty h'_{1,2}(x\mp\omega y), \end{aligned}\right\} \qquad (2.69)$$

Это распределение справедливо во всей области возмущенного движения. Из второго соотношения (2.69) можно найти угол отклонения $\theta_{1,2}$ касательной к линии тока в возмущенной области от линии тока невозмущенного потока. По определению линии тока и в силу малости угла θ: $\mathrm{tg}\theta_{1,2}\approx\theta_{1,2}=\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=\frac{\upsilon'_y}{\upsilon_\infty+\upsilon'_x}\approx\frac{\upsilon'_y}{\upsilon_\infty}=h'_{1,2}(x\mp\omega y)$.

Учитывая это равенство, можно записать предыдущие соотношения в виде:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon'_x &= \mp\frac{\upsilon_\infty}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\theta_{1,2};\\ \upsilon'_y &= \upsilon_\infty\theta_{1,2} \end{aligned}\right\} \qquad (2.70)$$

Эти равенства выражают основное свойство линеаризованного сверхзвукового потока: продольная и поперечная составляющие скорости возмущения пропорциональны местному углу наклона линии тока возмущенного движения по отношению к направлению невозмущенного потока и имеют местный (локальный) характер.

Тем же свойством обладает давление, плотность и другие характерные для потока величины, что принципиально отличает сверхзвуковой поток от дозвукового, в котором значения параметров в данной точке зависят от их распределения во всем потоке в целом.

Используя одинаковую как для дозвукового, так и для сверхзвукового линеаризованных потоков форму коэффициента давления $C_p=-\frac{2\upsilon'_x}{\upsilon_\infty}$, найдем с учетом последних соотношений выражение для коэффициента давления в любой точке возмущенного сверхзвукового потока:

$$C_p=\pm\frac{2h'_{1,2}(x\mp\omega y)}{\sqrt{M_\infty^2-1}}=\pm\frac{2\theta_{1,2}(x\mp\omega y)}{\sqrt{M_\infty^2-1}}.$$

Поскольку нас интересует C_p на поверхности (контура) профиля, где приближенно можно положить $y=\pm0$, то :

$$C_p(x) = \pm\frac{2h'_{1,2}(x)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \pm\frac{2\theta_{1,2}(x)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \ . \qquad (2.71)$$

Имея коэффициент давления, можно найти коэффициент подъемной силы C_y. Для сверхзвукового обтекания тонкого профиля формула Жуковского неприменима; C_y в этом случае находится как интеграл по контуру профиля разности коэффициентов давлений верхней и нижней кромок:

$$C_y = \oint C_p d\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{1}{b}\int_{x_A}^{x_B}\left(C_{p2} - C_{p1}\right)dx \ .$$

(Здесь b=AB – хорда профиля, приближенно равная разности x_B-x_A абсцисс точек B и A).

Подставляя сюда значения C_{p1} и C_{p2}, получим:

$$C_y = -\frac{2}{b\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\int_{x_F}^{x_B}\left(h'_2(x) + h'_1(x)\right)dx = -\frac{2}{b\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\frac{2(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} \ .$$

Здесь учтено, что $h'_{1,2}(x) = \dfrac{dy_{1,2}}{dx}$, а индексы 1,2 соответствуют верхней (1) и нижней (2) поверхностям контура).

Введем угол атаки профиля ε как острый угол между направлением хорды AB и общим потоком:

для малых углов атаки $tg\varepsilon \approx \varepsilon = \dfrac{(y_A - y_B)}{(x_A - x_B)}$, тогда $\dfrac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = -\varepsilon$,

и формула для коэффициента подъемной силы примет окончательный вид:

$$C_y = -\frac{4\varepsilon}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \ . \qquad (2.72)$$

Этот результат впервые был получен Аккеретом и получил название формулы Аккерета. Для таких профилей угол атаки $\varepsilon \approx \alpha$, где α- угол Маха. Как видно из этой формулы, в линеаризованной теории сверхзвукового обтекания тонкого профиля коэффициент подъемной силы не зависит от формы профиля, а только от угла атаки и числа Маха набегающего потока.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Задачи аэрогазодинамики разрывных течений в современной постановке близко связаны с новыми проблемами (аэродинамикой полета, космической техникой). Это более общая задача, чем интегрирование дифференциальных уравнений (т.к. при разрывах имеем дело с особы-

ми точками). Дифференциальные уравнения неплохо решаются для дозвуковых течений сплошных сред, при околозвуковых и сверхзвуковых течениях среда претерпевает разрывы, и надо решать в этих случаях не дифференциальные, а интегральные уравнения при наличии разрыва. Такие ученые, как Стодола, Ренкин и Риман, решали эти задачи в конце XIX века, причем Риман по праву считается крупнейшим специалистом по разрывным течениям.

Одна из особенностей сверхзвуковых течений заключается в том, что в ряде случаев основные параметры, характеризующие движение и состояние газа (давление, плотность, температура и скорость), не являются непрерывными функциями точек пространства, заполненного текущим газом. Опыты показывают, что при более или менее значительном торможении сверхзвукового потока в последнем возникают поверхности, при прохождении через которые величины параметров газа скачкообразно изменяются. Места резкого скачкообразного увеличения давления, плотности и температуры и уменьшения скорости носят название скачков уплотнения.

Возникновение скачков уплотнения объясняется характером распространения возмущений в сверхзвуковом потоке.

Как было сказано ранее, в дозвуковом потоке возмущения распространяются во всех направлениях, в том числе и против направления скорости потока. Поэтому волна повышенного давления, возникающая, например, перед телом, распространяясь вперед, деформирует набегающий поток, при этом линии тока искривляются уже перед телом. Поток как бы заранее приспосабливается к обтеканию тела. Вдоль нулевой линии тока происходит непрерывное уменьшение скорости от υ_∞ до $\upsilon=0$ в критической точке, а давление возрастает от p_∞ до давления торможения p_0. Отсюда следует, что в дозвуковом потоке скачки уплотнения не могут возникнуть.

В сверхзвуковом потоке возмущения против направления скорости не распространяются. Поэтому даже непосредственно перед обтекаемым телом поток не возмущен. При встрече с таким телом направление скорости потока внезапно изменяется. Это приводит к скачкообразному изменению величин скорости потока, давления, плотности и температуры.

При обтекании тупоносого тела появляется сильная волна повышенного давления, которая распространяется со скоростью, значительно превышающей скорость звука. По мере распространения волны повышенного давления интенсивность ее падает. Уменьшается при этом и скорость распространения волны. Поэтому скачок уплотнения возникает перед телом на таком расстоянии, когда скорость распространения волны повышенного давления становится равной составляющей скорости набегающего потока, направленной против движения волны. Расстояние отсоединенного криволинейного скачка уплотнения от тела зависит от формы тела и скорости невозмущенного потока υ_∞.

Очевидно, что чем больше υ_∞, тем ближе располагается скачок уплотнения к телу.

Скачок уплотнения, строго говоря, представляет собой слой весьма малой толщины (порядка длины свободного пробега молекул). Поэтому в теории скачков уплотнения математически их можно заменять поверхностями разрыва.

3.1. Сильные разрывы в газе. Прямые и косые скачки уплотнения

В случае полета со сверхзвуковой скоростью ($\upsilon > a$) перед телом возникает волна сжатия или ударная волна (скачок уплотнения). Известно, что всякое повышение давления (плотности), возникшее в каком-либо месте газовой среды, распространяется в ней с большой скоростью во все стороны в виде волн давления. Слабые волны давления движутся со скоростью звука, их изучением занимаются в акустике. Сильные волны давления распространяются со скоростями значительно бóльшими, чем скорость звука. Основная особенность сильной волны давления заключается в том, что фронт волны очень узок (толщина его порядка длины свободного пробега молекул), в связи с чем параметры состояния газа (давление, плотность, температура) изменяются скачком.

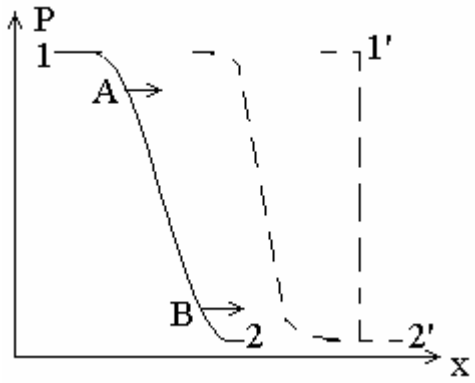


Рис. 18

Качественно это можно объяснить следующим образом. Пусть в некоторой области среды (рис. 18) произошло изменение давления, и вначале волна получила плавную форму 1AB2. На отдельных бесконечно узких участках волны величина давления возрастает незначительно, поэтому распространение такой волны происходит со скоростью звука. В области высоких сжатий (точка A) наблюдаются, естественно, более высокие температуры, чем в области малых сжатий (точка B), в силу чего верхняя часть волны давления движется быстрее, чем ее нижняя часть (так как скорость звука пропорциональна температуре среды). Таким образом, если даже вначале волна сжатия была пологой, то со временем она делается все круче и круче. Процесс этот остановится, и волна приобретет устойчивую форму только в тот момент, когда фронт волны сжатия станет совсем плоским (1'–2'). Следовательно, волны сжатия распространяются как скачки давления (разрывы), в связи с чем их и называют ударными волнами. После того как ударная волна образовалась, по обе стороны от ее фронта параметры состояния газа и его скорость будут иметь значения, различающиеся между собой на конечные величины (рис. 19).

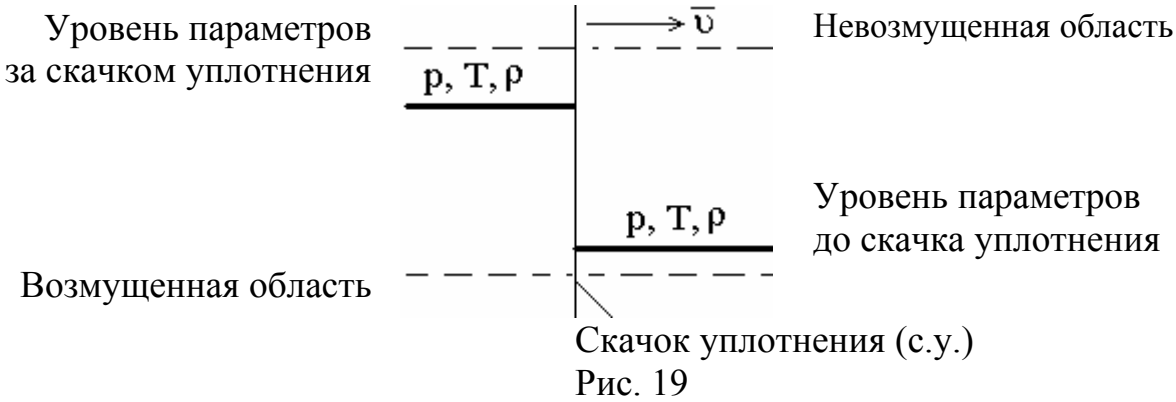


Рис. 19

Фронт ударной волны представляет собой поверхность (в нашем случае - плоскость) разрыва параметров состояния газа, перемещающуюся по газу и вызывающую скачкообразное изменение этих параметров, причем невозмущенный газ перед фронтом ударной волны имеет меньшее давление, плотность и температуру, чем после прохождения фронта.

Наличие такого скачкообразного изменения параметров газа (или точнее, очень резкого их изменения на участке длины, равной по порядку пути свободного пробега молекулы) показывает, что здесь имеет место внутренний молекулярный процесс, связанный с переходом кинетической энергии упорядоченного течения газа в кинетическую энергию беспорядочного теплового движения молекул. Этим объясняется разогрев газа в возмущённой области после прохода фронта ударной волны по сравнению с невозмущенной областью перед фронтом ударной волны. Повышение средней квадратичной скорости пробега молекул вызывает также возрастание давления и плотности газа при прохождении через него фронта ударной волны. Обратим движение, сообщив мысленно среде поступательное движение влево со скоростью распространения фронта ударной волны. Иначе говоря, будем рассматривать происходящее явление с точки зрения галилеевой системы координат, движущейся поступательно вместе с фронтом ударной волны. Тогда ударная волна окажется как бы остановленной, а газ приобретает стационарное движение.

Неподвижную ударную волну, плоскость которой перпендикулярна к направлению потока, называют прямым скачком уплотнения. Невозмущенный газ в новом рассмотрении уже не неподвижен, а подходит к прямому скачку уплотнения со скоростью перемещения фронта ударной волны.

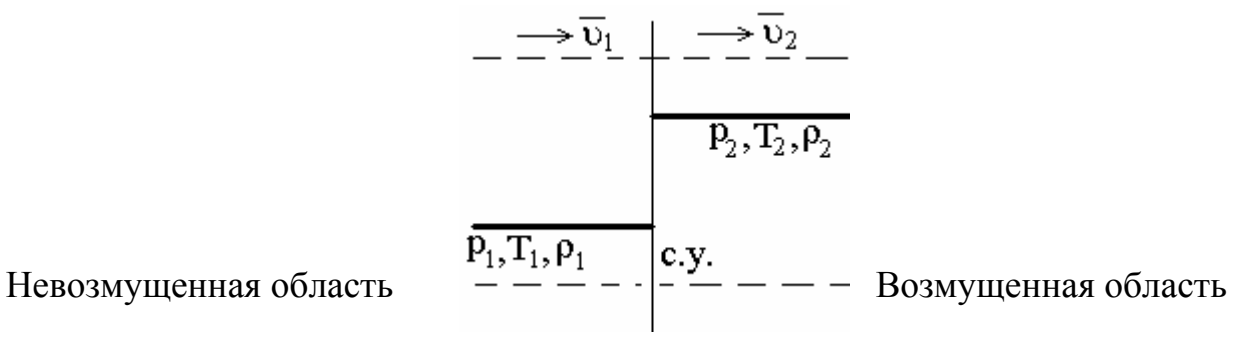


Рис. 20

Нарисуем новую картину возмущенной и невозмущенной области среды (рис. 20), где поток будет двигаться слева направо (так привычнее для рассмотрения и принято в механике сплошных сред). Условимся в дальнейшем обозначать индексом 1 параметры состояния среды и скорость потока перед скачком уплотнения, индексом 2 – после скачка уплотнения.

Скорость потока перед скачком уплотнения будет υ_1, после скачка уплотнения – υ_2, при этом очевидно $\upsilon_1>\upsilon_2$. Параметры состояния среды в возмущенной области будут иметь большие величины по сравнению с параметрами в невозмущенной области, т.е. $p_2>p_1$; $T_2>T_1$; $\rho_2>\rho_1$.

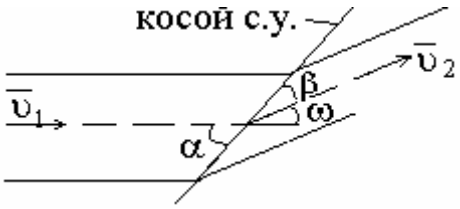


Рис. 21

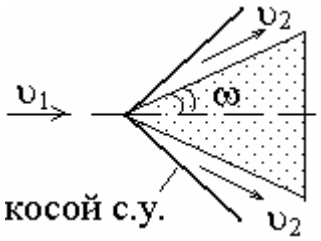


Рис. 22

Характерной особенностью прямого скачка уплотнения является то, что, пересекая его фронт, газовый поток не меняет своего направления, причем фронт прямого скачка располагается нормально к направлению потока. Помимо прямых скачков уплотнения существуют и так называемые косые скачки уплотнения. Фронт косого скачка располагается наклонно к направлению потока (рис. 21), т.е. угол между вектором скорости потока и плоскостью скачка отличен от 90°. Таким образом, косым скачком уплотнения называют неподвижную ударную волну, плоскость которой расположена под определенным углом (не равным 90°) к направлению потока. Косой скачок уплотнения получается в том случае, когда, пересекая фронт скачка, газовый поток изменяет свое направление. Например, при сверхзвуковом обтекании клиновидного тела (рис. 22), которое отклоняет поток от начального направления на угол ω, перед телом образуются плоские, косые скачки уплотнения, сходящиеся на его носике. Косой скачок уплотнения образуется и при обтекании конуса. В этом случае поверхностью

разрыва будет конус с вершиной в носике обтекаемого конуса. Таким образом, если до встречи потока с фронтом косого скачка вектор скорости υ_1 составлял с ним угол α, то после пересечения фронта поток отклоняется на угол ω, а угол между вектором скорости υ_2 и фронтом косого скачка уплотнения становится равным $\beta=\alpha-\omega$.

3.2. Математическая модель прямого скачка уплотнения

Решим задачу определения взаимосвязи потока до и после прямого скачка уплотнения. Чтобы найти связь между υ_1, ρ_1, p_1, T_1 и υ_2, ρ_2, p_2, воспользуемся условием стационарности потока и применим к нему теоремы сохранения массы, количества движения и энергии. Кроме того, будем считать, что газ является идеальным и массовые силы отсутствуют (т.е. пренебрегаем влиянием массовых сил, поскольку имеем дело с газами).

Тогда вышеперечисленные уравнения в интегральной форме запишутся следующим образом:

1) уравнение неразрывности:

$$\int_V \operatorname{div}(\rho\bar{\upsilon})dV = 0, \text{ так как } \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = 0; \tag{3.1}$$

2) уравнение движения в форме Эйлера

$$\int_V \operatorname{div}(\rho\upsilon^2)dV + \int_S P_n dS = 0; \tag{3.2}$$

3) уравнение энергии

$$\int_V \operatorname{div}\left[\rho\left(u + \frac{\upsilon^2}{2}\right)\upsilon\right]dV + \int_S P_n \upsilon_n dS = 0. \tag{3.3}$$

Все эти уравнения содержат под знаком интеграла дифференциальные соотношения, которые надо устранить. Применяя ко всем уравнениям теорему Остроградского-Гаусса, получим:

1) $$\int_S \rho\upsilon_n dS = 0, \tag{3.4}$$

2) $$\int_S (\rho\upsilon\upsilon_n + P_n)dS = 0, \tag{3.5}$$

3) $$\int_S \left[\rho\left(u + \frac{\upsilon^2}{2}\right)\upsilon_n + P_n\upsilon_n\right]dS = 0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим одномерное течение газа и будем считать, что в сечениях 1 (до поверхности разрыва) и 2 (после поверхности разрыва) поля скоростей и других величин однородны. В этих условиях закон сохранения массы при прохождении через скачок уплотнения (уравнение неразрывности) запишется в виде:

$$\rho_1\upsilon_1 = \rho_2\upsilon_2. \tag{3.7}$$

Здесь для внутренней задачи (течения газа в цилиндрической трубе) принято $S_1=S_2$, а для внешней задачи S опускается.

Уравнение движения при приведенных выше условиях дает второе искомое равенство – сохранение полного импульса ($p+\rho\upsilon^2$) при прохождении через скачок уплотнения:

$$p_1+\rho_1\upsilon_1^2 = p_2+\rho_2\upsilon_2^2 \tag{3.8}$$

Уравнение энергии преобразуется следующим образом:

$$\int_S \left[\rho\left(c_v T + \frac{\upsilon^2}{2} \right)\upsilon_n + P_n \upsilon_n \right] dS = 0 \tag{3.9}$$

(здесь заменили $u=c_vT$).

Произведя замену $u = c_v T = c_p T - RT = h - \frac{p}{\rho}$, получим:

$$\int_S \rho\left(h + \frac{\upsilon^2}{2} \right)\upsilon_n dS = 0 \tag{3.10}$$

(здесь энтальпия $h=C_pT$, а из уравнения Клапейрона $\frac{p}{\rho} = RT$).

Тогда при наших допущениях получим:

$$\rho_1\upsilon_1\left(h_1 + \frac{\upsilon_1^2}{2} \right) = \rho_2\upsilon_2\left(h_2 + \frac{\upsilon_2^2}{2} \right). \tag{3.11}$$

Учитывая, что $\rho_1\upsilon_1 = \rho_2\upsilon_2$, получим искомое третье уравнение:

$$h_1 + \frac{\upsilon_1^2}{2} = h_2 + \frac{\upsilon_2^2}{2}. \tag{3.12}$$

Это равенство представляет собой закон сохранения полной энтальпии $h_0 = h + \frac{\upsilon^2}{2}$ газа при его прохождении прямо через скачок уплотнения.

С учетом уравнения Клапейрона:

$$h_1 = C_p T_1 = \frac{C_p}{R} R T_1 = \frac{C_p}{R}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1}$$

(здесь $\frac{C_p}{R} = \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{C_p / C_v}{C_p / C_v - 1} = \frac{k}{k-1}$, где $R = C_p - C_v$ - соотношение Майера, $C_p / C_v = k$).

Аналогично $h_2 = \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2}$.

И тогда третье равенство можно записать в следующем виде:

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\upsilon_1^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{\upsilon_2^2}{2}. \tag{3.13}$$

Таким образом, получили систему из трех уравнений: неразрывности

течения (3.7), изменения количества движения одномерного потока (3,8) и уравнения энергии (3.13) - с тремя неизвестными величинами υ_2, p_2, ρ_2.

Мы видим, что независимо от характера движения (разрывного или нет) количество уравнений одно и то же. Но есть положительный момент: эти соотношения в интегральном виде можно непосредственно использовать для анализа физики явления разрывного процесса. Например, уравнения (3.8) и (3.13) дают новое уравнение процесса для сплошной среды. Причем адиабата Пуассона p/ρ^{γ}=const, пригодная для сплошной среды (при изоэнтропическом расширении, т.е. при постоянной энтропии), теряет смысл при разрывных процессах (сверхзвуковых процессах при наличии скачка уплотнения). Гюгонио первый обратил на это внимание и получил адиабату при разрыве сплошности среды (при возрастании энтропии), названную ударной адиабатой Гюгонио. Итак, получили исходные уравнения для разрывного течения:

неразрывности $\rho_1\upsilon_1 = \rho_2\upsilon_2$;

импульсов $p_1+\rho_1\upsilon_1^2 = p_2+\rho_2\upsilon_2^2$;

энергии $h_1 + \frac{\upsilon_1^2}{2} = h_2 + \frac{\upsilon_2^2}{2}$.

Эти уравнения положены в основу теории скачка уплотнения.

3.3. Ударная адиабата Гюгонио для разрывных течений

Обратим внимание на две особенности разрывных течений:

1) в условиях неразрывного течения существует изоэнтропическая адиабата Пуассона p/ρ^k=const. Но она недействительна для разрывных течений. Ударная адиабата Гюгонио лежит выше изоэнтропической адиабаты Пуассона, что означает возрастание энтропии при появлении разрывного течения. За счет роста энтропии появляется волновое сопротивление. Парадокс Даламбера при этом теряет смысл, так как появляется волновое сопротивление, и картина сверхзвукового обтекания тела имеет другой вид по сравнению с дозвуковым;

2) при неразрывном течении уравнение энергии и уравнение состояния приводят к уравнению процесса. Для разрывных течений этого не получается.

Выведем уравнение ударной адиабаты из уравнения импульсов

$$p_2-p_1=\rho_1\upsilon_1^2-\rho_2\upsilon_2^2 = \rho_1\upsilon_1(\upsilon_1-\upsilon_2), \qquad (3.14)$$

так как $\rho_1\upsilon_1 = \rho_2\upsilon_2$.

Умножим обе части уравнения (3.14) на $\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{\rho_1\upsilon_1}$ и получим:

$$(p_1 - p_2)\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{\rho_1\upsilon_1} = \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2.$$

Поскольку $\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{\rho_1\upsilon_1}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$ (т.к. $\upsilon_2/\upsilon_1=\rho_1/\rho_2$), то

$$(p_2-p_1)\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)=\upsilon_1^2-\upsilon_2^2. \qquad (3.15)$$

Уравнение энергии перепишем в виде:

$$\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_1}{\rho_1}+\frac{\upsilon_1^2}{2}=\frac{k}{k-1}\cdot\frac{p_2}{\rho_2}+\frac{\upsilon_2^2}{2}. \qquad (3.16)$$

Объединим два последних уравнения в одно. Преобразуем для этого уравнение (3.16) к виду

$$\frac{2k}{k-1}\cdot\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right)=\upsilon_1^2-\upsilon_2^2.$$

Уравнение импульсов (3.15) оставим без изменений.
Приравняем левые части обоих уравнений, т.е.

$$(p_2-p_1)\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)=\frac{2k}{k-1}\cdot\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right) \qquad (3.17)$$

Сгруппировав члены с p_1 и p_2, получим:

$$p_2\left[\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}-\frac{2k}{k-1}\frac{1}{\rho_2}\right]=p_1\left[\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}-\frac{2k}{k-1}\frac{1}{\rho_1}\right]$$

или

$$p_2\left[\frac{(k-1)\rho_2+(k-1)\rho_1-2k\rho_1}{(k-1)\rho_1\rho_2}\right]=p_1\left[\frac{(k-1)\rho_2+(k-1)\rho_1-2k\rho_2}{(k-1)\rho_1\rho_2}\right];$$

$$p_2\left[(k-1)\rho_2-(k+1)\rho_1\right]=p_1\left[(k-1)\rho_1-(k+1)\rho_2\right]. \qquad (3.18)$$

Умножив обе части равенства (3.18) на $(-1/\rho_1)$, получим:

$$p_2\left[(k+1)-(k-1)\frac{\rho_2}{\rho_1}\right]=p_1\left[(k+1)\frac{\rho_2}{\rho_1}-(k-1)\right].$$

Тогда
$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{(k+1)\frac{\rho_2}{\rho_1}-(k-1)}{(k+1)-(k-1)\frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

И окончательно

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\frac{(k+1)\rho_2}{(k-1)\rho_1}-1}{\frac{(k+1)}{(k-1)}-\frac{\rho_2}{\rho_1}}. \qquad (3.19)$$

Это и есть уравнение ударной адиабаты Гюгонио.

Итак, интегралы уравнений разрывного одномерного течения после

преобразований дают отличное от изоэнтропической адиабаты Пуассона $\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p_2}{\rho_2^k}$ выражение. Как только переходят к разрывному течению, то получают ударную адиабату Гюгонио.

Построим графики сравнения двух адиабат: изоэнтропической и ударной.

Ударная адиабата за исключением небольшой области лежит выше адиабаты Пуассона. График для газа с k=1,4 выглядит следующим образом (рис. 23):

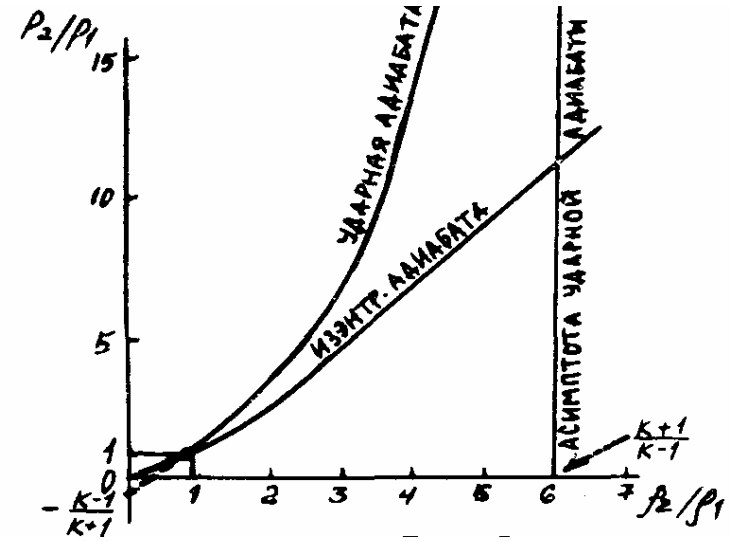


Рис. 23

В отличие от непрерывного движения сплошной среды с плавным изменением параметров вдоль направления распространения потока разрывное движение характеризуется конечным скачком параметров газа в некотором сечении. Отсюда можно сделать заключение, что прохождение идеального газа сквозь скачок уплотнения не является изоэнтропическим процессом, а сопровождается необратимым переходом механической энергии в тепловую.

В физическом отношении это означает, что при прохождении через скачок уплотнения энтропия возрастает:

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1}\left[\ln\frac{p_2}{\rho_2^k} - \ln\frac{p_1}{\rho_1^k}\right], \qquad (3.20)$$

где S_1 – энтропия до скачка, S_2- энтропия после скачка.

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1}\left[\ln\frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1^k}{\rho_2^k}\right] = \frac{R}{k-1}\left[\ln\frac{p_{2из}}{\rho_2^k}\cdot\frac{\rho_1^k}{p_1}\cdot\frac{p_2}{p_{2из}}\right].$$

В силу уравнения Пуассона (p/ρ^k =const) первые два члена составляют 1 и тогда

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1}\left[\ln\frac{p_2}{p_{2из}}\right]. \qquad (3.21)$$

Так как $p_2 > p_{2из}$ (см. рис. 23), следовательно $S_2 > S_1$ при разрыве сплошности. Отсюда следует, что в природе существует только прямой скачок уплотнения, а прямого скачка разрежения не существует, поскольку в этом случае энтропия будет убывать, а это невозможно в силу второго закона термодинамики (энтропия может либо оставаться постоянной, либо возрастать - третьего не дано).

Таким образом, волновое сопротивление, появляющееся при сверхзвуковом обтекании, характеризуется возрастанием энтропии.

3.4. Уравнение Прандтля для прямого скачка уплотнения

Получим необходимое для вывода соотношение из интегралов основных уравнений для скачка уплотнения. Возьмем уравнение сохранения полного импульса (3.I4): $p_2 - p_1 = \rho_1\upsilon_1^2 - \rho_2\upsilon_2^2$ или

$$\frac{p_2}{\rho_2\upsilon_2} - \frac{p_1}{\rho_1\upsilon_1} = \upsilon_1 - \upsilon_2$$ (из закона сохранения массы: $\rho_1\upsilon_1 = \rho_2\upsilon_2$).

Из интеграла Бернулли уравнения энергии следует, что перед скачком уплотнения имеет место следующее выражение:

$$h_1 = \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2} - \frac{\upsilon_1^2}{2}. \qquad (3.22)$$

Оно получается следующим образом.

Уравнение энергии записывается в виде:

$$h + \frac{\upsilon^2}{2} = \text{const},$$

где $h = C_p T = \frac{C_p kRT}{kR} = \frac{C_p}{kR}a^2 = \frac{C_v}{R}a^2 = \frac{a^2}{k-1}$,

так как $\frac{C_v}{R} = \frac{C_v}{C_p - C_v} = \frac{1}{k-1}$.

Тогда уравнение энергии будет иметь вид:

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{\upsilon^2}{2} = \text{const}.$$

Константу найдем из условия $a = a^*$ при $\upsilon = a^*$ для критического течения,

тогда $$\text{const} = \frac{a^{*2}}{k-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}.$$

Подставляя в уравнение энергии, получим

$$h + \frac{\upsilon^2}{2} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{\upsilon^2}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}.$$

Отсюда энтальпия потока перед скачком уплотнения равна $h_1 = \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2} - \frac{\upsilon}{2}$

, т.к. $a_1^2 = k\frac{p_1}{\rho_1}$.

За скачком уплотнения имеем:

$$h_2 = \frac{a_2^2}{k-1} = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2} - \frac{\upsilon_2^2}{2}. \qquad (3.23)$$

Выразив из уравнений (3.22) и (3.23) отношения p_1/ρ_1 и p_2/ρ_2 и подставив их в уравнение количеств движения $\frac{p_2}{\rho_2\upsilon_2} - \frac{p_1}{\rho_1\upsilon_1} = \upsilon_1 - \upsilon_2$, получим после преобразований:

$$\frac{k+1}{2k}(\upsilon_1 - \upsilon_2)\left(1 - \frac{a^{*2}}{\upsilon_1\upsilon_2}\right) = 0. \qquad (3.24)$$

Продемонстрируем этот вывод:

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{k+1}{2k} a^{*2} - \frac{k-1}{2k}\upsilon_1^2; \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{k+1}{2k} a^{*2} - \frac{k-1}{2k}\upsilon_2^2.$$

Подставив в уравнение количеств движения, получим:

$$\frac{k+1}{2k}\frac{a^{*2}}{\upsilon_2^2} - \frac{k-1}{2k}\upsilon_2^2 - \frac{k+1}{2k}\frac{a^{*2}}{\upsilon_1^2} + \frac{k-1}{2k}\upsilon_1^2 = \upsilon_1 - \upsilon_2.$$

Перенесем все члены в правую часть уравнения и сгруппируем:

$$\frac{k+1}{2k}(\upsilon_1 - \upsilon_2) + \frac{k+1}{2k}\left(\frac{a^{*2}}{\upsilon_1} + \frac{a^{*2}}{\upsilon_2}\right) = 0,$$

тогда $$\frac{k+1}{2k}(\upsilon_1 - \upsilon_2) + \frac{k+1}{2k}\frac{a^{*2}(\upsilon_1 - \upsilon_2)}{\upsilon_1\upsilon_2} = 0,$$

и окончательно $$\frac{k+1}{2k}(\upsilon_1 - \upsilon_2)\left(1 - \frac{a^{*2}}{\upsilon_1\upsilon_2}\right) = 0.$$

Так как $\upsilon_1 > \upsilon_2$, т.е. скорость перед скачком намного больше скорости после скачка, то $\frac{k+1}{2k}(\upsilon_1 - \upsilon_2) > 0$ и приходим к следующему уравнению:

$$1 - \frac{a^{*2}}{\upsilon_1\upsilon_2} = 0 \text{ или } \upsilon_1\upsilon_2 = a^{*2}. \qquad (3.25)$$

Это и есть уравнение Прандтля. Оно указывает на то, что если до скачка $\upsilon_1 > a^*$, то после скачка $\upsilon_2 < a^*$ (меньше критической скорости).

При прямом скачке уплотнения обязателен переход от сверхзвукового течения к дозвуковому, что сопровождается максимальным ростом энтро-

пии.

При косом скачке уплотнения сверхзвуковое обтекание может остаться тоже сверхзвуковым, но меньшей интенсивности.

Уравнение Прандтля при помощи скоростного коэффициента Чаплыгина можно записать следующим образом:

$$\lambda_1\lambda_2=1, \text{ где } \lambda_1 = \frac{\upsilon_1}{a^*};\ \lambda_2 = \frac{\upsilon_2}{a^*}, \tag{3.26}$$

а так как $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\frac{M}{\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M^2}}$, то уравнение Прандтля можно получить и в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{k+1}{2}}\frac{M_1}{\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{k+1}{2}}\frac{M_2}{\sqrt{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}}. \tag{3.27}$$

Отсюда
$$M_2 = \sqrt{\frac{\frac{k-1}{2}+\frac{1}{M_1^2}}{k-\frac{k-1}{2}\frac{1}{M_1^2}}} = \sqrt{\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{kM_1^2-\frac{k-1}{2}}}. \tag{3.28}$$

На этом соотношении можно построить аналог сверхзвуковой трубы. Если скорость набегающего потока на тело $M_1\to\infty$, то

$$M_2 \to \sqrt{\frac{k-1}{2k}} = 0.378.$$

Следовательно, если создать аэрогазодинамическую трубу со скоростью $M=0.4\approx120$ м/с, то смоделируем сверхзвуковую трубу для исследования течения газа за прямым скачком уплотнения.

Теперь ответим на вопрос: какие параметры потока остаются постоянными при прохождении через прямой скачок уплотнения?

Из уравнения энергии:

$$C_pT_1 + \frac{\upsilon_1^2}{2} = h_{1,0},\quad C_pT_2 + \frac{\upsilon_2^2}{2} = h_{2,0},$$

где C_pT_1 – энтальпия набегающего потока; C_pT_2 - энтальпия после скачка уплотнения; $h_{1,0}$ и $h_{2,0}$ – полная энтальпия. Согласно закону сохранения энергии $h_{1,0} = h_{2,0} = h_0$ или $T_{1,0} = T_{2,0} = T_0$ (если C_p = const). Тогда $a_{1,0}=a_{2,0}=a_0$; $T_1^* = T_2^* = T^*$, и, следовательно, $a_1^* = a_2^* = a^*$.

Итак, при прохождении через прямой скачок уплотнения энтальпия и температура адиабатически заторможенного потока сохраняют постоянную величину. Также сохраняют постоянную величину скорости звука, критические скорости до и после прямого скачка уплотнения. Кроме того, согласно формуле Клапейрона:

$$\frac{p_{2,0}}{\rho_{2,0}} = \frac{p_{1,0}}{\rho_{1,0}} \text{ или } \frac{p_2{}^*}{\rho_2{}^*} = \frac{p_1{}^*}{\rho_1{}^*}.$$

3.5. Изменение характерных параметров газа при прямом скачке уплотнения

За относительное изменение параметров при прямом скачке уплотнения принимается:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_0 - p_1}{p_1}; \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1}; \qquad \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_0 - T_1}{T_1}.$$

Все эти величины легко находятся при использовании полученных интегралов для нашей задачи.

1. Действительно, из закона сохранения полного импульса:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_0 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1\upsilon_1^2 - \rho_2\upsilon_2^2}{p_1} = \frac{\rho_1\upsilon_1^2}{p_1}\left(1 - \frac{\rho_2\upsilon_2^2}{\rho_1\upsilon_1^2}\right).$$

Из уравнения сохранения масс: $\rho_1\upsilon_1 = \rho_2\upsilon_2$, тогда $\frac{\rho_2\upsilon_2^2}{\rho_1\upsilon_1^2} = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$ и, следовательно, $\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_0 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1\upsilon_1^2}{p_1}\left(1 - \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) = \frac{k\rho_1\upsilon_1^2}{kp_1}\left(1 - \frac{\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1^2}\right)$. (3.29)

Так как из формулы Прандтля $\upsilon_1\upsilon_2 = a^{*2}$, то $\frac{\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1^2} = \frac{(a^*)^2}{\upsilon_1^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}$.

Поскольку $\frac{kp_1}{\rho_1} = a_1^2$, то $\upsilon_1^2 / a_1^2 = M_1^2$, и тогда

$$\frac{\Delta p}{p_1} = kM_1^2\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right). \qquad (3.30)$$

Применяя формулы перехода от λ_1 к M_1 и наоборот, т.е.

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\frac{M_1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2}}, \qquad M_1 = \sqrt{\frac{2}{k+1}}\frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}},$$

получим искомые соотношения:

а) $$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1}\cdot\frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2};$$

б) $$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\Delta p}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}\cdot\frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}; \qquad (3.31)$$

в) $\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1)$; г) $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1}(M_1^2 - 1)$.

2. $\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1$

Применяя к этому уравнению уравнение неразрывности $\rho_1\upsilon_1 = \rho_2\upsilon_2$,

получим: $\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} - 1 = \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_1\upsilon_2} - 1 = \frac{\upsilon_1^2}{a^{*2}} - 1 = \lambda_1^2 - 1$.

Тогда $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \lambda_1^2$; или $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2}$ (3.32)

3. $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{h_2 - h_1}{h_1}$.

Из закона сохранения полной энтальпии $h_1 + \frac{\upsilon_1^2}{2} = h_2 + \frac{\upsilon_2^2}{2}$ получим:

$$h_2 - h_1 = \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{2} \quad \text{и} \quad h_1 = C_p T_1.$$

Тогда $$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{2C_p T_1} = \frac{\upsilon_1^2}{2C_p T_1}\left(1 - \frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1^2}\right). \quad (3.33)$$

Умножим и разделим член перед скобкой уравнения (3.33) на kR, а член $\frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1^2}$ на υ_1^2; $\frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1^2}\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_1^2} = \frac{a^{*2}}{\upsilon_1^4} = \frac{1}{\lambda_1^4}$.

Тогда

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\upsilon_1^2 kR}{2C_p k\frac{p_1}{\rho_1}}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4}\right) = \frac{\upsilon_1^2}{2a_1^2} \cdot \frac{k(C_p - C_v)}{C_p}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4}\right) = \frac{k-1}{2}M_1^2\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4}\right), \quad (3.34)$$

т.к. $\frac{(C_p - C_v)}{C_p} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$.

Если взять $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\frac{M_1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2}}$, то можно после преобразований написать это выражение через M_1:

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{2(k-1)}{(k-1)^2 M_1^2}(M_1^2 - 1)(1 + kM_1^2). \quad (3.35)$$

Если взять выражение $M_1 = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}}$, то

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{(k-1)}{(k+1)} \frac{\lambda_1^4 - 1}{\lambda_1^2\left(1 - \frac{(k-1)}{(k+1)}\lambda_1^2\right)}. \qquad (3.36)$$

И наконец $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{\Delta T}{T_1}$, т.е. температура T_2 за скачком уплотнения всегда больше температуры T_1 до прямого скачка уплотнения (за счет необратимого превращения механической энергии в тепловую).

Тогда $$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(k-1)}{(k-1)^2 M_1^2}(M_1^2 - 1)(1 + kM_1^2) \qquad (3.37)$$

или $$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{(k-1)}{(k+1)} \frac{\lambda_1^4 - 1}{\lambda_1^2\left(1 - \frac{(k-1)}{(k+1)}\lambda_1^2\right)}. \qquad (3.38)$$

Как известно, при наличии необратимых потерь в адиабатической системе возрастает ее энтропия. Для определения этого возрастания воспользуемся следующей формулой:

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1}\left[\ln \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1^k}{\rho_2^k}\right]. \qquad (3.39)$$

Применим это равенство к параметрам адиабатически и изоэнтропически заторможенного газа, что допустимо, т.к. изэнтропическое торможение не влияет на приращение энтропии.
Тогда получим

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1}\left[\ln \frac{p_{2,0}}{p_{1,0}} \frac{\rho_{1,0}^k}{\rho_{2,0}^k}\right] \qquad (3.40)$$

Но из формулы Клапейрона следует: $\rho_{1,0}/\rho_{2,0} = p_{1,0}/p_{2,0}$, (3.41)

тогда $$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{1}{k-1}\ln\left(\frac{p_{2,0}}{p_{1,0}}\right)^{1-k} = -\ln\left(\frac{p_{2,0}}{p_{1,0}}\right) = -\ln æ. \qquad (3.42)$$

Эта формула выражает асимптотический закон роста энтропии при прохождении газа через скачки большой интенсивности. При сравнительно малой интенсивности скачков уплотнения, т.е. при M, близком к 1, будет наблюдаться слабое изменение энтропии, т.е. около-звуковые явления можно с достаточной степенью приближения рассматривать как изоэнтропические.

3.6. Математическая модель косого скачка уплотнения

Элементарную теорию косого скачка уплотнения можно рассматривать на примере течения газового потока внутри тупого угла. При течении внутри тупого угла сверхзвукового потока газа со скоростью υ_1 создается косой скачок уплотнения, который образует с горизонтальной осью угол β (рис. 24). Надо отметить, что если при прямом скачке уплотнения согласно теореме Прандтля сверхзвуковое течение после скачка уплотнения непременно становится дозвуковым, то при прохождении потока через косой скачок уплотнения сверхзвуковая скорость может сохраниться и за скачком уплотнения.

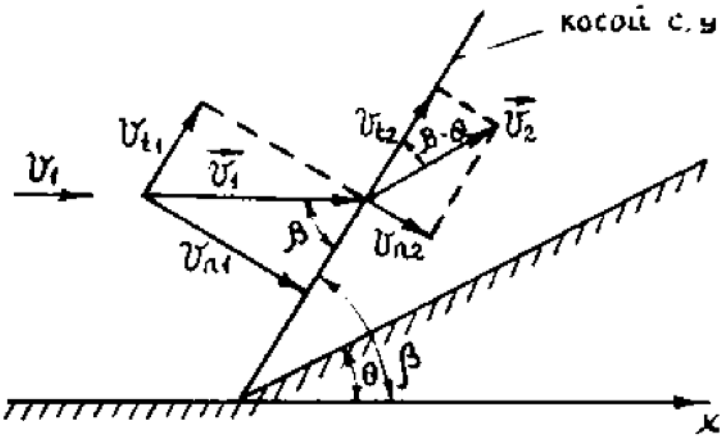


Рис. 24

Разложим вектор скорости $\vec{\upsilon}_1$ на две составляющие: нормальную υ_{1n} (перпендикулярную линии скачка уплотнения) и касательную υ_{1t} (параллельную линии скачка уплотнения). При прохождении потока через косой скачок уплотнения вектор скорости $\vec{\upsilon}_2$ потока имеет направление, параллельное ограничивающей поверхности. Разложим вектор скорости $\vec{\upsilon}_2$ также на две составляющие: υ_{2n} и υ_{2t} (см. рис. 24).

При исследовании косого скачка уплотнения будем использовать следующие интегральные соотношения:

1) уравнение неразрывности (закон сохранения массы), записанное для нормальных составляющих скоростей, полученных при косом скачке уплотнения:

$$\rho_1\upsilon_{1n} = \rho_2\upsilon_{2n}; \tag{3.43}$$

2) закон сохранения полного импульса в проекции на линию разрыва (импульса, связанного с касательной скоростью, которая направлена по косому скачку уплотнения):

$$\rho_1\upsilon_{1n}\upsilon_{1t} = \rho_2\upsilon_{2n}\upsilon_{2t}. \tag{3.44}$$

То же в проекции на нормаль к линии разрыва (или теорема об изменении

импульсов для нормальных составляющих скоростей):

$$p_1 + \rho_1 \upsilon_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 \upsilon_{2n}^2 ; \qquad (3.45)$$

3) уравнение энергии (закон сохранения полной энтальпии):

$$h_1 + \frac{\upsilon_{1n}^2}{2} + \frac{\upsilon_{1t}^2}{2} = h_2 + \frac{\upsilon_{2n}^2}{2} + \frac{\upsilon_{2t}^2}{2} \quad . \qquad (3.46)$$

Из уравнения (3.43) с учетом (3.44) следует, что

$$\upsilon_{1t} = \upsilon_{2t} = \upsilon_t . \qquad (3.47)$$

Это равенство указывает на то, что касательные составляющие скоростей до и после косого скачка уплотнения одинаковы. Иными словами, косой скачок уплотнения не вызывает изменения характера течения касательных скоростей до и после скачка уплотнения.

Тогда система уравнений (интегральных соотношений) будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \ \rho_1 \upsilon_{1n} = \rho_2 \upsilon_{2n} \\ &2)\ \ p_1 + \rho_1 \upsilon_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 \upsilon_{2n}^2 \\ &3)\ \ h_1 + \frac{\upsilon_{1n}^2}{2} = h_2 + \frac{\upsilon_{2n}^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

Видно, что полученная система уравнений для косого скачка уплотнения отличается от системы уравнений, характеризующих прямой скачок уплотнения. Система уравнений для косого скачка уплотнения получается из системы уравнений для прямого скачка уплотнения заменой векторов скоростей $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ на их нормальные составляющие υ_{1n} и υ_{2n}. Следовательно, все, что было сказано относительно прямого скачка уплотнения, сохраняет свой смысл и для косого скачка уплотнения, если во всех соотношениях, полученных для прямого скачка уплотнения, заменить векторы скоростей $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ на их нормальные составляющие.

Тогда уравнение Прандтля для косого скачка уплотнения будет выглядеть следующим образом:

$$\upsilon_{1n} \upsilon_{2n} = \bar{a}^{*2}, \qquad (3.48)$$

где

$$\bar{a}^{*2} = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} \upsilon_t^2 . \qquad (3.49)$$

Это значение для $\bar{a}^{*2}$ получается из рассмотрения уравнения интеграла энергии в следующем виде:

$$h + \frac{\upsilon^2}{2} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{\upsilon^2}{2} = \frac{k+1}{2(k-1)} a^{*2} .$$

Для нашего случая:

$$\frac{a^2}{k-1}+\frac{\upsilon_n^2}{2}+\frac{\upsilon_t^2}{2}=\frac{k+1}{2(k-1)}a^{*2}. \qquad (3.50)$$

Отсюда следует:

$$\frac{\upsilon_n^2}{2}+\frac{\upsilon_1^2}{k-1}=\frac{k+1}{2(k-1)}\left(\upsilon^{*2}-\frac{k-1}{k+1}\upsilon_1^2\right). \qquad (3.51)$$

При наличии косого скачка уплотнения критическая скорость $\bar{a}^{*2}$ оказывается несколько меньшей, чем при прямом скачке уплотнения (a^{*2}).

Теорему Прандтля можно также записать в виде:

$$\bar{\lambda}_{1n}\bar{\lambda}_{2n}=1, \qquad (3.52)$$

где $\bar{\lambda}_{1n}=\frac{\upsilon_{1n}}{\bar{a}^*}$, $\bar{\lambda}_{2n}=\frac{\upsilon_{2n}}{\bar{a}^*}$. (3.53)

Относительное изменение характерных параметров при косом скачке уплотнения можно получить из аналогичных соотношений для прямого скачка уплотнения, если вместо векторов скоростей $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ в выражениях для M и λ поставить их нормальные компоненты:

1) Например $\frac{p_2}{p_1}=1+\frac{2k}{k+1}(M_{1n}^2-1)$, (3.54)

где $M_{1n}=\frac{\upsilon_{1n}}{a_1}$. Из треугольника скоростей $\upsilon_{1n}=\upsilon_1\sin\beta$, тогда $M_{1n}=\frac{\upsilon_1\sin\beta}{a_1}=M_1\sin\beta$, и окончательно:

$$\frac{p_2}{p_1}=1+\frac{2k}{k+1}(M_1^2\sin\beta-1). \qquad (3.55)$$

Это же выражение через λ_1 выглядит следующим образом:

$$\frac{p_2}{p_1}=1+\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{\bar{\lambda}_{1n}^2-1}{1-\frac{k-1}{k+1}\bar{\lambda}_{1n}^2}. \qquad (3.56)$$

Из треугольника скоростей: $\upsilon_{1t}=\upsilon_1\cos\beta$, тогда с учетом (3.49):

$$\bar{a}^{*2}=a^{*2}-\frac{k-1}{k+1}\upsilon_1^2\cos^2\beta$$

Из уравнения (3.53):

$$\bar{\lambda}_{1n}^2=\frac{\upsilon_1^2\sin^2\beta}{a^{*2}-\frac{k-1}{k+1}\upsilon_1^2\cos^2\beta}=\frac{\lambda_1^2\sin^2\beta}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta}=\frac{\lambda_1^2(1-\cos^2\beta)}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta}. \qquad (3.57)$$

Следовательно, с учетом формул (3.56) и (3.57) имеем:

$$\frac{p_2}{p_1}=1+\frac{2k}{k+1}\frac{[(\lambda_1^2-\lambda_1^2\cos^2\beta)/\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta\right)]-1}{1-\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{(\lambda_1^2-\lambda_1^2\cos^2\beta)}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta}}=$$

$$=1+\frac{2k}{k+1}\frac{\lambda_1^2-\lambda_1^2\cos^2\beta-1+\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2+\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta}.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{p_2}{p_1}=1+\frac{2k}{k+1}\frac{(\lambda_1^2-1)-\frac{2}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}. \qquad (3.58)$$

2) Аналогично:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\frac{k+1}{2}M_1^2\sin^2\beta}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2\sin^2\beta}=\frac{\frac{k+1}{2}M_{1n}^2}{1+\frac{k-1}{2}M_{1n}^2} \qquad (3.59)$$

или

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\overline{\lambda}_{1n}^2=\frac{\lambda_1^2(1-\cos^2\beta)}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta}. \qquad (3.60)$$

3)
$$\frac{T_2}{T_1}=1+\frac{2(k-1)}{(k+1)^2M_1^2\sin^2\beta}(M_1^2\sin^2\beta-1)(1-kM_1^2\sin^2\beta)=$$

$$=1+\frac{2(k-1)}{(k+1)^2M_{1n}^2}(M_{1n}^2-1)(1-kM_{1n}^2). \qquad (3.61)$$

И, наконец, останутся теми же самыми, что и для прямого скачка уплотнения, выражения: $h_{1,0}=h_{2,0}=h_0$; $T_{1,0}=T_{2,0}=T_0$; $a_{1,0}=a_{2,0}=a_0$, $T_1^*=T_2^*=T^*$ и $a_1^*=a_2^*=a^*$.

Останется той же и ударная адиабата Гюгонио.

3.7. Ударная поляра

Из треугольников скоростей перед и за косым скачком уплотнения (рис. 24) следует:

$$\upsilon_{1n} = \upsilon_1 \sin\beta; \qquad \upsilon_{2n} = \upsilon_2 \sin(\beta - \theta),$$

где θ - половинный угол клина, он же – угол отклонения потока за скачком; β - угол, образованный линией косого скачка уплотнения с направлением набегающего потока (вектора скорости $\vec{\upsilon}_1$)

$$\upsilon_{1t} = \upsilon_{2t} = \upsilon_1\cos\beta = \upsilon_2\cos(\beta-\theta) = \upsilon_1.$$

Для проекций скоростей на оси прямоугольной декартовой системы координат имеем:

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_1,\ \upsilon_{1y} = 0; \quad \upsilon_{2x} = \upsilon_2\cos(\beta-\theta), \quad \upsilon_{2y} = \upsilon_2\sin(\beta-\theta).$$

Еще: $\upsilon_{1n} = \upsilon_{1x} \sin\beta; \quad \upsilon_{2n} = \upsilon_{2x} \sin\beta - \upsilon_{2y}\cos\beta;$

$$\upsilon_{1t} = \upsilon_{2t} = \upsilon_t = \upsilon_{1x}\cos\beta = \upsilon_{2x}\cos\beta + \upsilon_{2y}\sin\beta = \upsilon_1\cos\beta.$$

Из последнего соотношения находим:

$$\upsilon_{2y}\sin\beta = (\upsilon_1 - \upsilon_{2x})\cos\beta \Rightarrow$$

а) $\sin\beta = \dfrac{\upsilon_1 - \upsilon_{2x}}{\upsilon_{2y}/\cos\beta} = \dfrac{\upsilon_1 - \upsilon_{2x}}{N}$;

б) $\cos\beta = \dfrac{\upsilon_{2y}}{N}$.

С учетом предыдущих соотношений: $N = \sqrt{(\upsilon_1 - \upsilon_{2x})^2 + \upsilon_{2y}^2}$.

Эти соотношения позволяют найти выражение касательных и нормальных компонент векторов скоростей $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ через их декартовые проекции:

$$\upsilon_t = \upsilon_1\cos\beta \to \upsilon_t = \frac{\upsilon_1\upsilon_{2y}}{N};$$

$$\upsilon_{1n} = \upsilon_1\sin\beta \to \upsilon_{1n} = \frac{\upsilon_1}{N}(\upsilon_1 - \upsilon_{2x});$$

$$\upsilon_{2n} = \upsilon_{2x}\sin\beta - \upsilon_{2y}\cos\beta \to \upsilon_{2n} = \frac{1}{N}[\upsilon_{2x}(\upsilon_1 - \upsilon_2) - \upsilon_{2y}^2.$$

Используем формулу Прандтля для косого скачка уплотнения в виде:

$$\upsilon_{1n}\upsilon_{2n} = \bar{a}^{*2}.$$

Подставим туда выражения для υ_{1n} и υ_{2n} через декартовы проекции векторов скоростей и после преобразований получим:

$$\upsilon_{2y}^2 = \frac{(\upsilon_1 - \upsilon_{2x})^2(\upsilon_1\upsilon_{2x} - a^{*2})}{a^{*2} + \dfrac{2}{k+1}\upsilon_1^2 - \upsilon_1\upsilon_{2x}}. \tag{3.62}$$

Деля обе части этого равенства на a^{*2} или на a_1^2, перепишем его в следующих видах:

$$\left(\frac{\upsilon_{2y}}{a^*}\right)^2 = \frac{(\lambda_1 - \dfrac{\upsilon_{2x}}{a^*})^2(\lambda_1\dfrac{\upsilon_{2x}}{a^*} - 1)}{1 + \dfrac{2}{k+1}\lambda_1^2 - \lambda_1\dfrac{\upsilon_{2x}}{a^*}}, \tag{3.63}$$

$$\left(\frac{\upsilon_{2y}}{a_1}\right)^2 = \frac{\left(M_1 - \frac{\upsilon_{2x}}{a_1}\right)^2 \left[M_1 \frac{\upsilon_{2x}}{a_1} - \left(\frac{a^*}{a_1}\right)^2\right]}{\left(\frac{a^*}{a_1}\right)^2 + \frac{2}{k+1} M_1^2 - M_1 \frac{\upsilon_{2x}}{a_1}}. \qquad (3.64)$$

Эти соотношения представляют собой уравнения семейства кривых соответственно в плоскостях (υ_{2x}/a^*; υ_{2y}/a^*) или (υ_{2x}/a_1; υ_{2y}/a_1) с параметрами λ_1 и M_1. Полученные семейства представляют собой геометрические места точек концов вектора скорости $\vec{\upsilon}_2$ за косым скачком уплотнения, отнесенного в первом случае к a^* и во втором - к a_1, причем в качестве параметров семейств используется величина скорости $\vec{\upsilon}_1$ до скачка, отнесенная к a^* или a_1. Кривые этих семейств представляют собой строфоиды (их еще называют гипоциссоидами или декартовыми листами).

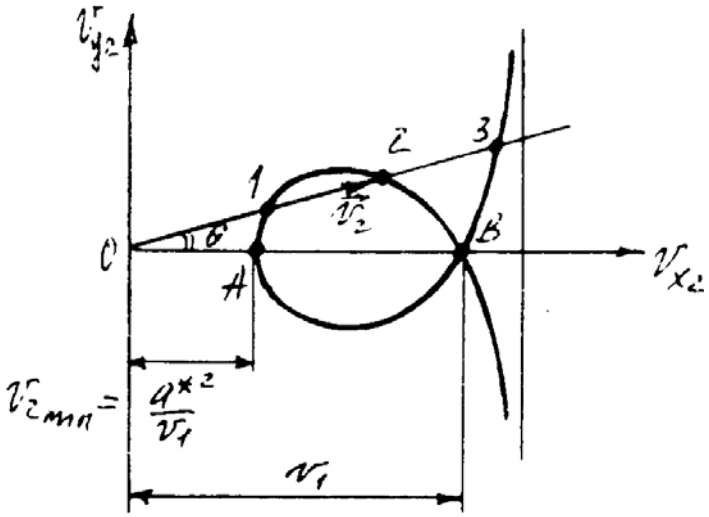


Рис. 25

На рис. 25 в размерных координатах (υ_{2x}; υ_{2y}) показана одна из таких строфоид. Она имеет асимптоту, определяемую следующим выражением:

$$\upsilon_{2x} = \frac{2}{k+1}\upsilon_1 + \frac{a^{*2}}{\upsilon_1}. \qquad (3.65)$$

Вертикальная составляющая скорости υ_2 обращается в нуль ($\upsilon_{2y}=0$) в двух случаях:

1) в точке B, в которой

$$\upsilon_{2x} = \upsilon_2 = \upsilon.$$

При этом величина и направление скорости не меняются, т.е. скачок уплотнения вырождается в слабую волну возмущения;

2) в точке A, в которой $\upsilon_{2x} = \upsilon_2 = a^{*2}/\upsilon_1$ или $\upsilon_1 \upsilon_2 = a^{*2}$ (уравнение Прандтля для прямого скачка уплотнения).

В этом случае скорость υ_2 имеет минимальное значение при заданной сверхзвуковой скорости υ_1, следовательно, скачок уплотнения имеет в точке A наибольшую интенсивность.

Луч, проведенный из начала координат под углом θ, равным повороту потока (или углу полураствора клина), пересекает строфоиду в трех точках 1, 2, 3 и, таким образом, определяет три значения вектора скорости $\vec{\upsilon}_2$ за косым скачком уплотнения. Какие же из этих трех точек имеют физический смысл?

Поскольку скорость в точке 3 больше скорости в точке B (см. рис. 25), т.е. скорость υ_2 в этой точке больше υ_1, что является невозможным, т.к. за

косым скачком уплотнения происходит торможение потока (наличие скорости $\upsilon_2 > \upsilon_2$ свидетельствует о существовании скачка разрежения, что в термодинамическом отношении не имеет места из-за уменьшения энтропии, а это невозможно). Поэтому точка 3 и вообще обе бесконечные ветви строфоиды, расположенные вправо от точки B и уходящие к асимптоте, являются нерабочими. Следовательно, рабочими точками, имеющими физический смысл, могут быть только точки 1 и 2.

При определенных углах обтекания клина или сверхзвукового течения внутри тупого угла за косыми скачками уплотнения может наблюдаться и сверхзвуковое течение, следовательно, интенсивность косого скачка уплотнения всегда меньше прямого скачка уплотнения, поскольку после прямого скачка уплотнения скорость потока всегда дозвуковая.

Так как точка 3 противоречит второму закону термодинамики (не реализуется), то ударную поляру часто изображают так (рис. 26):

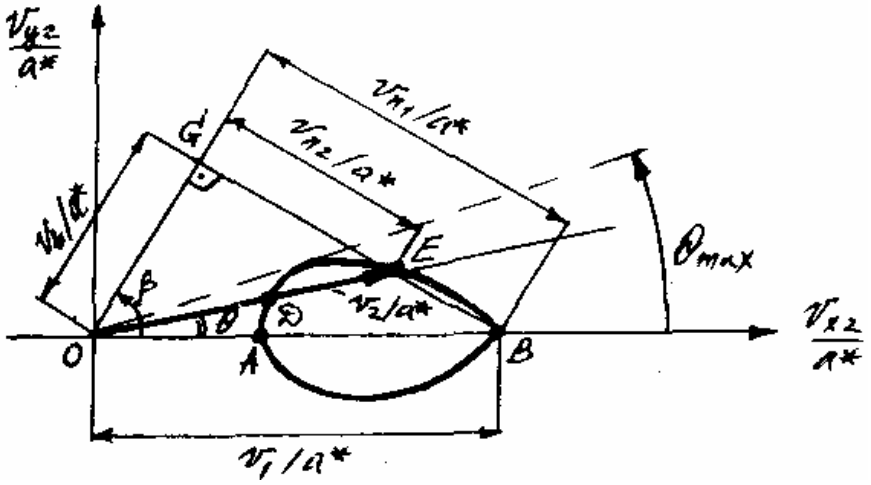


Рис. 26

Такая диаграмма в координатах (υ_{2x}/a^*; υ_{2y}/a^*) позволяет весьма просто найти все основные величины: υ_t, υ_{1n}, υ_{2n} и угол β, характеризующий косой скачок уплотнения. Для этого из начала координат (см. рис. 27) под углом θ (угол полураствора клина, или угол отклонения потока за скачком уплотнения) проводят прямую линию до пересечения с полярой (например, точка E). Затем из точки B через точку E проводят прямую линию и к ней из начала координат восстанавливают перпендикуляр (линия OG). Тогда угол GOB=β, а отрезок JG представляет собой касательную составляющую υ_t скоростей $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ (т.к. $\upsilon_t = \upsilon_1\cos\beta$ или OG=OBcosβ), деленную на a*. Отрезок GE представляет собой нормальную составляющую υ_{2n} скорости $\vec{\upsilon}_2$ ($\upsilon_{2n} = \upsilon_2\sin(\beta-\theta)$ или GE=OEsin(β-θ), деленную на a*. Отрезок BG представляет собой нормальную составляющую υ_{1n} скорости $\vec{\upsilon}_1$ ($\upsilon_{1n}=\upsilon_1\sin\beta$ или BG=OBsinβ), деленную на a*. Аналогично можно найти параметры потока по этой диаграмме и для точки D, также характеризующей отношение υ_2/a^*, но для другого возможного направления косого скачка уплотнения

β’ (причем β’>β). Поскольку в точке D скорость $\vec{\upsilon}_2$ меньше скорости $\vec{\upsilon}_2$ в точке E (при одной и той же скорости $\vec{\upsilon}_1$), то, следовательно, точке D соответствует косой скачок большей интенсивности, или по-другому, большим углам соответствуют косые скачки уплотнения большей интенсивности.

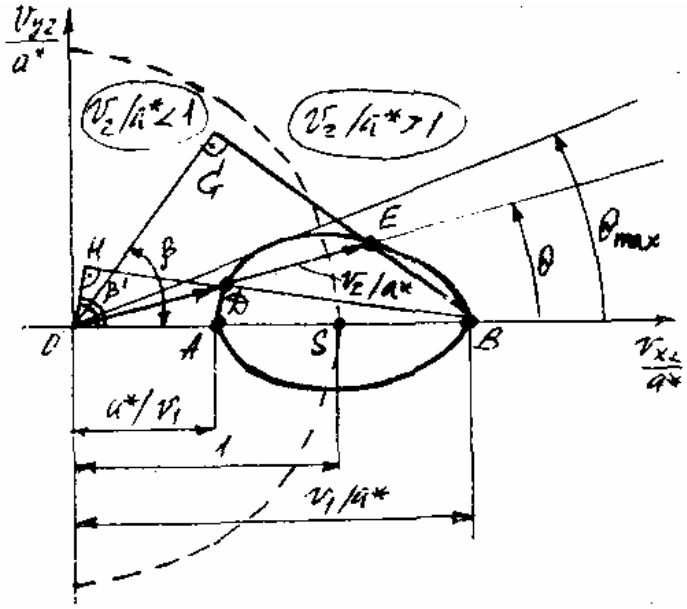
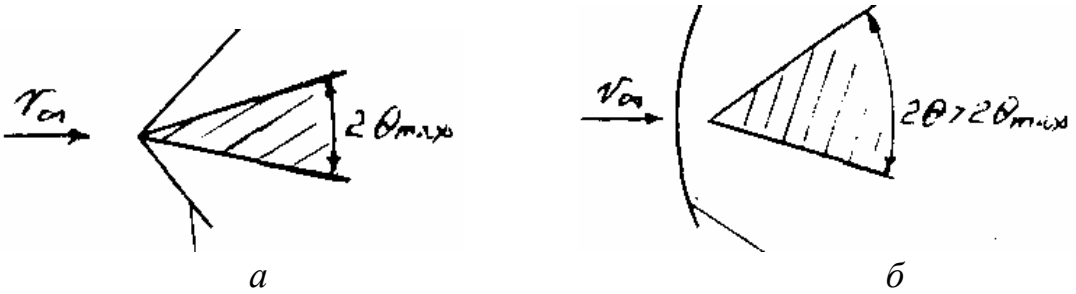


Рис. 27

По условию набегающий поток является сверхзвуковым, следовательно, отрезок OB=υ_1/a*>1. С другой стороны, из уравнения (3.62) легко заключить, что точка A пересечения строфоиды с осью υ_{2x}/a* (т.е. при υ_{2y}=0) будет иметь абсциссу $OA = \frac{a^*}{\upsilon_1} < 1$ (т.к. υ_1>a*, поток сверхзвуковой). Отсюда следует, что на оси υ_{2x}/a* между точками A и B будет находиться точка S, соответствующая критической скорости, т.е. отрезок OS=1 (причем в этой точке выполняется условие инверсии OA·OB=OS^2). Окружность радиуса OS=1 разграничивает области до- и сверхзвуковых течений (υ_2/a*<1 и υ_2/a*>1) . Другими словами, окружность радиуса OS=1 очерчивает на строфоиде области, где скорости υ_2 за косым скачком уплотнения могут быть дозвуковыми (υ_2/a*<1) и сверхзвуковыми (υ_2/a*>1). Отметим также, что существует такое значение угла $\theta=\theta_{max}$, при котором точки D и E сольются в одну, и ей будет отвечать лишь одно значение угла β и лишь одно расположение косого скачка уплотнения. Это будет предельный случай так называемого присоединенного скачка уплотнения (рис. 28, *а*).



а *б*

Рис. 28

Если же $\theta>\theta_{max}$, то образуется отсоединенный криволинейный скачок уплотнения (рис. 28, *б*), расчет которого является более сложной задачей, чем было изложено выше. Элементарная теория косого скачка уплотнения действительна лишь при обтекании клина или течения внутри тупого угла до таких углов θ_{max}, при которых скачок уплотнения является присоединенным. Следовательно, нужно всегда сверять по ударной поляре заданный угол θ с углом θ_{max}, так как все приведенные соотношения справедливы лишь для углов $\theta<\theta_{max}$.

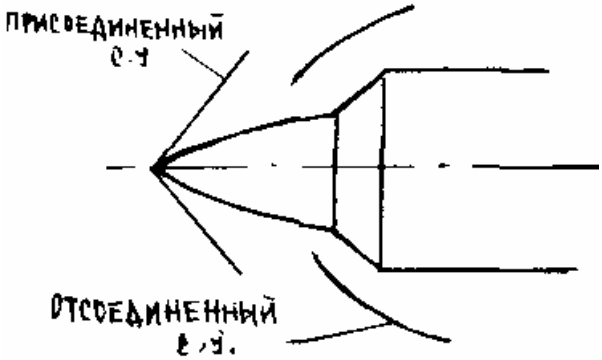


Рис.29

В инженерной практике избегают делать обводы тел, движущихся в потоке, с углами $\theta>\theta_{max}$ (этот случай бывает только для неудобообтекаемых тел (рис.29), но такие контуры стараются не делать). Определим связь между углами β и θ при заданном числе M_1 набегающего потока. С этой целью воспользуемся соотношением Прандтля для косого скачка уплотнения: $\upsilon_{1n}\upsilon_{2n} = \bar{a}^{*2}$. Учитывая, что $\upsilon_{1n}=\upsilon_1\sin\beta$, $\upsilon_{2n} = \upsilon_2 \sin(\beta-\theta)$, получим:

$$\upsilon_{1n}\upsilon_{2n} = \upsilon_1 \sin(\beta)\cdot\upsilon_2 \sin(\beta-\theta) = \upsilon_1^2 \sin\beta\cos\beta\cdot \mathrm{tg}(\beta-\theta) = \bar{a}^{*2},$$

поскольку $\upsilon_t = \upsilon_2 \cos(\beta-\theta) = \upsilon_1 \cos(\beta)$, откуда $\upsilon_2 = \dfrac{\cos\beta}{\cos(\beta-\theta)}$.

Тогда: $$\upsilon_1^2 \sin\beta\cos\beta\cdot \mathrm{tg}(\beta-\theta) = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1}\upsilon_1^2\cos^2\beta = \bar{a}^{*2}. \qquad (3.66)$$

Из соотношения (3.66) получается зависимость между углами β, θ и скоростным коэффициентом λ_1.

Разделим обе части этого равенства на a^{*2}:

$$\lambda_1^2 \sin\beta\cos\beta\cdot \mathrm{tg}(\beta-\theta) = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2\cos^2\beta,$$

$$\lambda_1^2\cos^2\beta\cdot\left(\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}(\beta-\theta) + \frac{k-1}{k+1}\right) = 1$$

и тогда

$$\cos^2\beta\cdot\left(\mathrm{tg}\beta\cdot\mathrm{tg}(\beta-\theta)+\frac{k-1}{k+1}\right)=1/\lambda_1^2. \qquad (3.67)$$

Заменяя в уравнении (3.67) λ_1 на число Маха M_1 по формуле

$$\frac{1}{\lambda_1^2}=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\frac{1}{M_1^2},$$

получим:

$$\frac{\mathrm{tg}(\beta-\theta)}{\mathrm{tg}\beta}=-\frac{k-1}{k+1}\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{M_1^2\sin^2\beta},$$

$$\frac{\mathrm{tg}(\beta-\theta)}{\mathrm{tg}\beta}=\frac{k-1}{k+1}+\frac{2}{k+1}\frac{1}{M_1^2\sin^2\beta},$$

$$\frac{\mathrm{tg}(\beta-\theta)}{\mathrm{tg}\beta}=\frac{(k-1)M_1^2\sin^2\beta+2}{(k+1)M_1^2\sin^2\beta}=\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2\sin^2\beta+2}{\frac{k+1}{2}M_1^2\sin^2\beta}. \qquad (3.68)$$

Разрешая равенство (3.68) относительно $\mathrm{tg}\theta$, получим:

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{\sin^2\beta-\frac{1}{M_1^2}}{\frac{k+1}{2}-\sin^2\beta+\frac{1}{M_1^2}}\mathrm{ctg}\beta. \qquad (3.69)$$

Как было ранее отмечено, каждому заданному значению $\theta<\theta_{max}$ соответствуют два значения β. Эта двузначность в определении угла наклона косого скачка уплотнения S по заданному значению θ соответствует сущности явления прохождения газа через косой скачок уплотнения, от давления за которым зависит режим течения. Как следует из формулы (3.55):

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2k}{k+1}M_1^2\sin^2\beta-\frac{k-1}{k+1}, \qquad (3.70)$$

большему значению угла β отвечает и большее значение отношения p_2/p_1 давлений за и перед скачком. А поскольку, как уже говорилось, это отношение давлений служит мерой интенсивности (мощности) скачка, то большему значению угла β будет соответствовать более интенсивный скачок уплотнения. Скачок уплотнения, соответствующий большему значению β, называют сильным скачком уплотнения, а соответствующий меньшему значению β – слабым скачком уплотнения. Фронт сильного скачка уплотнения служит поверхностью (в плоском движении – линией) сильного изменения кинематических, газо- и термодинамических характеристик потока газа, фронт слабого скачка – поверхностью (линией) слабого изменения этих величин.

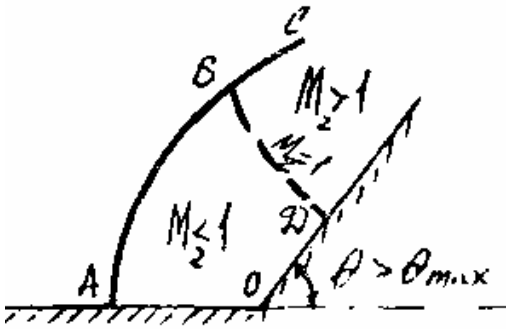


Рис. 30

Оба типа изменений наблюдаются, например, в отсоединенных волнах (см. рис. 30) при $\theta>\theta_{max}$ (АС – отсоединенный скачок уплотнения). Выясним условия, при которых поток за косым скачком уплотнения будет до- или сверхзвуковым. Для этого воспользуемся формулой (3.28) зависимости числа Маха M_2 за скачком от числа M_1 до скачка для прямого скачка уплотнения и произведем замену в этой формуле M_1 на $M_1\sin\beta$ и M_2 на $M_2\sin(\beta-\theta)$, справедливых для косого скачка уплотнения. Тогда получаем искомую формулу связи:

$$M_2^2\sin^2(\beta-\theta)=\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2\sin^2\beta}{kM_2^2\sin^2(\beta)-\frac{k-1}{2}}. \qquad (3.71)$$

Пользуясь этим выражением и соотношением

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{\sin^2\beta-1/M_1^2}{\frac{k+1}{2}-\sin^2\beta+1/M_1^2}\mathrm{ctg}\beta, \qquad (3.72)$$

можно выразить число Маха за косым скачком уплотнения M_2 через число M_1 до скачка и угол β. При этом при одном и том же M_1 двум различным значениям β, соответствующим сильному и слабому скачкам, будут отвечать два отличных друг от друга значения M_2, причем сильный скачок уплотнения, подобно прямому, переводит сверхзвуковой поток в дозвуковой, а слабый скачок почти всегда сохраняет поток сверхзвуковым.

Если $\theta>\theta_{max}$, то, как указывалось, наличие прямолинейного присоединенного к вершине угла (клина) 0 косого скачка уплотнения невозможно. Вверх по течению перед точкой 0 возникает криволинейная «головная» ударная волна или отсоединенный скачок уплотнения АС (рис. 30). В непосредственной близости к точке А отсоединенный скачок АС ведет себя как прямой, а при удалении от точки А сначала как сильный косой скачок, а затем с уменьшением местного угла β постепенно ослабевает и переходит в прямолинейный косой скачок. При этом за отсоединенным скачком уплотнения имеет место как до-, так и сверхзвуковое течение газа. За участком АВ образуется дозвуковая зона течения, за участком ВС – сверхзвуковая. Эти две зоны потока за скачком разделяются линией BD, вдоль которой скорость газа равна местной скорости звука.

Библиографический список

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука,1987. 840 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. II. М.: Наука,1984. 560 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 795 с.
4. Сед*ов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1981. 448с.
5. *Прандтль Л.* Гидромеханика. М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. 370 с.
6. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. Ч. I, II. М.: Наука, 1991. 600 с., 304 с.
7. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 370 с.
8. *Загузов И.С.* Аэрогидромеханика разрывных течений идеального газа: Учебное пособие. Самара: Изд-во СамГУ, 1992. 76 с.
9. Механика сплошных сред в задачах. Т.1,2 / Под ред. *М.Э. Эглит*. М.: Московский Лицей, 1996, 396 с., 394 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ …… 3

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В АЭРОДИНАМИКЕ ……. 6
1.1. Математическая модель плоского движения идеальной несжимаемой жидкости ...……. 8
1.2. Комплексные потенциалы и характеризуемые ими виды движений ……... 10
1.3. Математическая модель бесциркуляционного обтекания кругового цилиндра идеальной жидкостью .. 15
1.4. Математическая модель циркуляционного обтекания кругового цилиндра идеальной жидкостью .. 23
1.5. Теорема Жуковского о подъёмной силе крыла …… 27
1.6. Математическая модель обтекания крылового профиля по методу конформных отображений …… 30

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ.. 35
2.1. Изоэнтропийные соотношения для идеального газа ….. 36
2.2. Математическая модель движения газа по соплу Лаваля 42
2.3. Распространение малых возмущений в потоке сжимаемого газа ……. 48
2.4. Математическая модель плоского безвихревого движения идеального сжимаемого газа ……..… 51
2.5. Линейные преобразования Прандтля для определения малых возмущений параметров газа … 53
2.6. Математическая модель дозвукового обтекания тонкого профиля потоком идеального сжимаемого газа 58
2.7. Математическая модель сверхзвукового обтекания тонкого профиля потоком идеального сжимаемого газа 62

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ .. 68
3.1. Сильные разрывы в газе. Прямые и косые скачки уплотнения ……..…… 69
3.2. Математическая модель прямого скачка уплотнения …. 72
3.3. Ударная адиабата Гюгонио для разрывных течений ….. 74
3.4. Уравнение Прандтля для прямого скачка уплотнения ... 77
3.5. Изменение характерных параметров газа при прямом скачке уплотнения ……... 80
3.6. Математическая модель косого скачка уплотнения …… 83
3.7. Ударная поляра ……... 87

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК …….. 94