Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«МАТИ» - Российский государственный технологический
университет им. К.Э.Циолковского

Титаренко В. И., Выск Н. Д.

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля

Учебное пособие

Москва 2006

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие посвящено изложению различных специальных разделов математики в рамках курса математического анализа как части общего курса высшей математики. Пособие предназначено в помощь как студентам МАТИ-РГТУ им. К.Э.Циолковского, так и студентам других технических университетов, а также может быть интересно и для преподавателей этих учебных заведений. В нем рассматриваются следующие темы: кратные (двойные и тройные) интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы, дифференциальные операции второго порядка, специальные виды векторных полей; даны основные определения и формулировки, доказаны базовые теоремы, в том числе теоремы Грина, Стокса, Гаусса-Остроградского. Основное внимание уделяется применению изложенных теоретических сведений к решению соответствующих задач геометрии и механики.

В каждой главе приводится большое количество примеров, иллюстрирующих применение исследуемых теоретических вопросов, а также приведены подробные решения задач на нахождение площадей, объемов, центров масс и моментов инерции различных тел и фигур, определение циркуляции и потока векторного поля, вычисление ротора и дивергенции – величин, широко используемых в гидроаэродинамике и в механике сплошных сред. В пособии представлено значительное количество рисунков, иллюстрирующих основные понятия и определения. В связи с этим полагаем, что пособие может быть использовано как студентами очного отделения университетов для подготовки к экзаменам, курсовым и контрольным работам, так и студентами очно-заочной формы обучения.

Для углубленного изучения рассмотренных разделов математики приводится список используемой литературы.

I. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим в плоскости Оxy замкнутую область D, ограниченную линией L. Разобьем эту область какими-нибудь линиями на n частей $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ (причем теми же символами $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ будем обозначать и площади соответствующих частей), а соответствующие наибольшие расстояния между точками в каждой из этих частей обозначим d_1, d_2, ..., d_n. Величину d_i будем называть **максимальным диаметром** подобласти ΔS_i. Выберем в каждой части ΔS_i точку P_i (рис.1).

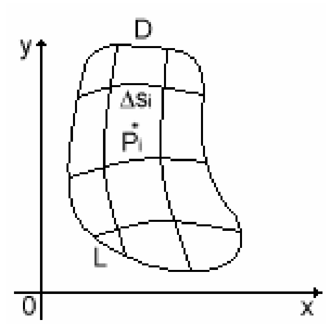


Рис.1.

Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Обозначим через $f(P_1)$, $f(P_2)$,…, $f(P_n)$ значения этой функции в выбранных точках и составим сумму произведений вида $f(P_i)\Delta S_i$:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \ . \qquad (1)$$

Определение 1. Сумма вида $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$ называется **интегральной суммой** для функции $f(x, y)$ в области D.

Замечание. С геометрической точки зрения (при $f(x,y) \geq 0$) интегральная сумма (1) представляет собой сумму объемов цилиндров с основаниями ΔS_i и высотами $f(P_i)$.

Определение 2. Если существует один и тот же предел интегральных сумм (1) при $n \to \infty$ и $\max d_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек P_i в них, то он называется **двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D** и обозначается

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \ . \qquad (2)$$

В этом случае функция $f\ (x,y)$ называется **интегрируемой** в области D, область D – **областью интегрирования**, x и y – **переменны-ми интегрирования**, $dxdy = dS$ – **элементом площади**.

Замечание 1. Для выяснения вопроса об условиях интегрируемости функции двух переменных можно по аналогии со случаем определенного интеграла ввести понятие верхней и нижней интегральных сумм, выбирая в каждой части области *D* точки, значение функции в которых является наибольшим и наименьшим для данной части. Тогда можно доказать, что необходимым и достаточным условием интегрируемости функции *f(x, y)* является, во-первых, ее ограниченность на *D*, а во-вторых, условие

$$\lim_{\max d_i \to 0}(S_t - s_t) = 0, \qquad (3)$$

где τ – некоторое разбиение, а S_τ и s_τ – соответственно верхняя и нижняя интегральные суммы. Доказательство этого утверждения проводится так же, как для случая определенного интеграла.

Замечание 2. Аналогично одномерному случаю можно доказать еще одно утверждение: если функция *f(x, y)* непрерывна в замкнутой области *D*, то она интегрируема по этой области.

Свойства двойных интегралов

Часть свойств двойных интегралов непосредственно вытекает из определения этого понятия и свойств интегральных сумм, а именно:

1. Если функция *f(x, y)* интегрируема в *D*, то *kf(x, y)*, где *k = const*, тоже интегрируема в этой области, причем

$$\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (4)$$

2. Если в области *D* интегрируемы функции *f(x, y)* и *g(x, y)*, то в этой области интегрируемы и функции *f(x, y)* ± *g(x, y)*, и при этом

$$\iint_D \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy. \qquad (5)$$

3. Если для интегрируемых в области *D* функций *f(x, y)* и *g(x, y)* выполняется неравенство $f(x, y) \le g(x, y)$, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy. \qquad (6)$$

Докажем еще несколько свойств двойного интеграла:

4. Если область *D* разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек и функция *f(x, y)* непрерывна в области *D*, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy. \qquad (7)$$

Доказательство.

Интегральную сумму по области D можно представить в виде:

$$\sum_D f(P_i)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(P_i)\Delta S_i + \sum_{D_2} f(P_i)\Delta S_i,$$

где разбиение области D проведено так, что граница между D_1 и D_2 состоит из границ частей разбиения. Переходя затем к пределу при $\max d_i \to 0$, получим равенство (7).

5. В случае интегрируемости на D функции $f(x, y)$ в этой области интегрируема и функция $|f(x, y)|$, и имеет место неравенство

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy. \qquad (8)$$

Доказательство.

$\left|\sum\limits_D f(P_i)\Delta S_i\right| \le \sum\limits_D |f(P_i)|\,\Delta S_i$, откуда с помощью предельного перехода при $\max d_i \to 0$ получаем неравенство (8).

6. $\iint\limits_D dxdy = S_D$, где S_D – площадь области D. Доказательство этого утверждения получим, подставляя в интегральную сумму $f(x, y) \equiv 1$.

7. Если интегрируемая в области D функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$m \le f(x, y) \le M,$$

то

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS_D. \qquad (9)$$

Доказательство проводится предельным переходом из очевидного неравенства

$$mS_D \le \sum_D f(P_i)\Delta S_i \le MS_D.$$

8 (**Теорема о среднем**). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, то в этой области существует такая точка $M(x_0, y_0)$, что

$$\frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0), \qquad (10)$$

или, что то же самое,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \mathrm{m}S_D, \quad m \le \mathrm{m} \le M. \qquad (10')$$

Это выражение легко получить, разделив обе части неравенства (9) на S_D.

Тройной интеграл

Понятие тройного (а в дальнейшем – m-мерного) интеграла вводится по аналогии с двойным интегралом.

Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью S. Зададим в этой замкнутой области непрерывную функцию $f(x, y, z)$. Затем разобьем область V на произвольные части Δv_i, считая объем каждой части равным Δv_i, и составим интегральную сумму вида

$$\sum_{V} f(P_i)\Delta v_i\,, \qquad (11)$$

где точка P_i принадлежит Δv_i. Пусть ρ – наибольшее расстояние между двумя точками любой части области V. Найдем предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа элементов разбиения и при условии, что каждый элементарный объем Δv_i стягивается в точку, т.е. максимальный диаметр каждой подобласти стремится к нулю.

Определение 3. Предел при $r \to 0$ интегральных сумм (11), не зависящий от способа разбиения области V и выбора точек P_i в каждой подобласти этой области, называется **тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области V:**

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{r\to 0}\sum_V f(P_i)\Delta v_i \qquad (12)$$

Замечание 1. Условие непрерывности подынтегральной функции не является обязательным для существования кратного (двойного, тройного и т.д.) интеграла, но исследование вопросов, связанных с интегрированием разрывных функций, выходит за рамки нашего пособия.

Замечание 2. Все сформулированные ранее свойства двойного интеграла можно распространить на тройной интеграл.

Замечание 3. Подобным образом можно дать определение интеграла любой кратности, рассматривая функцию n переменных, заданную в замкнутой области n-мерного пространства.

Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело V, ограниченное частью поверхности, задаваемой уравнением $z = f(x, y)$, проекцией D этой поверхности на плоскость

Oxy и боковой цилиндрической поверхностью, полученной из вертикальных образующих, соединяющих точки границы поверхности с их проекциями.

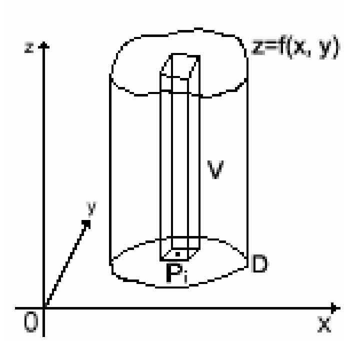


Рис. 2

Будем искать объем этого тела как предел суммы объемов цилиндров, основаниями которых являются части ΔS_i области D, а высотами – отрезки длиной $f(P_i)$, где точки P_i принадлежат ΔS_i. Переходя к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим, что

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy, \qquad (13)$$

то есть двойной интеграл представляет собой объем так называемого цилиндроида, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а снизу – областью D.

2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах путем сведения его к повторному

Рассмотрим область D, ограниченную линиями

$y = j_1(x), y = j_2(x)$ $(j_1(x) \le j_2(x))$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$), где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$. Если любая прямая, параллельная координатной оси Oy и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границу области в двух точках: N_1 и N_2 (рис.1), то такую область назовем **правильной** в направлении оси Oy. Аналогично определяется область, правильная в направлении оси Ox. Область, правильную в направлении обеих координатных осей, будем называть просто правильной. Например, правильная область изображена на рис.3.

Пусть функция *f(x, y)* непрерывна в области *D*. Рассмотрим выражение

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx, \qquad (14)$$

называемое **двукратным интегралом** от функции *f(x, y)* по области *D*.

Вычислим вначале внутренний интеграл (стоящий в скобках) по переменной *y*, считая *x* постоянным. В результате получится непрерывная функция от *x*:

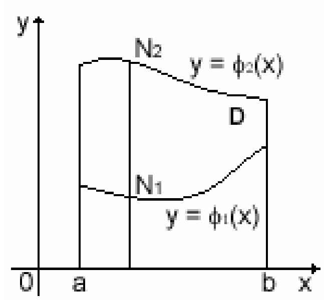


Рис.3

$$\Phi(x) = \int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy.$$

Полученную функцию проинтегрируем по *x* в пределах от *a* до *b*. В результате получим число $I_D = \int_a^b \Phi(x)dx.$

Докажем важное свойство двукратного интеграла.

Теорема 1. Если область *D*, правильная в направлении О*y*, разбита на две подобласти D_1 и D_2 прямой, параллельной оси О*y* или оси О*x*, то двукратный интеграл по области *D* будет равен сумме таких же интегралов по областям D_1 и D_2:

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}. \qquad (15)$$

Доказательство.

а) Пусть прямая $x = c$ разбивает *D* на D_1 и D_2 , правильные в направлении О*y*. Тогда

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^c \Phi(x)dx + \int_c^b \Phi(x)dx =$$

$$\int_a^c \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_c^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

б) Пусть прямая $y = h$ разбивает D на правильные в направлении Оy области D_1 и D_2 (рис.2). Обозначим через M_1 (a_1, h) и M_2 (b_1, h) точки пересечения прямой $y = h$ с границей L области D.

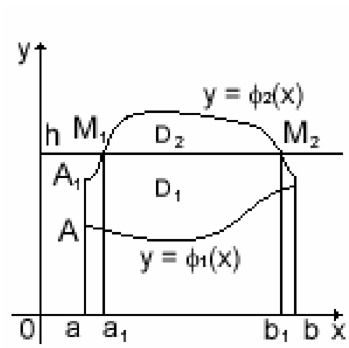


Рис.4.

Область D_1 ограничена непрерывными линиями
1) $y = \varphi_1(x)$;
2) кривой $A_1M_1M_2B$, уравнение которой запишем $y = \varphi_1{}^*(x)$, где $\varphi_1{}^*(x) = \varphi_2(x)$ при $a \le x \le a_1$ и $b_1 \le x \le b$, $\varphi_1{}^*(x) = h$ при $a_1 \le x \le b_1$;
3) прямыми $x = a$, $x = b$.
Область D_2 ограничена линиями $y = \varphi_1{}^*(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a_1 \le x \le b_1$.
Применим к внутреннему интегралу теорему о разбиении промежутка интегрирования:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_1^*(x)} f(x,y)dy + \int_{j_1^*(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_1^*(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_a^b \left(\int_{j_1^*(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Представим второй из полученных интегралов в виде суммы:

$$\int_a^b \left(\int_{j_1^*(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^{a_1} \left(\int_{j_1^*(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx + \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{j_1^*(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy \right) dx +$$

$$+\int_{b_1}^{b}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Поскольку $\varphi_1{*}(x) = \varphi_2(x)$ при $a \le x \le a_1$ и $b_1 \le x \le b$, первый и третий из полученных интегралов тождественно равны нулю. Следовательно,

$$I_D = \int_{a}^{b}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,y)dy\right)dx + \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx, \text{ то есть } \quad I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

Следствие. Таким же образом можно разбить область D на любое число правильных областей. При этом двукратный интеграл по области D будет равен сумме интегралов по частичным областям.

Замечание 1. Используя теорему 1 и теоремы о среднем для определенного интеграла, можно доказать, что для двукратного интеграла справедливы соотношения:

$$mS \le \int_{a}^{b}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \le MS, \tag{16}$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значение функции $f(x, y)$ в области D, а S – площадь этой области, и

$$I_D = f(P)S, \tag{17}$$

где P – точка, принадлежащая области D .

Замечание 2. Более употребительной формой записи двукратного интеграла является

$$\int_{a}^{b}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_{a}^{b}dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{18}$$

Теорема 2. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по данной области, то есть

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{a}^{b}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx. \tag{19}$$

Доказательство.

Разобьем область D прямыми, параллельными координатным осям, на n правильных (в основном прямоугольных) областей ΔS_1, $\Delta S_2, \ldots$, ΔS_n. Тогда по теореме 1

$$I_D = I_{\Delta S_1} + I_{\Delta S_2} + \ldots + I_{\Delta S_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta S_i} .$$

Из (16) получим: $I_{\Delta S_i} = f(P_i)\Delta S_i$, $I_D = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$, где справа стоит интегральная сумма, предел которой равен двойному интегралу от f по области D, а слева – постоянное число I_D . Переходя к пределу при $\max \Delta S_i \to 0$, получим равенство (19).

Пример 1.

Вычислим двойной интеграл от функции $z = x + y$ по области, представляющей собой треугольник с вершинами в точках (0,0), (0,1) и (1,0) (рис.5).

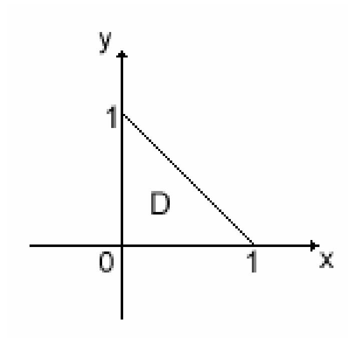


Рис. 5

Здесь $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1 - x$.

Тогда $\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+y)dy =$

$$= \int\limits_0^1 dx\left((xy + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} \right) = \int\limits_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Введем на плоскости криволинейную систему координат, называемую **полярной**. Она состоит из точки O (полюса) и выходящего из него луча (полярной оси).

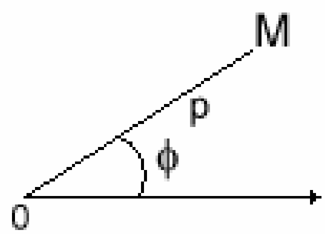


Рис. 6

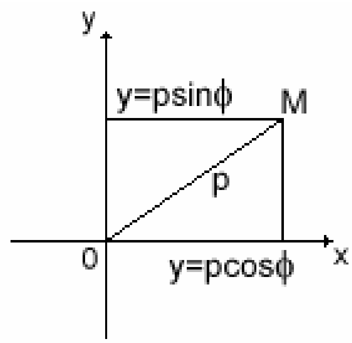


Рис. 7

Координатами точки M в этой системе (рис. 6) будут длина отрезка MO – полярный радиус ρ и угол φ между MO и полярной осью: $M(\rho,\varphi)$. Отметим, что для всех точек плоскости, кроме полюса, $\rho > 0$, а полярный угол φ будем считать положительным при измерении его в направлении против часовой стрелки и отрицательным – при измерении в противоположном направлении.

Замечание. Если ограничить значения φ интервалом $[0,2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$, то каждой точке плоскости соответствует единственная пара координат (ρ,φ). В других случаях можно считать, что φ может принимать любые значения, то есть полярный угол определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Связь между полярными и декартовыми координатами точки M можно задать, если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось Ox – с полярной осью (рис. 7). Тогда $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Отсюда $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{tg}\, j = \frac{y}{x}$.

Правильной областью в полярных координатах назовем такую область, границу которой каждый луч, выходящий из полюса, пересекает не более чем в двух точках (рис.8).

Зададим в области D, ограниченной кривыми $\rho=\Phi_1(\varphi)$ и $\rho=\Phi_2(\varphi)$, где $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, непрерывную функцию $z = f(\varphi, \rho)$. Разобьем область D на части ΔS_{ik} , ограниченные лучами $\rho = \rho_{i-1}$ и $\rho = \rho_i$, выходящими из полюса, и дугами окружностей $\varphi = \varphi_{k-1}$ и $\varphi = \varphi_k$ с центром в полюсе, и составим интегральную сумму $V_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i} f(P_{ik})\Delta S_{ik}\right)$, где P_{ik} –

произвольная точка, принадлежащая ΔS_{ik} . Найдем площадь части ΔS_{ik} , не пересекаемой границей области, как разность площадей двух секторов:

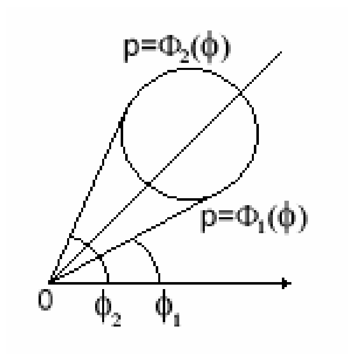


Рис. 8

$$\Delta S_{ik} = \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta j_k - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta j_k = \left(r_i + \frac{\Delta r_i}{2} \right) \Delta r_i \Delta j_k = r_i^* \Delta r_i \Delta j_k ,$$

где $r_i < r_i^* < r_i + \dfrac{\Delta r_i}{2}$. Учитывая, что площади частей, пересекаемых границей области, стремятся к нулю при $\Delta j_k \to 0$ и $\Delta r_i \to 0$, получим:

$$\iint_D f(r,j)\,dr\,dj = \lim_{\substack{\Delta r_i \to 0 \\ \Delta j_k \to 0}} V_n = \lim_{\substack{\Delta r_i \to 0 \\ \Delta j_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_i f(r_i^*, j_k^*) r_i^* \Delta r_i \right) \Delta j_k =$$

$$= \int_{j_1}^{j_2} \left(\int_{\Phi_1(j)}^{\Phi_2(j)} f(r,j)\, r\,dr \right) dj . \qquad (20)$$

<u>Пример 2.</u>

Выведем с использованием двойного интеграла формулу для площади круга радиуса R с центром в начале координат:

$$\iint_D dr\,dj = \int_0^{2p} dj \int_0^R r\,dr = \int_0^{2p} dj \left(\frac{r^2}{2} \bigg|_0^R \right) = \frac{R^2}{2} \int_0^{2p} dj = \frac{R^2}{2} 2p = pR^2 .$$

<u>Пример 3</u>.

Вычислим, используя полярные координаты, двойной интеграл

$$I = \iint_D (2x + y^3)\,dxdy ,$$

где D – часть кругового сектора единичного радиуса с центром в начале координат, расположенная в 1-м квадранте.

Заданный интеграл в полярных координатах $\begin{cases} x = r\cos j \\ y = r\sin j \end{cases}$ по указанной области $D: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le j \le \dfrac{p}{2} \end{cases}$ имеет вид:

$$I = \int_0^{\frac{p}{2}} dj \int_0^1 (2r\cos j + r^3 \sin^3 j)\, r\,dr = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{2}{3} r^3 \Big|_0^1 \cos j\, dj - \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 \sin^2 j \cdot \sin j\, dj =$$

$$= \frac{2}{3}\sin j \Big|_0^{\frac{p}{2}} - \frac{1}{5}\int_0^{\frac{p}{2}} (1-\cos^2 j)\, d\cos j = \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cos j \Big|_0^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{15}\cos^3 j \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{4}{5}$$

4. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Процедура вычисления тройного интеграла аналогична соответствующей операции для двойного интеграла. Для ее описания введем понятие правильной трехмерной области:

Определение 4. Трехмерная область *V*, ограниченная замкнутой поверхностью *S*, называется **правильной**, если:

1) любая прямая, параллельная оси O*z* и проведенная через внутреннюю точку области, пересекает *S* в двух точках;
2) вся область *V* проектируется на плоскость O*xy* в правильную двумерную область *D*;
3) любая часть области *V*, отсеченная от нее плоскостью, параллельной какой-либо из координатных плоскостей, обладает свойствами 1) и 2).

Рассмотрим правильную область *V*, ограниченную снизу и сверху поверхностями $z=\chi(x,y)$ и $z=\psi(x,y)$ и проектирующуюся на плоскость O*xy* в правильную область *D*, внутри которой *x* изменяется в пределах от *a* до *b*, ограниченную кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ (рис.9). Зададим в области *V* непрерывную функцию $f(x, y, z)$.

Определение 5. Назовем **трехкратным интегралом от функции** $\boldsymbol{f(x, y, z)}$ **по области** $\boldsymbol{V}$ выражение вида:

$$I_V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} \left(\int\limits_{c(x,y)}^{y(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx. \qquad (21)$$

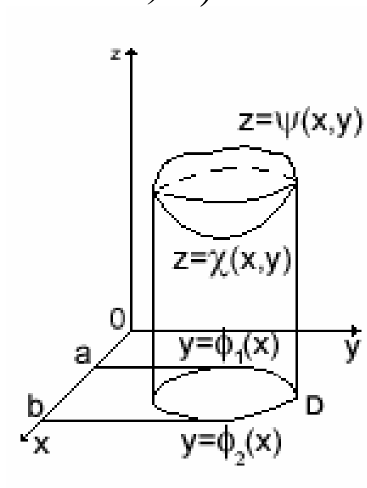


Рис.9.

Трехкратный интеграл обладает теми же свойствами, что и двукратный. Перечислим их без доказательства, так как они доказываются аналогично случаю двукратного интеграла.

1. Если область V разбить на две области V_1 и V_2 плоскостью, параллельной какой-либо из координатных плоскостей, то трехкратный интеграл по области V равен сумме трехкратных интегралов по областям V_1 и V_2.
2. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области V, то верно неравенство . $mV \le I_V \le MV$, где V – объем данной области, а I_V – трехкратный интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области V.
3. Трехкратный интеграл I_V от непрерывной функции $f(x,y,z)$ по области V равен произведению его объема V на значение функции в некоторой точке P области V (**теорема о среднем**):

$$I_V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} \left(\int\limits_{c(x,y)}^{y(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx = f(P)V. \qquad (22)$$

Теорема 3. Тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по правильной области V равен трехкратному интегралу по той же области:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{j_1(x)}^{j_2(x)} \left(\int\limits_{c(x,y)}^{y(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx. \qquad (23)$$

Доказательство.
Разобьем область V плоскостями, параллельными координатным плоскостям, на n правильных областей $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$. Тогда из свойства 1 следует, что

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + ... + I_{\Delta v_n},$$

где $I_{\Delta v_i}$ - трехкратный интеграл от функции *f(x,y,z)* по области Δv_i.
Используя формулу (21), предыдущее равенство можно переписать в виде:

$$I_V = f(P_1)\Delta v_1 + f(P_2)\Delta v_2 + ... + f(P_n)\Delta v_n.$$

Из условия непрерывности функции *f(x,y,z)* следует, что предел интегральной суммы, стоящей в правой части этого равенства, существует и равен тройному интегралу $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$. Тогда, переходя к пределу при $r \to 0$, получим:

$$I_V = \iiint\limits_V f(x,y,z)dv,$$

что и требовалось доказать.

Замечание.
Аналогично случаю двойного интеграла можно доказать, что изменение порядка интегрирования не меняет значения трехкратного интеграла.

Пример 4.
Вычислим интеграл $\iiint\limits_V xyzdxdydz,$ где V – треугольная пирамида с вершинами в точках (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1). Ее проекцией на плоскость Оxy является треугольник с вершинами (0, 0), (1, 0) и (0, 1). Снизу область ограничена плоскостью $z = 0$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 1$. Перейдем к трехкратному интегралу:
$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz.$ Множители, не зависящие от переменной интегрирования, можно вынести за знак соответствующего интеграла:

$$\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} ydy \int\limits_0^{1-x-y} zdz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} ydy \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{1-x-y} \right) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy =$$

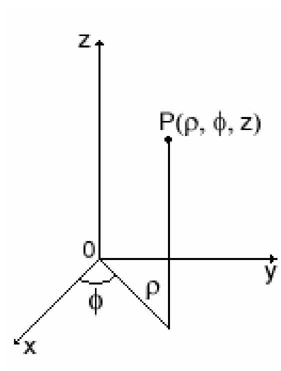
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\left((1-x)^2\frac{y^2}{2}-2(1-x)\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^{1-x}\right)=\frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4dx=$$

$$=\frac{1}{24}\int_0^1(x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5)dx=\frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{720}.$$

5. Криволинейные системы координат в трехмерном пространстве

1. Цилиндрическая система координат

Цилиндрические координаты точки *P(ρ,φ,z)* – это полярные координаты ρ, φ проекции этой точки на плоскость Oxy и апликата данной точки z (рис.10).



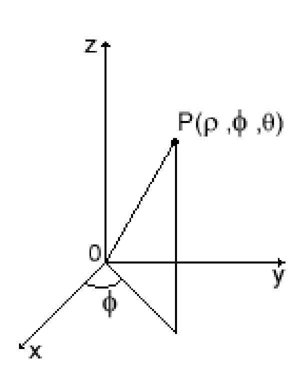


Рис.10 Рис.11

Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым можно задать следующим образом:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z. \qquad (24)$$

2. Сферическая система координат

В сферических координатах положение точки в пространстве определяется линейной координатой ρ – расстоянием от точки до начала декартовой системы координат (или полюса сферической системы), φ – полярным углом между положительной полуосью Ox и проекцией точки на плоскость Oxy, и θ – углом между положительной полуосью оси Oz и отрезком OP (рис.11). При этом

$$r \geq 0,\quad 0 \leq j < 2p,\quad 0 \leq q \leq p.$$

Зададим формулы перехода от сферических координат к декартовым:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho \cos\theta. \qquad (25)$$

6. Якобиан и его геометрический смысл

Рассмотрим общий случай замены переменных в двойном интеграле. Пусть в плоскости Оxy дана область D, ограниченная линией L. Предположим, что x и y являются однозначными и непрерывно дифференцируемыми функциями новых переменных u и v:

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v). \qquad (26)$$

Рассмотрим прямоугольную систему координат Оuv, точка $P'(u, v)$ которой соответствует точке $P(x, y)$ из области D. Все такие точки образуют в плоскости Оuv область D', ограниченную линией L'. Можно сказать, что формулы (26) устанавливают **взаимно однозначное соответствие** между точками областей D и D'. При этом линиям u = const и v = const в плоскости Оuv будут соответствовать некоторые линии в плоскости Оxy.

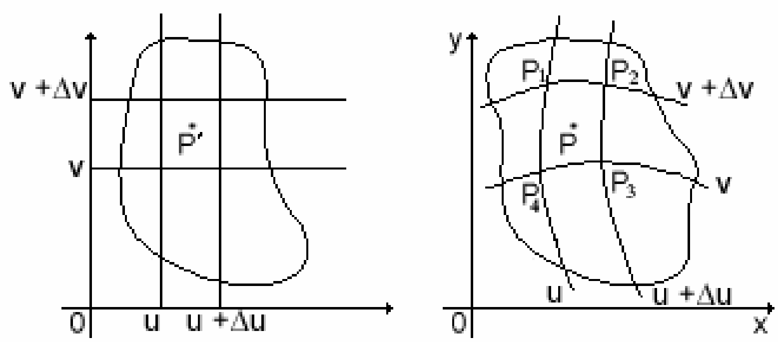


Рис. 12 .

Рассмотрим в плоскости Оuv прямоугольную площадку $\Delta S'$, ограниченную прямыми u = const, $u+\Delta u$ = const, v = const и $v+\Delta v$ = const. Ей будет соответствовать криволинейная площадка ΔS в плоскости Оxy (рис.12). Площади рассматриваемых площадок тоже будем обозначать $\Delta S'$ и ΔS. При этом $\Delta S' = \Delta u\, \Delta v$. Найдем площадь ΔS. Обозначим вершины этого криволинейного четырехугольника P_1, P_2, P_3, P_4, где

$P_1(x_1, y_1)$, $x_1 = \varphi(u, v)$, $y_1 = \psi(u, v)$;

$P_2(x_2, y_2)$, $x_2 = \varphi(u+\Delta u, v)$, $y_2 = \psi(u+\Delta u, v)$;
$P_3(x_3, y_3)$, $x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v)$;
$P_4(x_4, y_4)$, $x_4 = \varphi(u, v+\Delta v)$, $y_4 = \psi(u, v+\Delta v)$.
Заменим малые приращения Δu и Δv соответствующими дифференциалами. Тогда

$$x_1 = j\,(u,v), \quad y_1 = y\,(u,v),$$
$$x_2 = j\,(u,v) + \frac{\partial j}{\partial u}\Delta u, \quad y_2 = y\,(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u,$$
$$x_3 = j\,(u,v) + \frac{\partial j}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial j}{\partial v}\Delta v, \quad y_3 = y\,(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v,$$
$$x_4 = j\,(u,v) + \frac{\partial j}{\partial v}\Delta v, \quad y_4 = y\,(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v.$$

При этом четырехугольник $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ можно считать параллелограммом и определить его площадь по формуле из аналитической геометрии:

$$\Delta S \approx \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| =$$
$$\left|\left(\frac{\partial j}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial j}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial j}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{\partial j}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial j}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|\Delta u \Delta v = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial j}{\partial u} & \dfrac{\partial j}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right\|\Delta u \Delta v = |I|\Delta S'. \qquad (27)$$

Определение 6. Определитель $I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial j}{\partial u} & \dfrac{\partial j}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ называется **функциональным определителем** или **якобианом** функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

Другая форма записи якобиана: $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = I$.

Переходя к пределу при $\max \Delta S' \to 0$ в равенстве (27), получим геометрический смысл якобиана:

$$|\, I \,| = \lim_{\Delta S' \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'}, \qquad (28)$$

то есть модуль якобиана есть предел отношения площадей бесконечно малых площадок ΔS и $\Delta S'$.

Замечание. Аналогичным образом можно определить понятие якобиана и его геометрический смысл для n-мерного пространства: если $x_1 = \varphi_1(u_1, u_2,\ldots,u_n)$, $x_2 = \varphi_2(u_1, u_2,\ldots,u_n),\ldots$, $x_n = \varphi(u_1, u_2,\ldots, u_n)$, то

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \qquad (29)$$

При этом модуль якобиана дает предел отношения «объемов» малых областей пространств $x_1, x_2,\ldots, x_n$ и $u_1, u_2,\ldots, u_n$.

7. **Замена переменных в кратных интегралах**

Исследуем общий случай замены переменных на примере двойного интеграла.

Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x,y)$, каждому значению которой соответствует то же самое значение функции $z = F(u, v)$ в области D', где

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \qquad (30)$$

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum f(x, y)\Delta S = \sum F(u, v)\Delta S \approx \sum F(u, v)\mid I \mid \Delta S',$$

где интегральная сумма справа берется по области D'

(здесь $\Delta S = \Delta x \Delta y,\ \Delta S' = \Delta u \Delta v$). Переходя к пределу при $\max \Delta S' \to 0$, получим **формулу преобразования координат в двойном интеграле**:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D'} F(u, v)\,|\,I\,|\,dudv. \qquad (31)$$

Аналогичным образом можно вывести подобную формулу для тройного интеграла:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w))\,|\,I\,|\,dudvdw,$$

(32)

где $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$,

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial j}{\partial u} & \frac{\partial j}{\partial v} & \frac{\partial j}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial c}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial w} \end{vmatrix}, \qquad (33)$$

а область V пространства Oxyz отображается в область V' пространства Ouvw.

Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле

Найдем, используя формулы (25), (26) и (33), якобианы перехода от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим:

1) для цилиндрических координат

$$I = \begin{vmatrix} \cos j & -r\sin j & 0 \\ \sin j & r\cos j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r, \qquad (34)$$

2) для сферических координат

$$I = \begin{vmatrix} \sin q\cos j & -r\sin q\sin j & r\cos q\cos j \\ \sin q\sin j & r\sin q\cos j & r\cos q\sin j \\ \cos q & 0 & -r\sin q \end{vmatrix} = r^2\sin q. \qquad (35)$$

Тогда формулы перехода к цилиндрическим или сферическим координатам в тройном интеграле будут выглядеть так:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{j_1}^{j_2} dj \int\limits_{r_1(j)}^{r_2(j)} r\,dr \int\limits_{z_1(r,j)}^{z_2(r,j)} F_1(r,j,z)dz =$$

$$= \int\limits_{q_1}^{q_2} \sin q\,dq \int\limits_{j_1(q)}^{j_2(q)} dj \int\limits_{r_1(j,q)}^{r_2(j,q)} F_2(r,j,q)r^2 dr, \qquad (36)$$

где смысл обозначений понятен из предыдущего текста.

Пример 5.

Вычислим интеграл от функции $u = z\sqrt{x^2 + y^2}$ по области, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 1$.

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{\frac{p}{4}} dj \int\limits_0^1 r\cdot r\,dr \int\limits_0^1 zdz = \left(j\,\Big|_0^{\frac{p}{4}} \right)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 \right)\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 \right) = \frac{p}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{p}{24}.$$

<u>Пример 6.</u>
Пусть подынтегральная функция $u = 1$, а область интегрирования – шар радиуса R с центром в начале координат. Тогда

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{p} \sin q\,dq \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^{R} r^2 dr = \left(-\cos q\,\Big|_0^{p} \right)\left(j\,\Big|_0^{2p} \right)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{R} \right) = 2\cdot 2p\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}pR^3 .$$

II. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Криволинейные интегралы первого рода, их свойства и вычисление

Рассмотрим на плоскости или в пространстве кривую L и функцию f, определенную в каждой точке этой кривой. Разобьем кривую на части Δs_i длиной Δs_i и выберем на каждой из частей точку M_i. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$. Назовем d длину наибольшего отрезка кривой: $d = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta s_i$.

Определение 7. Если существует конечный предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$, не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек M_i, то он называется **криволинейным интегралом первого рода** от функции f по кривой L и обозначается

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_L f(x,y,z)ds = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i . \qquad (37)$$

Например, если функция $f(M)$ задает плотность в точке M, то интеграл (36) равен массе рассматриваемой кривой.

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1. Если функция f непрерывна на кривой L, то интеграл $\int\limits_L f(M)ds$ существует.
2. Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления движения по кривой, то есть от того, какую из точек, ограничивающих кривую, считать начальной, а какую – конечной. Если назвать эти точки A и B, то
$$\int\limits_{(AB)} f(M)ds = \int\limits_{(BA)} f(M)ds. \qquad (38)$$

Справедливость этих свойств следует из определения криволинейного интеграла 1-го рода.

Способ вычисления криволинейного интеграла 1-го рода

Выберем на кривой L направление от начальной точки A и отметим, что положение точки M на кривой определяется длиной дуги $AM = s$. Тогда кривую L можно задать параметрически: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, где $0 \le s \le S$. Функция $f(x,y,z)$ становится при этом сложной функцией одной переменной s: $f(x(s), y(s), z(s))$. Тогда интегральная сумма
$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i), z(\bar{s}_i))\Delta s_i ,$$
где $\bar{s}_i$ - координата точки M_i, является обычной интегральной суммой для определенного интеграла $\int\limits_0^S f(x(s), y(s), z(s))ds$. Следовательно,
$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_0^S f(x(s), y(s), z(s))ds. \qquad (39)$$

Если же кривая L задана в параметрической форме:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \qquad t_0 \le t \le T,$$

то, применяя в интеграле (39) формулу замены переменной и учитывая, что дифференциал дуги
$$ds = \sqrt{(j'(t))^2 + (y'(t))^2 + (c'(t))^2}\,dt,$$
получим:

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt. \quad (40)$$

В частности, если кривая L задана на плоскости явным образом: $y=\varphi(x)$, где $x_1 \le x \le x_2$, формула (40) преобразуется к виду:

$$\int\limits_L f(M)ds = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx\,. \quad (41)$$

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению обычного определенного интеграла от функции переменной t в пределах, соответствующих изменению значения этой переменной на рассматриваемой кривой.

<u>Пример 7.</u>

Вычислить $\int\limits_L xyzds,$ где L: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = t, \end{cases}$ Применяя формулу (40), получим:

$$\int\limits_L xyzds = \int\limits_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 2\sin t \cdot t \cdot \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1}\,dt = -\sqrt{5}\int\limits_0^{2\pi} td(\cos 2t) =$$

$$= -\sqrt{5}\left(t\cos 2t \Bigg|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\cos 2tdt \right) = -\sqrt{5}\cdot 2\pi + \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Bigg|_0^{2\pi} = -2\sqrt{5}\pi\,.$$

Если кривая задана на плоскости в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то элемент длины дуги $ds = \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\,d\varphi$, и

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\varphi, \rho(\varphi))\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\,d\varphi\ . \quad (42)$$

2. Криволинейный интеграл второго рода

Вновь рассмотрим кривую L, в каждой точке которой задана функция *f(M)*, и зададим разбиение кривой на отрезки. Выберем на каждом отрезке точку M_i и умножим значение функции в этой точке не на длину *i*-го отрезка, как в случае криволинейного интеграла 1-го рода, а на проекцию этого отрезка, скажем, на ось Оx, то есть на разность $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Составим из полученных произведений интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i$.

Определение 8. Если существует конечный предел при $d \to 0$ интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i$, не зависящий от способа разбиения кривой на отрезки и выбора точек M_i, то он называется **криволинейным интегралом второго рода** от функции *f(M)* по кривой *L* и обозначается

$$\int_L f(M)dx = \int_{(AB)} f(x,y,z)dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \,. \qquad (43)$$

Подобным образом можно определить и криволинейные интегралы 2-го рода вида

$$\int_{(AB)} f(x,y,z)dy, \qquad \int_{(AB)} f(x,y,z)dz.$$

Определение 9. Если вдоль кривой *L* определены функции *P(M) = =P(x, y, z), Q(M) = Q(x, y, z), R(M) = R(x, y, z),* которые можно считать компонентами некоторого вектора $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, и существуют интегралы

$$\int_{(AB)} P(x,y,z)dx, \qquad \int_{(AB)} Q(x,y,z)dy, \qquad \int_{(AB)} R(x,y,z)dz,$$

тогда их сумму называют **криволинейным интегралом второго рода (общего вида)** и полагают

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} P(x,y,z)dx + \int_{(AB)} Q(x,y,z)dy + \int_{(AB)} R(x,y,z)dz \,. \quad (44)$$

Замечание. Если считать, что вектор $\vec{F}$ представляет собой силу $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, действующую на точку, движущуюся по кривой (*AB*), то работа этой силы может быть представлена как

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

то есть криволинейным интегралом 2-го рода.

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

1. Если функции *P(M), Q(M), R(M)* непрерывны на кривой (*AB*), то интеграл (44) существует (справедливость этого утверждения следует из определения 9).

2. При изменении направления кривой (то есть перемены местами начальной и конечной ее точек) криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)dx = -\int\limits_{(BA)} f(M)dx. \qquad (45)$$

Действительно, при этом изменяется знак Δx_i в интегральной сумме.

Способ вычисления криволинейного интеграла 2-го рода

Теорема 4. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \qquad \alpha \le t \le \beta\ ,$$

где φ, ψ, χ – непрерывно дифференцируемые функции, и на ней задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Тогда интеграл (40) существует и имеет место равенство

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dx = \int\limits_{a}^{b} f(j\,(t), y\,(t), c\,(t))j\,'(t)dt\,. \qquad (46)$$

Доказательство.

Запишем $\Delta x_i = x_i - x_{i\text{-}1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i\text{-}1})$ и преобразуем последнюю разность по формуле Лагранжа: $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i\text{-}1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i – некоторое значение t, заключенное между $t_{i\text{-}1}$ и t_i. Выберем точку M_i так, чтобы ее координаты соответствовали значению параметра, равному τ_i : $M_i(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i))$. Подставив эти значения в формулу (43), получим:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(j\,(t_i), y\,(t_i), c\,(t_i))j\,'(t_i)\Delta t_i\,.$$

Справа получен предел интегральной суммы для функции $f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, равный определенному интегралу от этой функции:

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dx = \int\limits_{a}^{b} f(j\,(t), y\,(t), c\,(t))j\,'(t)dt\,,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Аналогичные соотношения можно получить для криволинейных интегралов вида $\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dy$, $\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dz$, откуда следует, что

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{a}^{b} (P(j\,(t), y\,(t), c\,(t))j\,'(t) +$$

$$+ Q(j\,(t), y\,(t), c\,(t))y\,'(t) + R(j\,(t), y\,(t), c\,(t))c\,'(t))dt. \qquad (47)$$

Пример 8.

Вычислим интеграл $\int\limits_{L} x^3dx + 2xy^2dy - 3x^2zdz$, где L – отрезок прямой от точки A(1,2,-2) до точки B(0, -1, 0). Запишем уравнение этой прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - 3t, \qquad 0 \le t \le 1. \\ z = -2 + 2t, \end{cases}$$

Следовательно, $\varphi'(t) = -1$, $\psi'(t) = -3$, $\chi'(t) = 2$. Тогда

$$\int\limits_{L} x^3dx + 2xy^2dy - 3x^2zdz =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left((1-t)^3 \cdot (-1) + 2(1-t)(2-3t)^2(-2) - 3(1-t)^2(2t-2) \cdot 2\right)dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (25t^3 - 51t^2 + 31t - 5)dt = \left(\frac{25}{4}t^4 - 17t^3 + \frac{31}{2}t^2 - 5t\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

3. Формула Грина

Установим связь между двойным интегралом по некоторой плоской области D и криволинейным интегралом по границе L этой области.

Пусть в плоскости Оxy дана ограниченная замкнутым контуром L правильная область D. Кривые, ограничивающие эту область снизу и сверху, заданы уравнениями

$y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $y_1(x) \le y_2(x)$, $a \le x \le b$ (рис.13).

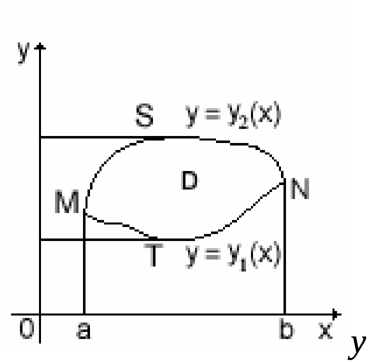


Рис. 13.

Зададим в области D непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные, и рассмотрим интеграл

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy \ .$$

Переходя к двукратному интегралу, получим:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b P(x,y) \Bigg|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b \left(P(x, y_2(x) - P(x, y_1(x)) \right) dx. \tag{48}$$

Так как $y = y_2(x)$ – параметрическое выражение кривой MSN, то

$$\int_a^b P(x, y_2(x))dx = \int_{MSN} P(x,y)dx,$$

где справа стоит криволинейный интеграл по кривой MSN. Аналогично получаем, что

$$\int_a^b P(x, y_1(x))dx = \int_{MTN} P(x,y)dx = -\int_{NTM} P(x,y)dx \, .$$

Подставим полученные результаты в формулу (48):

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{MSN} P(x,y)dx + \int_{NTM} P(x,y)dx = \oint_L P(x,y)dx, \tag{49}$$

так как контур L представляет собой объединение кривых MSN и NTM.

Так же можно получить, что $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = -\oint_L Q(x,y)dy.$ (50)

Вычтем из равенства (49) равенство (50):

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy.$$

При этом обход контура L происходит по часовой стрелке. Изменим направление обхода. Тогда предыдущее равенство примет вид:

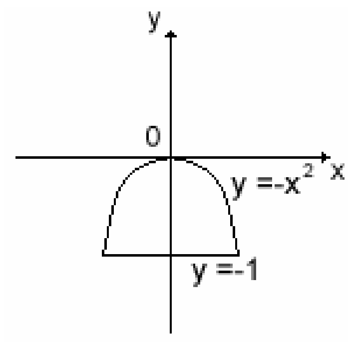
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy. \qquad (51)$$

Эта формула, задающая связь между двойным интегралом и криволинейным интегралом 2-го рода, называется **формулой Грина**.

Замечание. Если в криволинейном интеграле по замкнутому контуру не указано направление обхода, то предполагается, что он производится *против часовой стрелки*. Это направление считается положительным.

Пример 9.

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\oint_L Pdx + Qdy,$ где $P = x + y,\ Q = x - y,$ по контуру L, состоящему из частей кривых $y = -x^2$ и $y = -1$ (направление обхода положительно).



Применим формулу (51):

$$\int_L (x + y)dx + (x - y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (1 - 1)dxdy = 0.$$

4. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода $\int_L Pdx + Qdy = \int_{(MN)} Pdx + Qdy$, где L – кривая, соединяющая точки M и N. Пусть функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области D, в которой целиком лежит кривая L. Определим условия, при которых рассматриваемый криволинейный интеграл зависит не от формы кривой L, а только от расположения точек M и N.

Проведем две произвольные кривые MSN и MTN, лежащие в области D и соединяющие точки M и N (рис.14).

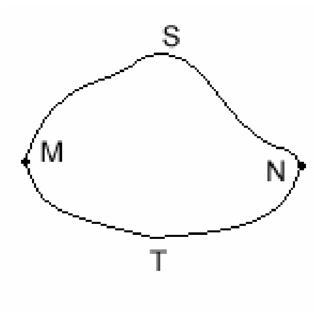


Рис. 14

Предположим, что $\int\limits_{(MSN)} Pdx+Qdy = \int\limits_{(MTN)} Pdx+Qdy$, то есть

$\int\limits_{(MSN)} Pdx+Qdy - \int\limits_{(MTN)} Pdx+Qdy = 0$.

Тогда $\int\limits_{(MSN)} Pdx+Qdy + \int\limits_{(NTM)} Pdx+Qdy = \oint\limits_{L} Pdx+Qdy = 0$, где L – замкнутый контур, составленный из кривых MSN и NTM (следовательно, его можно считать произвольным). Таким образом, условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования равносильно условию, что такой интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Теорема 5 (теорема Грина). Пусть во всех точках некоторой области D непрерывны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы для любого замкнутого контура L, лежащего в области D, выполнялось условие

$$\oint\limits_{L} Pdx+Qdy = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ во всех точках области D.

Доказательство.

1) Достаточность: пусть условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено. Рассмотрим произвольный замкнутый контур L в области D, ограничивающий область S, и напишем для него формулу Грина:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \ .$$

Итак, достаточность доказана.

2) Необходимость: предположим, что условие $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ выполнено в каждой точке области D, но найдется хотя бы одна точка этой области, в которой $\frac{\partial Q}{\partial x}$- $\frac{\partial P}{\partial y}$ $\neq 0$. Пусть, например, в точке $P(x_0, y_0)$ имеем: $\frac{\partial Q}{\partial x}$ - $\frac{\partial P}{\partial y}$ > 0. Так как в левой части неравенства стоит непрерывная функция, она будет положительна и больше некоторого $\delta > 0$ в некоторой малой области D`, содержащей точку P. Следовательно,

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > d \iint_{D'} dxdy = dS_{D'} > 0.$$

Отсюда по формуле Грина получаем, что $\oint_{L'} Pdx + Qdy = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > 0$, где L` - контур, ограничивающий область $D$`. Этот результат противоречит условию $\oint_L Pdx + Qdy = 0$.

Следовательно, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ во всех точках области D, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Аналогичным образом для трехмерного пространства можно доказать, что необходимыми и достаточными условиями независимости криволинейного интеграла

$$\int_{(MN)} Pdx + Qdy + Rdz$$

от пути интегрирования являются:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (52)$$

Замечание 2. При выполнении условий (52) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции u. Это позволяет свести вычисление криволинейного интеграла к определению разности значений u в конечной и начальной точках контура интегрирования, так как

$$\int_{(MN)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(MN)} du = u(N) - u(M).$$

При этом функцию u можно найти по формуле

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz + C, \qquad (53)$$

где (x_0, y_0, z_0) – точка из области D, а C – произвольная постоянная. Действительно, легко убедиться, что частные производные функции u, заданной формулой (53), равны P, Q и R.

<u>Пример 10</u>.

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} yzdx + xzdy + xydz$ по произвольной кривой, соединяющей точки (1, 1, 1) и (2, 3, 4).

Убедимся, что выполнены условия (52):

$$\frac{\partial(xy)}{\partial y} = \frac{\partial(xz)}{\partial z} = x, \frac{\partial(yz)}{\partial z} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} = y, \ \frac{\partial(xz)}{\partial x} = \frac{\partial(yz)}{\partial y} = z.$$

Следовательно, функция u существует. Найдем ее по формуле (53), положив $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Тогда

$u = \int\limits_0^x yzdx + \int\limits_0^y 0 \cdot zdy + \int\limits_0^z 0 \cdot 0dz + C = xyz + C$. Таким образом, функция u определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Примем $C = 0$, тогда $u = xyz$. Следовательно,

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} yzdx + xzdy + xydz = xyz\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 23.$$

5. Поверхностный интеграл первого рода

Если при определении длины кривой она задавалась как предел вписанной в данную кривую ломаной при стремлении к нулю длины наибольшего ее отрезка, то попытка распространить это определение на площадь криволинейной поверхности может привести к противоречию (пример Шварца: можно рассмотреть последовательность вписанных в цилиндр многогранников, у которых наибольшее расстояние между точками какой-либо грани стремится к нулю, а площадь стремится к бесконечности). Поэтому определим площадь поверхности иным способом. Рассмотрим незамкнутую поверхность S, ограниченную контуром L, и разобьем ее какими-либо кривыми на части $S_1, S_2,\ldots, S_n$. Выберем в каждой части точку M_i и спроектируем эту часть на касательную плоскость к поверхности, проходящую через эту точку. Получим в проекции плоскую фигуру с площадью T_i. Назовем ρ наибольшее расстояние между двумя точками любой части поверхности S.

Определение 10. Назовем **площадью S поверхности** предел суммы площадей T_i при $r \to 0$:

$$S = \lim_{r \to 0} \sum_i T_i \,. \tag{54}$$

Рассмотрим некоторую поверхность S, ограниченную контуром L, и разобьем ее на части $S_1, S_2,\ldots, S_n$ (при этом площадь каждой части тоже обозначим S_n). Пусть в каждой точке этой поверхности задано значение функции $f(x, y, z)$. Выберем в каждой части S_i точку M_i (x_i, y_i, z_i) и составим интегральную сумму

$$s = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)S_i \,. \tag{55}$$

Определение 11. Если существует конечный предел при $r \to 0$ интегральной суммы (55), не зависящий от способа разбиения поверхности на части и выбора точек M_i, то он называется **поверхностным интегралом первого рода от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности S** и обозначается

$$\iint_S f(M)dS = \iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{r \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i \,. \tag{56}$$

Замечание. Поверхностный интеграл 1-го рода обладает обычными свойствами интегралов (линейность, суммирование интегралов от данной функции по отдельным частям рассматриваемой поверхности и т.д.).

Геометрический и физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода

Если подынтегральная функция $f(M) \equiv 1$, то из определения 11 следует, что $\iint_S dS$ равен площади рассматриваемой поверхности S. Если же считать, что $f(M)$ задает плотность в точке M поверхности S, то масса этой поверхности равна

$$M = \iint_S f(M)dS\,. \qquad (57)$$

6. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода

Ограничимся случаем, когда поверхность S задается явным образом, то есть уравнением вида $z = \varphi(x, y)$. При этом из определения площади поверхности следует, что $S_i = \dfrac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь проекции S_i на плоскость Оxy, а γ_i – угол между осью Оz и нормалью к поверхности S в точке M_i. Известно, что

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i, y_i)+\varphi_y'^2(x_i, y_i)}},$$

где (x_i, y_i, z_i) – координаты точки M_i. Следовательно,

$$S_i = \sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i, y_i)+\varphi_y'^2(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i\,.$$

Подставляя это выражение в формулу (55), получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i))\sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i, y_i)+\varphi_y'^2(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i\,,$$

где суммирование справа проводится по области Ω плоскости Оxy, являющейся проекцией на эту плоскость поверхности S (рис.15).

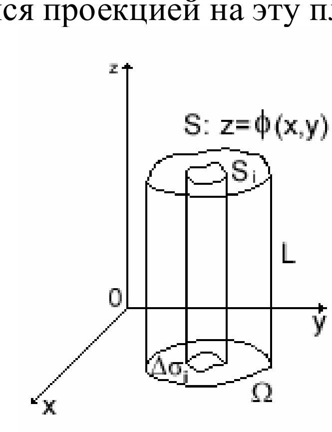


Рис. 15

При этом в правой части получена интегральная сумма для функции двух переменных по плоской области, которая в пределе при $\max d_i \to 0$ дает двойной интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1+(\varphi'_x(x, y))^2+(\varphi'_y(x, y))^2}\,dxdy.$$

Таким образом, получена формула, позволяющая свести вычисление поверхностного интеграла 1-го рода к вычислению двойного интеграла:

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{\Omega} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1+(\varphi'_x(x, y))^2+(\varphi'_y(x, y))^2}\,dxdy. \quad (58)$$

Замечание. Уточним еще раз, что в левой части формулы (58) стоит *поверхностный* интеграл, а в правой – *двойной*.

Пример 11.

1. Вычислим $\iint\limits_{S} xydS$, где S – часть плоскости $3x + 4y + 5z = 36$, расположенная в первом октанте. Преобразуем это уравнение к виду $z = -\dfrac{3x+4y-36}{5}$, откуда $\varphi'_x = -\dfrac{3}{5}$, $\varphi'_y = -\dfrac{4}{5}$, $\sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y} = \sqrt{2}$. Проекцией плоскости S на плоскость Oxy является треугольник с вершинами в точках (0, 0), (12, 0) и (0, 9). Тогда из формулы (58) получим:

$$\iint\limits_{S} xydS = \sqrt{2}\iint\limits_{\Omega} xydxdy = \sqrt{2}\int_0^{12} xdx \int_0^{9-\frac{3}{4}x} ydy = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{12} x\left(9-\frac{3}{4}x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{12}\left(81x-\frac{27}{2}x^2+\frac{9}{16}x^3\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{81}{2}x^2-\frac{9}{2}x^3+\frac{9}{64}x^4\right)\Bigg|_0^{12} = 486\sqrt{2}.$$

7. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства и вычисление

Определим понятие **стороны поверхности**. Выберем на гладкой поверхности (замкнутой или ограниченной гладким контуром) точку M_0 и проведем в ней нормаль к поверхности, выбрав для нее определенное направление (одно из двух возможных). Проведем по поверхности замкнутый контур, начинающийся и заканчивающийся в точке M_0. Рассмотрим точку M, обходящую этот контур, и в каждом из ее положений проведем нормаль того направления, в которое непрерывно переходит нормаль из предыдущей точки. Если после обхода контура нормаль вернется в точке M_0 в первоначальное положение при любом выборе точки M_0 на поверхности, поверхность называется **двусторонней**. Если же направление нормали после обхода хотя бы одной точки изменится на противоположное, поверхность называется **односторонней** (примером односторонней поверхности служит лист Мебиуса).

Из вышесказанного следует, что выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет направление нормали во всех точках поверхности.

Определение 12. Совокупность всех точек поверхности с одинаковым направлением нормали называется **стороной поверхности**.

Ориентация поверхности

Рассмотрим незамкнутую гладкую двустороннюю поверхность S, ограниченную контуром L, и выберем одну сторону этой поверхности.

Определение 13. Назовем **положительным** направление обхода контура L, при котором движение по контуру происходит против часовой стрелки относительно наблюдателя, находящегося в конечной точке нормали к какой-либо точке поверхности S, соответствующей выбранной стороне поверхности. Обратное направление обхода контура назовем **отрицательным**.

Введем определение поверхностного интеграла 2-го рода по аналогии с соответствующим криволинейным интегралом. Рассмотрим гладкую двустороннюю поверхность S, заданную уравнением $z = z(x, y)$, в каждой точке которой определена функция $f(M) = f(x, y, z)$, и выберем какую-либо из ее сторон (или, что то же самое, определенную ориентацию). Разобьем поверхность S на части $S_1, S_2, \dots, S_n$, выберем в каждой части S_i точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, и умножим $f(M_i)$ на площадь D_i проекции части S_i на плоскость Oxy. При этом будем считать, проекция части *верхней* по отношению к плоскости

Oxy стороны рассматриваемой поверхности имеет знак «+», а *нижней* – знак «-». Составим сумму

$$s = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)D_i \,. \qquad (59)$$

Определение 14. Если существует конечный предел суммы (59) при ρ→0, не зависящий от способа разбиения поверхности и выбора точек на ней, то он называется **поверхностным интегралом второго рода от функции *f(M)* по выбранной стороне поверхности *S*** и обозначается

$$\iint_S f(M)dxdy = \iint_S f(x, y, z)dxdy. \qquad (60)$$

Замечание. В этой символической записи не содержится указания на то, какая сторона поверхности выбрана, поэтому это требуется оговаривать отдельно.

Подобным образом можно проектировать части поверхности на координатные плоскости О*xz* и О*yz* (при условии, что уравнение поверхности можно представить в виде *y = y(x, z)* или *x = x(y, z)*). Получим два других поверхностных интеграла 2-го рода:

$$\iint_S f(x, y, z)dxdz \ \text{ и } \ \iint_S f(x, y, z)dydz\,. \qquad (61)$$

Рассмотрев сумму интегралов вида (60) и (61) по одной и той же поверхности соответственно от функций *P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z),* получим **поверхностный интеграл второго рода общего вида**:

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy. \qquad (62)$$

Замечание. Здесь вновь функции *P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)* можно рассматривать как компоненты некоторого вектора $\vec{F} = \{P, Q, R\}$.

Отметим **основное свойство поверхностного интеграла 2-го рода:**

При замене рассматриваемой стороны поверхности на противоположную поверхностный интеграл 2-го рода меняет знак:

$$\iint_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= -\iint_{S^-} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \qquad (63)$$

Справедливость этого утверждения следует из определения 14.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

Если задать единичный вектор выбранной нормали к поверхности S в виде $\boldsymbol{n}$ = {cos α, cos β, cos γ}, где α, β, γ – углы, образованные нормалью с осями координат, то $D_i = S_i \cos g = \dfrac{S_i}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$ (выбор знака зависит от направления нормали). Тогда из (59), (60) следует, что

$$\iint_S f(M)dxdy = \iint_S f(x,y,z(x,y))\cos g dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\frac{dS}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} =$$

$$= \pm\iint_D f(x,y,z(x,y))\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy = \pm\iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy. \qquad (64)$$

Здесь D – проекция поверхности S на плоскость Оxy, а выражение для dS взято из формулы (58). Таким образом, вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению обычного двойного интеграла по области D от функции f, в которую вместо координаты z подставлено ее выражение из уравнения поверхности S. Обобщая эти рассуждения, получим, что

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz = \pm\iint_D P(x,y,z(x,y)dxdy \pm$$

$$\pm\iint_{D'} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint_{D''} R(x(y,z),y,z)dydz, \qquad (65)$$

где D' и D'' - проекции поверхности S на координатные плоскости Oxz и Oyz.

<u>Пример 12.</u>

Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода $\iint_S dxdy$, где S –

нижняя сторона части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ при $0\le z\le 1$.

Применим формулу (64), учитывая, что выбрана нижняя сторона поверхности и что проекцией части конуса на плоскость Oxy является круг $x^2+y^2\le 1$:

$$\iint\limits_S dxdy = -\iint\limits_D dxdy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho = -\pi .$$

8. Связь поверхностных интегралов первого и второго рода

Учитывая, что проекции элемента поверхности S_i на координатные плоскости имеют вид $S_i\cos\gamma$, $S_i\cos\beta$, $S_i\cos\alpha$, из (64) получим:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS = \iint\limits_S \vec{A}\vec{n}dS, \qquad (66)$$

где векторное поле $\vec{A}=\{P,Q,R\}$, а $\vec{n}$ - векторное поле единичных нормалей заданного направления в каждой точке поверхности. Следовательно, поверхностный интеграл 2-го рода (65) равен поверхностному интегралу 1-го рода (66). Эта формула предоставляет еще одну возможность вычисления поверхностного интеграла 2-го рода. Заметим, что при смене стороны поверхности меняют знак направляющие косинусы нормали, и, соответственно, интеграл в правой части равенства (66), который сам по себе, как поверхностный интеграл 1-го рода, от выбора стороны поверхности не зависит.

Пример 13.

Рассмотрим интеграл $\iint\limits_S xydxdy + xzdxdz + yzdydz$, где S – внешняя сторона верхней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Так как радиус сферы, проведенный в любую ее точку, можно считать нормалью к сфере в этой точке, единичный вектор нормали можно задать в виде $n = \{\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\}$. Тогда, используя формулу (66), получаем, что требуется вычислить поверхностный интеграл 1-го рода

$$\frac{3}{R}\iint_S xyzdS = \frac{3}{R}\iint_D xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy =$$

$$= 3\iint_D xydxdy = 3\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^R \rho^3 d\rho = 0.$$

(Область D – круг с центром в начале координат радиуса R, поэтому удобно в конце расчета перейти к полярным координатам).

9. Формула Гаусса-Остроградского

Зададим в пространстве замкнутую трехмерную область V, ограниченную поверхностью S и проектирующуюся на плоскость Oxy в правильную область D.

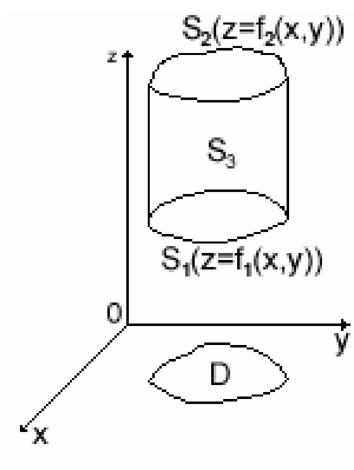


Рис. 16.

Будем считать, что поверхность S можно разбить на три части: S_1, заданную уравнением $z = f_1(x, y)$, S_2: $z = f_2(x, y)$ и S_3 – цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz (рис.16).
Зададим в каждой точке области V и поверхности S непрерывные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ или, иначе говоря, вектор $\vec{A} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$ и вычислим интеграл

$$I = \iiint_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint_D\left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\right)dxdy = \iint_D R(x,y,f_2(x,y))dxdy -$$

$$-\iint_D R(x, y, f_1(x,y))dxdy.$$

Зададим ориентацию поверхности S, выбрав направление *внешней* нормали, тогда на S_1 $\cos(\boldsymbol{n}, z) < 0$, на S_2 $\cos(\boldsymbol{n}, z) > 0$, а на S_3 $\cos(\boldsymbol{n}, z) = 0$. Двойные интегралы, стоящие в правой части предыдущего равенства, равны соответствующим поверхностным интегралам:

$$\iint_D R(x, y, f_2(x,y))dxdy = \iint_{S_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS,$$

$$\iint_D R(x, y, f_1(x,y))dxdy = \iint_{S_1} R(x,y,z)(-\cos(\vec{n}, z))dS.$$

(Знак «-» во втором интеграле появляется за счет того, что элементы площади поверхности S_1 и области D связаны соотношением $dxdy = \Delta S(-\cos(\boldsymbol{n}, z))$). Следовательно, исходный интеграл можно представить в виде:

$$I = \iint_{S_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS + \iint_{S_1} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS = \iint_{S_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS +$$

$$+\iint_{S_1} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS + \iint_{S_3} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS = \iint_{S} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS.$$

Окончательный результат можно записать так:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS.$$

Таким же образом можно получить соотношения

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \iint_S P(x,y,z)\cos(\vec{n}, x)dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \iint_S Q(x,y,z)\cos(\vec{n}, y)dS.$$

Складывая эти три равенства, получаем **формулу Гаусса-Остроградского**:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_S \left(P\cos(\vec{n}, x) + Q\cos(\vec{n}, y) + R\cos(\vec{n}, z)\right)dS. \tag{67}$$

Воспользовавшись формулой (66), задающей связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода, можно записать формулу Гаусса-Остроградского в ином виде:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \tag{68}$$

где запись «S^{+}» означает, что интеграл, стоящий справа, вычисляется по внешней стороне поверхности S.

Пример 14.
Вычислим поверхностный интеграл 1-го рода

$\oiint\limits_S (x^2\cos(\vec n, x) + y^2\cos(\vec n, y) + (z^2+1)\cos(\vec n, z))dS$ по поверхности

$S: x^2+y^2+z^2=9,\ \ z=0\ \ (z\ge 0).$

Применим формулу Гаусса-Остроградского:

$$\oiint\limits_S (x^2\cos(\vec n, x) + y^2\cos(\vec n, y) + (z^2+1)\cos(\vec n, z))dS = \iiint\limits_V 2(x+y+z)dxdydz.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_V 2(x+y+z)dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{3} (\rho\cos\varphi\ \sin\theta + \rho\sin\varphi\ \sin\theta + \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho =$$

$$= 2\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^3 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi\ \sin^2\theta + \sin\varphi\ \sin^2\theta + \cos\theta\ \sin\theta)d\theta =$$

$$= \frac{81}{2}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta + \frac{81}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta =$$

$$= \frac{81}{4}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Bigg|_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{81}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cos 2\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{81}{4}\pi(-1-1) = \frac{81}{2}\pi.$$

10. Формула Стокса

Рассмотрим поверхность S такую, что любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает ее не более чем в одной точке. Обозначим границу поверхности λ и выберем в качестве положительного направления нормали такое, при котором она образует с положительным направлением оси Oz острый угол. Если уравнение поверхности имеет вид $z = f(x, y)$, то направляющие косинусы нормали задаются формулами

$$\cos(\vec{n}, x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos(\vec{n}, y) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos(\vec{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Рассмотрим некоторую трехмерную область V, в которой целиком лежит поверхность S, и зададим в этой области функцию $P(x, y, z)$, непрерывную вместе с частными производными первого порядка. Вычислим криволинейный интеграл 2-го рода по кривой λ:

$$\oint_l P(x, y, z)dx.$$

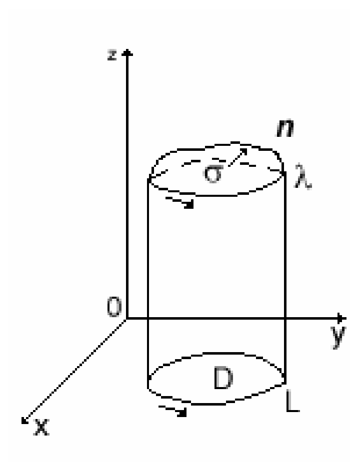


Рис. 17.

Уравнение линии λ имеет вид $z = f(x, y)$, где x, y – координаты точек линии L, являющейся проекцией λ на плоскость Oxy (рис.17). Поэтому, используя формулу (46), получаем:

$$\oint_l P(x, y, z)dx = \oint_L P(x, y, f(x, y))dx.$$

Обозначим $\underline{P}(x, y) = P(x, y, f(x, y))$, $\underline{Q}(x, y) = 0$ и применим к интегралу, стоящему в правой части предыдущего равенства, формулу Грина:

$$-\iint_D \frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial y} dxdy = \oint_L P(x, y, f(x, y))dx,$$

где область D ограничена линией L. Преобразуем левое подынтегральное выражение, используя формулу производной сложной функции:

$$\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

и подставим его в предыдущее равенство:
$-\iint\limits_D\left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L P(x,y,f(x,y))dx$. Тогда

$\oint\limits_l P(x,y,z)dx=-\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy-\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy.$ Теперь применим к интегралам, стоящим справа, формулу (64) и перейдем к поверхностным интегралам 1-го рода по поверхности σ:

$$\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\iint\limits_s\frac{\partial P}{\partial y}\cos(\vec{n},z)ds\,,$$

$$\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy=\iint\limits_s\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\vec{n},z)ds=-\iint\limits_s\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\vec{n},y)ds\,,$$

так как $\frac{\cos(\vec{n},y)}{\cos(\vec{n},z)}=-\frac{\partial f}{\partial y}$. Следовательно, окончательный результат преобразований выглядит так:

$$\oint\limits_l P(x,y,z)dx=\iint\limits_s\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\vec{n},y)-\frac{\partial P}{\partial y}\cos(\vec{n},z)\right)ds\,.$$

При этом направление обхода контура λ выбирается соответствующим положительному направлению нормали (рис.17).
Задавая в области V непрерывно дифференцируемые функции
$Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, можно получить для них аналогичные соотношения:

$$\oint\limits_l Q(x,y,z)dx=\iint\limits_s\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\vec{n},z)-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos(\vec{n},x)\right)ds\,,$$

$$\oint\limits_l R(x,y,z)dx=\iint\limits_s\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos(\vec{n},x)-\frac{\partial R}{\partial x}\cos(\vec{n},y)\right)ds\,.$$

Складывая левые и правые части полученных равенств, получим **формулу Стокса**, устанавливающую связь между поверхностным интегралом 1-го рода по поверхности σ и криволинейным интегралом 2-го рода по ограничивающему ее контуру λ с учетом ориентации поверхности:

$$\oint_l Pdx+Qdy+Rdz=\iint_s\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(\vec{n},x)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(\vec{n},y)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(\vec{n},z)\right]ds\ =\iint_s\begin{vmatrix}\cos(\vec{n},x) & \cos(\vec{n},y) & \cos(\vec{n},z)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}ds. \qquad (69)$$

Последняя запись позволяет лучше запомнить подынтегральное выражение в правой части формулы Стокса, которое можно получить, раскрывая определитель по первой строке и учитывая, что во второй его строке стоят операторы частного дифференцирования по соответствующим переменным, применяемые к функциям, стоящим в третьей строке.

Используя связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода (формула (66)), можно записать формулу Стокса в ином виде:

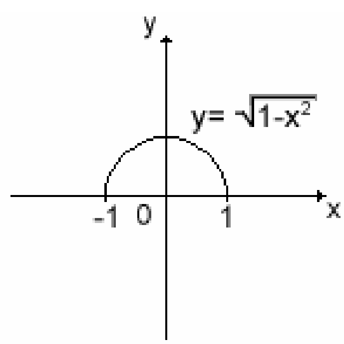
$$\oint_l Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{s^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \quad (70)$$

<u>Пример 15</u>.

Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода

$$\oint_l (3x+y^3)dx+(2x^2-y)dy-zdz$$

по контуру $l: z=0,\ x^2+y^2=1,\ y=0\ (y\geq 0)$ при положительном направлении обхода контура.



Вычислим

$$\begin{vmatrix} \cos(\vec{n},x) & \cos(\vec{n},y) & \cos(\vec{n},z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x+y^3 & 2x^2-y & -z \end{vmatrix} = 0\cdot\cos(\vec{n},x) + 0\cdot\cos(\vec{n},y) + (4x-3y^2)\cdot 1.$$

Выберем в качестве поверхности, натянутой на контур λ, часть плоскости Oxy, ограниченную этим контуром, и применим формулу Стокса:

$$\oint_l (3x+y^3)dx+(2x^2-y)dy-zdz = \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{0} (4x-3y^2)dy =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^0 (4\rho\cos\varphi - 3\rho^2\sin^2\varphi)\rho\, d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \left(\frac{4}{3}\cos\varphi\cdot\rho^3 - \frac{3}{4}\sin^2\varphi\cdot\rho^4\right)\Bigg|_1^0 =$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = -\frac{4}{3}\sin\varphi\Bigg|_0^{\pi} - \frac{3}{16}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\pi} + \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{8}\pi.$$

III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ, КРИВОЛИНЕЙНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

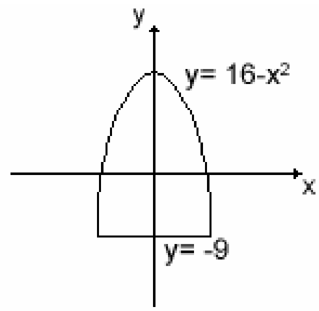
1. Двойной интеграл

1. Площадь плоской области

Из формулы (1) следует, что при $f(x,y) \equiv 0$ предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ при $r \to 0$ равен площади области интегрирования S, то есть

$$\iint_S dxdy = S. \qquad (71)$$

<u>Пример 16</u>.
Найти площадь области, ограниченной линиями $y = 16 - x^2$, $y = -9$.



Для определения пределов интегрирования приравняем правые части уравнений, задающих границы области:

$16-x^2=-9,\ \ x^2=25,\ \ x=\pm 5.$ Тогда

$$S=\int_{-5}^{5}dx\int_{-9}^{16-x^2}dy=\int_{-5}^{5}\left(16-x^2-(-9)\right)dx=$$

$$=\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{5}=125-\frac{125}{3}+125-\frac{125}{3}=\frac{500}{3}\ (кв.\ ед.)$$

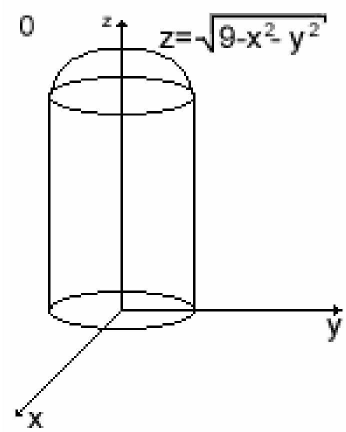
2. Объем цилиндроида

Рассмотрим тело, ограниченное частью поверхности *S*: *z* = *f(x,y)* , ограниченной контуром *L*, проекцией *D* этой поверхности на плоскость О*xy* и отрезками, параллельными оси О*z* и соединяющими каждую точку контура *L* с соответствующей точкой плоскости О*xy*. Такое тело будем называть **цилиндроидом**. Тогда из формул (1) и (2) получим, что объем этого тела равен двойному интегралу от функции *f(x,y)* по проекции *D* области *S* на координатную плоскость *Oxy*:

$$V_{цил}=\iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (72)$$

Пример 17.

Найти объем цилиндроида, ограниченного поверхностью $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, цилиндром $x^2+y^2=4$ и частью координатной плоскости *Oxy*.



Проекцией D поверхности S: $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ на координатную плоскость Oxy является круг $x^2+y^2=4$. Применим формулу (72):

$$V=\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy=\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dy\,.$$

Перейдем к полярным координатам:

$$V=\int_0^{2p}dj\int_0^2\sqrt{9-r^2}\,rdr=-\frac{1}{2}\cdot 2p\int_0^2\left(9-r^2\right)^{\frac{1}{2}}d(9-r^2)=-p\,(9-r^2)\Big|_0^2=$$

$$=-p\left(5^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)=p\,(27-5\sqrt{5})(куб.ед).$$

3. Площадь криволинейной поверхности

Вычислим площадь части криволинейной поверхности S, заданной уравнением $z=f(x,y)$, ограниченной контуром L. Вспомним еще раз, что площадь элемента поверхности ΔS_i равна

$$\Delta S_i=\frac{\Delta D_i}{\cos g}=\sqrt{1+f_x'^2(x_i,h_i)+f_y'^2(x_i,h_i)}\,\Delta D_i\,,$$

где ΔD_i – проекция ΔS_i на плоскость Oxy, γ – угол между осью Oz и нормалью к ΔS_i в некоторой ее точке $M_i(x_i,h_i)$. Составив интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x'^2(x_i,h_i)+f_y'^2(x_i,h_i)}\,\Delta D_i$$

и устремив ее к пределу при $r\to 0$, получим формулу для площади поверхности:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy. \qquad (73)$$

<u>Пример 18</u>.

Найти площадь верхней поверхности цилиндроида из примера 15.

Эта поверхность представляет собой часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вырезанную цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

Найдем частные производные функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ по x и y:

$$z_x' = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad z_y' = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Применим формулу (73):

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{9 - x^2 - y^2}}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{\frac{9 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{9 - x^2 - y^2}}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^2 \frac{3r\,dr}{\sqrt{9 - r^2}} = 2p \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^2 (9 - r^2)^{-\frac{1}{2}} d(9 - r^2) =$$

$$-3p\sqrt{9 - r^2}\,\Bigg|_0^2 = 3p(3 - \sqrt{5}) \ (кв.ед.)$$

4. Момент инерции плоской фигуры

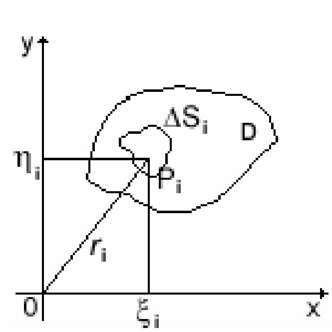


Рис. 18.

Вспомним определение момента инерции

а) материальной точки M с массой m относительно точки O: $I = mr^2$ (r –

расстояние от M до O);

б) системы материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ относительно точки O:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Определим теперь момент инерции относительно точки O материальной плоской фигуры D.

Найдем момент инерции фигуры D (рис.18) относительно начала координат, считая, что плотность в каждой точке равна 1. Разобьем область D на части ΔS_i (i = 1, 2,… n) и выберем в каждой части точку P_i (ξ_i, η_i). Назовем элементарным моментом инерции площадки ΔS_i выражение вида $\Delta I_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\Delta S_i$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + h_i^2)\Delta S_i \qquad (74)$$

для функции $\rho^2(x, y) = x^2 + y^2$ (квадрата расстояния от любой текущей точки $P(x,y)$ до начала координат) по области D.

Определение 15. Предел интегральной суммы (74) при стремлении максимального диаметра d элементарной подобласти к нулю ($d \to 0$) называется **моментом инерции фигуры *D* относительно начала координат**:

$$I_0 = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + h_i^2)\Delta S_i = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy. \qquad (75)$$

Определение 16. Интегралы

$$I_{xx} = \iint_D y^2 dxdy, \quad I_{yy} = \iint_D x^2 dxdy \qquad (76)$$

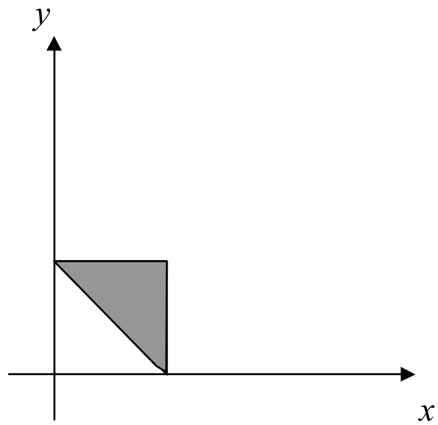
называются **моментами инерции фигуры *D* относительно осей О*x* и О*y***.

Замечание. Если поверхностная плотность не равна 1, а является некоторой функцией $\gamma = \gamma(x, y)$, то момент инерции фигуры относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = \iint_D g(x, y)(x^2 + y^2)dxdy. \qquad (77)$$

Пример 19.

Вычислить момент инерции плоской пластины с поверхностной плотностью $\gamma(x, y) = 3xy$, имеющей форму треугольника, ограниченного отрезками прямых $x + y = 3$, $x = 3$, $y = 3$, относительно оси Ox.



Применим формулу (76):

$$I_{xx} = \iint_D g\,(x, y) y^2 dxdy = \int_0^3 dx \int_{3-x}^3 3xy \cdot y^2 dy = 3\int_0^3 xdx \int_{3-x}^3 y^3 dy = \frac{3}{4}\int_0^3 x \cdot y^4 \Bigg|_{3-x}^{3} dx =$$

$$= \frac{3^5 \cdot x^2}{8}\Bigg|_0^3 + \frac{3}{4}\int_0^3 (3-x-3)(3-x)^4 dx = \frac{3^7}{8} + \frac{3}{4}\int_0^3 (3-x)^5 dx - 3\cdot\frac{3}{4}\int_0^3 (3-x)^4 dx =$$

$$= \frac{3^7}{8} + \frac{3}{4}\left(\frac{(3-x)^6}{6}\Bigg|_0^3 - \frac{3}{5}(3-x)^5\Bigg|_0^3\right) = \frac{3^7}{8} - \frac{3}{4}\left(-\frac{3^6}{6} + \frac{3^6}{5}\right) = 3^7\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{20} + \frac{1}{24}\right) = 801{,}9.$$

5. Координаты центра масс плоской фигуры

Как известно, координаты центра масс системы материальных точек P_1, $P_2, \ldots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \quad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}.$$

Если разбить плоскую фигуру D с поверхностной плотностью, равной 1, на части, то масса каждой части будет равна ее площади. Будем считать теперь, что вся масса элементарной площадки ΔS_i сосредоточена в какой-либо ее точке $P_i\ (\xi_i, \eta_i)$. Тогда фигуру D можно рассматривать как систему материальных точек, центр масс которой определяется равенствами

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i}.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$, получим точные формулы для координат центра масс плоской фигуры:

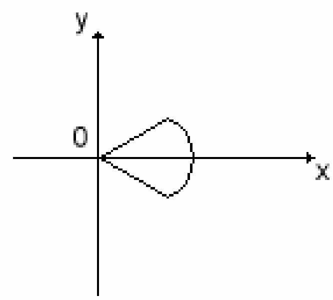
$$x_c = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{M_x}{M}. \qquad (78)$$

В случае переменной поверхностной плотности $\gamma = \gamma\ (x, y)$ эти формулы примут вид

$$x_c = \frac{\iint_D g\,(x,y) x dx dy}{\iint_D g\,(x,y) dx dy} = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{\iint_D g\,(x,y) y dx dy}{\iint_D g\,(x,y) dx dy} = \frac{M_x}{M}. \qquad (79)$$

<u>Пример 20</u>.

Найти координаты центра тяжести кругового сектора радиуса 2 с центром в начале координат и центральным углом 60°, если $\gamma(x, y) = 1$.



Найдем M, M_x и M_y в полярных координатах, учитывая, что область интегрирования симметрична относительно оси Ox.

$$M = \iint_D dx dy = 2\int_0^{\frac{p}{6}} dj \int_0^2 r\,dr = 2 \cdot \frac{p}{6} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{2p}{3};$$

$$M_x = \iint_D y dx dy = \int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{6}} dj \int_0^2 r \sin j \cdot r\,dr = \int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{6}} \sin j\, dj \int_0^2 r^2 dr =$$

$$= -\cos j\,\Big|_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{6}} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = -\frac{8}{3}\left(\cos\frac{p}{6} - \cos\left(-\frac{p}{6}\right)\right) = 0;$$

$$M_y = \iint_D x dx dy = 2\int_0^{\frac{p}{6}} dj \int_0^2 r\cos j \cdot r dr = 2\int_0^{\frac{p}{6}} \cos j\, dj \int_0^2 r^2 dr =$$

$$= 2\sin j\,\Big|_0^{\frac{p}{6}} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Применим формулы (78):

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{4}{3} : \frac{2p}{3} = \frac{2}{p};\quad y_C = \frac{M_x}{M} = 0.$$

2. Тройной интеграл

1. Объем тела

Из определения 3 следует, что при $f(x, y, z) \equiv 1$ тройной интеграл по некоторой замкнутой области V равен объему тела V:

$$V = \iiint_V dx dy dz. \qquad (80)$$

Пример 21.

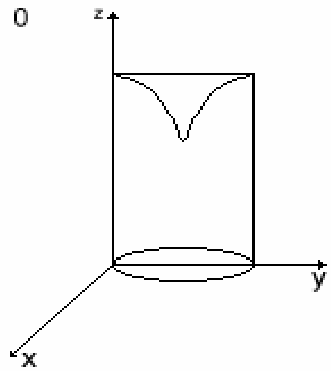
Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \frac{5}{4} - x^2$, $z = 0$.

Преобразуем уравнение первой поверхности: $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Следовательно, это круговой цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, радиуса 1 с центром в точке (0; 1).

Второе уравнение задает параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy, поверхность которого ограничивает данное тело сверху. Нижняя граница тела представляет собой часть координатной плоскости Oxy.

Проекцией тела на плоскость Oxy является круг, граница которого задается уравнением $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Учитывая все сказанное, применим формулу (80):



$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^2 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\frac{5}{4}-x^2}dz=\int_0^2\left(\frac{5}{4}-x^2\right)dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}dy\,.$$

Перейдем в полученном интеграле к полярным координатам, в которых уравнение окружности $x^2+y^2=2y$ преобразуется к виду:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\sin\varphi\Rightarrow\rho=2\sin\varphi\,,$$

а угол φ меняется от 0 до π:

$$V=\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\left(\frac{5}{4}-\rho^2\cos^2\varphi\right)\rho d\rho=\int_0^\pi\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\cos^2\varphi\,\Bigg|_0^{2\sin\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{5}{2}\sin^2\varphi-4\sin^4\varphi\cos^2\varphi\right)d\varphi=\frac{5}{4}\int_0^\pi(1-\cos2\varphi)d\varphi-\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin^2 2\varphi\,(1-\cos2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{5}{4}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{4}\int_0^\pi(1-\cos4\varphi)d\varphi+\frac{1}{4}\int_0^\pi\sin^2 2\varphi\,d\sin2\varphi=$$

$$=\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{4}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^\pi+\frac{1}{12}\sin^3 2\varphi\,\Bigg|_0^\pi=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi\,.$$

2. Масса тела

Если $\gamma=\gamma\,(x,y,z)$ – функция, задающая плотность вещества, из которого состоит тело V, то масса тела выражается формулой

$$M=\iiint\limits_V\gamma\,(x,y,z)dxdydz. \qquad (81)$$

3. Момент инерции тела

Используя формулы для моментов инерции точки *M (x, y, z)* массы *m* относительно координатных осей:

$$I_{xx} = (y^2 + z^2)m, \quad I_{yy} = (x^2 + z^2)m, \quad I_{zz} = (x^2 + y^2)m$$

и проводя те же рассуждения, что и при определении моментов плоской фигуры, можно задать моменты инерции тела относительно координатных осей и начала координат в виде:

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) g\,(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_{yy} = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) g\,(x, y, z) dxdydz, \tag{82}$$

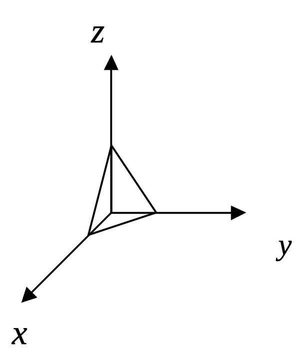
$$I_{zz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) g\,(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) g\,(x, y, z) dxdydz, \tag{83}$$

где $\gamma\ (x, y, z)$ – плотность вещества.

Пример 22.

Вычислить момент инерции пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$, относительно начала координат при $\gamma(x,y,z) = 1$.



Плоскость $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$ пересекает координатную плоскость Oxy по прямой $y=2-\frac{2}{3}x$, уравнение которой получено из уравнения плоскости при z = 0. Соответственно проекцией всей пирамиды на плоскость Oxy является треугольник, стороны которого задаются уравнениями x = 0, y = 0, $y=2-\frac{2}{3}x$. Воспользуемся формулой (83):

$$I_0=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)g(x,y,z)dxdydz=\int_0^3 dx\int_0^{2-\frac{2}{3}x} dy\int_0^{4-\frac{4}{3}x-2y}(x^2+y^2+z^2)dz=$$

$$=\int_0^3 dx\int_0^{2-\frac{2}{3}x}\left((x^2+y^2)\left(4-\frac{4}{3}x-2y\right)+\frac{1}{3}\left(4-\frac{4}{3}x-2y\right)^3\right)dy=$$

$$\int_0^3 dx\left(\int_0^{2-\frac{2}{3}x}\left(4x^2-\frac{4}{3}x^3\right)dy+\int_0^{2-\frac{2}{3}x}\left(4-\frac{4}{3}x\right)y^2dy-2\int_0^{2-\frac{2}{3}x}y^3dy-2\int_0^{2-\frac{2}{3}x}x^2ydy+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{2-\frac{2}{3}x}\left(4-\frac{4}{3}x-2y\right)^3 d\left(4-\frac{4}{3}x-2y\right)\right)=\int_0^3\left(\left(4x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\left(2-\frac{2}{3}x\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(4-\frac{4}{3}x\right)\left(2-\frac{2}{3}x\right)^3-\frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{3}x\right)^4-x^2(2-\frac{2}{3}x)^2+\frac{1}{24}\left(4-\frac{4}{3}x\right)^4\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(4x^2-\frac{8}{3}x^3+\frac{4}{9}x^4\right)dx-40\int_0^3\left(1-\frac{1}{3}x\right)^4 d\left(1-\frac{1}{3}x\right)=$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^5-8\left(1-\frac{1}{3}x\right)^5\right]\Bigg|_0^3=36-54+\frac{108}{5}+8=\frac{58}{5}.$$

4. Координаты центра масс тела

Формулы для координат центра масс тела тоже задаются аналогично случаю плоской фигуры:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V xg(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{yz}}{M},$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V yg(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad (84)$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V zg(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Здесь $M_{yz} = \iiint\limits_V xg(x,y,z)dxdydz,\ M_{xz} = \iiint\limits_V yg(x,y,z)dxdydz,$

$M_{xy} = \iiint\limits_V zg(x,y,z)dxdydz -$ статические моменты тела отностиельно координатных плоскостей *Oyz, Oxz, Oxy* соответственно.

3. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл 1-го рода

1. Длина кривой

Если подынтегральная функция *f(x, y, z)* ≡ 1, то из определения криволинейного интеграла 1-го рода получаем, что в этом случае он равен длине кривой, по которой ведется интегрирование:

$$l = \int\limits_l ds. \qquad (85)$$

2. Масса кривой

Считая, что подынтегральная функция γ *(x, y, z)* определяет плотность каждой точки кривой, найдем массу кривой по формуле

$$M = \int\limits_l g(x,y,z)ds. \qquad (86)$$

Пример 23.

Найти массу кривой с линейной плотностью $g = \sin j$, заданной в полярных координатах уравнением $r = 3(1+\cos j),\ 0 \le j \le \frac{p}{2}$.

Используем формулу (86):

$$M = \int\limits_l \sin j\, dl = \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sin j \sqrt{r^2 + (r'(j))^2}\, dj = 3\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sin j \sqrt{(1+\cos j)^2 + (-\sin j)^2}\, dj =$$

$$= 3\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sin j \sqrt{1+\cos j}\, dj = -3\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{p}{2}} (1+\cos j)^{\frac{1}{2}} d(1+\cos j) =$$

$$= -3\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}(1+\cos j)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = -2\sqrt{2}(1-2^{\frac{3}{2}}) = 2(4-\sqrt{2}).$$

3. Моменты кривой l найдем, рассуждая так же, как в случае плоской области:

$$M_x = \int\limits_l yg(x,y)ds, M_y = \int\limits_l xg(x,y,z)ds \ - \qquad (87)$$

- статические моменты плоской кривой l относительно осей Оx и Оy;

$$I_0 = \int\limits_l (x^2 + y^2 + z^2)ds \ - \qquad (88)$$

- момент инерции пространственной кривой относительно начала координат;

$$I_x = \int\limits_l (y^2 + z^2)ds, I_y = \int\limits_l (x^2 + z^2)ds, I_z = \int\limits_l (x^2 + y^2)ds \ - \qquad (89)$$

- моменты инерции кривой относительно координатных осей.
-

4. Координаты центра масс кривой вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int\limits_l xg(x,y,z)ds}{M}, y_c = \frac{\int\limits_l yg(x,y,z)ds}{M}, z_c = \frac{\int\limits_l zg(x,y,z)ds}{M}. \qquad (90)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода

Если считать, что сила $\vec{F} = \{P,Q,R\}$ действует на точку, движущуюся по кривой (AB), то работа этой силы может быть представлена как

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \qquad (91)$$

то есть криволинейным интегралом 2-го рода.

Пример 24.

Вычислить работу силы $\vec{F} = \{4x^2y; x^2 + z^2; x + yz\}$, действующей на точку, движущуюся по прямой от точки A(2; 1; 0) до точки B(-3; 2; 1).

Параметрические уравнения прямой AB имеют вид: $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.

При этом $dx = -5dt$, $dy = dt$, $dz = dt$.

Работа $A = \int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} 4x^2ydx + (x^2 + z^2)dy + (x + yz)dz =$

$$= \int\limits_0^1 ((-5) \cdot 4(2 - 5t)^2(1 + t) + (2 - 5t)^2 + t^2 + 2 - 5t + t(1 + t))dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-500t^3 - 73t^2 + 296t - 74\right)dt = \left(-125t^4 - \frac{73}{3}t^3 + 148t^2 - 74t\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{226}{3}.$$

4. Поверхностный интеграл 1-го рода

1. Площадь криволинейной поверхности, уравнение которой $z = f(x, y)$, можно найти в виде:

$$S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_\Omega \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy \qquad (92)$$

(Ω – проекция S на плоскость Oxy).

2. Масса поверхности

$$M = \iint\limits_S g\,(x, y, z)dS. \qquad (93)$$

Пример 25.

Найти массу поверхности S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $\sqrt{3} \le z \le 2$, с поверхностной плотностью $g = \sqrt{2}$.

Зададим поверхность S в явном виде: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ и найдем dS:

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \frac{2dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Поверхность S представляет собой часть сферы радиуса 2 с центром в начале координат, вырезанную плоскостью $z = \sqrt{3}$. Найдем проекцию этой поверхности на координатную плоскость Oxy. Линией пересечения сферы и плоскости $z=\sqrt{3}$ является окружность $x^2+y^2+(\sqrt{3})^2=4$, то есть $x^2+y^2=1$. Следовательно, проекцией S на плоскость Oxy является круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Вычислим массу поверхности в полярных координатах:

$$M=2\sqrt{2}\iint_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=2\sqrt{2}\int_0^{2p}dj\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}}=-\sqrt{2}\cdot 2p\int_0^1(4-r^2)^{-\frac{1}{2}}d(4-r^2)=$$

$$=-2\sqrt{2}p\cdot 2\sqrt{4-r^2}\Big|_0^1=-4\sqrt{2}p(\sqrt{3}-2)=4\sqrt{2}p(2-\sqrt{3}).$$

3. Моменты:

$$M_{xy}=\iint_S zg(x,y,z)dS, M_{xz}=\iint_S ygdS, M_{yz}=\iint_S xgdS \quad (94)$$

- статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz;

$$I_x=\iint_S(y^2+z^2)g(x,y,z)dS, I_y=\iint_S(x^2+z^2)gdS, I_z=\iint_S(x^2+y^2)gdS \quad (95)$$

- моменты инерции поверхности относительно координатных осей;

$$I_{xy}=\iint_S z^2g(x,y,z)dS, I_{xz}=\iint_S y^2gdS, I_{yz}=\iint_S x^2gdS \quad (96)$$

- моменты инерции поверхности относительно координатных плоскостей;

$$I_0=\iint_S(x^2+y^2+z^2)g(x,y,z)dS \quad (97)$$

- момент инерции поверхности относительно начала координат.

4. Координаты центра масс поверхности:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{M}, y_c=\frac{M_{xz}}{M}, z_c=\frac{M_{xy}}{M}. \quad (98)$$

Замечание. Так как формулы, задающие значения геометрических и физических величин с помощью интегралов, выводятся с помощью одних и тех же приемов для интегралов всех рассматриваемых типов, подробный их вывод дается только в начале главы. При желании можно провести аналогичные рассуждения для тройных, криволинейных и поверхностных интегралов и получить все формулы, приводимые без подробного вывода.

IV. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Скалярное и векторное поле

Если в каждой точке M определенной пространственной области задано значение некоторой скалярной или векторной величины, то говорят, что задано **поле** этой величины (соответственно **скалярное** или **векторное**). Примерами скалярных полей являются поле температур или поле электрического потенциала, примерами векторных полей – поле сил или поле скоростей.

Рассмотрим некоторые характеристики скалярных и векторных полей.

Определение 17. Если в некоторой области задано скалярное поле $U(x,y,z)$, то поверхность, определяемая уравнением

$$U(x, y, z) = C, \tag{99}$$

называется **поверхностью уровня**. В двумерном случае **линия уровня** задается уравнением

$$U(x, y) = C. \tag{100}$$

Определение 18. Если в некоторой области задано векторное поле $\vec{A} = \{A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)\}$, то кривая, направление которой в каждой ее точке M совпадает с направлением вектора $\vec{A}$ в этой точке, называется **векторной линией**. Она задается уравнениями

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \tag{101}$$

Поверхность, составленная из векторных линий, называется **векторной поверхностью**. Если векторная поверхность образована векторными линиями, проходящими через каждую точку некоторой замкнутой кривой, то она называется **векторной трубкой**.

Определение 19. Пусть задано скалярное поле $U(x, y, z)$. Вектор

$$\vec{g} = gradU = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\} \qquad (102)$$

называется **градиентом** величины U в соответствующей точке.

Замечание. Таким образом, скалярное поле $U(x, y, z)$ порождает векторное поле градиента grad$U$.

2. Циркуляция векторного поля вдоль кривой

Определение 20. Пусть дано векторное поле $\vec{A} = \{A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)\}$. Интеграл

$$\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_L \vec{A}\cdot d\vec{r} \qquad (103)$$

называется **линейным интегралом от вектора $\vec{A}$ вдоль кривой L**. Если кривая L замкнута, то этот интеграл называют **циркуляцией вектора $\vec{A}$ вдоль кривой L**.

Здесь $\vec{A}\cdot d\vec{r}$ - скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$.

Замечание. Иногда криволинейный интеграл 2-го рода по *замкнутому* контуру обозначают $\oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz$.

Пример 26.

Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{A}=\{x, xy, xyz\}$ вдоль контура L: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 2$ (направление обхода контура – от точки (3,0,2) к точке (0,3,2)).

Зададим контур L параметрически: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 2$ ($0 \le t \le 2\pi$). Тогда

$$\oint_L xdx + xydy + xyzdz = \int_0^{2p} (3\cos t(-3\sin t) + 3\cos t\cdot 3\sin t\cdot 3\cos t +$$

$$+3\cos t\cdot 3\sin t\cdot 2\cdot 0)dt = \int_0^{2p}(-\frac{9}{2}\sin 2t)dt - 27\int_0^{2p}\cos^2 td\cos t = 0.$$

Пример 27.

Вычислим циркуляцию векторного поля $\{x + \sin x, x - e^y\}$ по контуру $x^2 + y^2 = 1$.

Применим формулу Грина, учитывая, что $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$:

$\oint\limits_L (x+\sin x)dx + (x-e^y)dy = \iint\limits_D dxdy.$ Область D при этом – круг единичного радиуса с центром в начале координат. Перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

3. Ротор векторного поля

Определение 21. **Ротором или вектором вихря** векторного поля ***A*** = {A_x, A_y, A_z}, где A_x, A_y, A_z – функции от x, y, z, называется вектор, определяемый следующим образом:

$$rot\vec{A} = \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right\}. \qquad (104)$$

Ротор характеризует завихренность поля ***A*** в данной точке, то есть наличие вращательных движений, так как его модуль равен удвоенной угловой скорости в этой точке.

Формула Стокса в векторной формулировке имеет вид:

$$\oint\limits_l A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint\limits_s rot\vec{A} \cdot \vec{n}\, d\sigma \ , \qquad (105)$$

то есть **циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, натянутую на данный контур**.

Можно дать другое, **инвариантное**, определение ротора. Для этого рассмотрим произвольное направление n, исходящее из данной точки M, и окружим эту точку плоской площадкой σ, перпендикулярной к n и ограниченной контуром λ. Применяя формулу Стокса, получим:

$$\oint\limits_l A_l\, dl = \iint\limits_s rot_n \vec{A}\, d\sigma .$$

Разделив обе части этого равенства на σ и стягивая площадку σ к данной точке, найдем в пределе, что

$$rot_n \vec{A} = \lim_{\sigma \to M} \frac{\oint\limits_l A_l\, dl}{\sigma} .$$

Тем самым можно определить проекцию ротора на *любую* ось, то есть вектор rot ***A*** не зависит от выбора координатной системы.

4. Поток векторного поля

Рассмотрим векторное поле *A(M)*, определенное в пространственной области *G*, ориентированную гладкую поверхность $S \subset G$ и поле единичных нормалей ***n****(M)* на выбранной стороне поверхности *S*.

Определение 22. Поверхностный интеграл 1-го рода

$$\iint_S \vec{A}\vec{n}\,dS = \iint_S A_n\,dS\,, \tag{106}$$

где ***An*** – скалярное произведение соответствующих векторов, а A_n – проекция вектора ***A*** на направление нормали, называется **потоком векторного поля *A(M)* через выбранную сторону поверхности *S***.

Замечание 1. Если выбрать другую сторону поверхности, то нормаль, а, следовательно, и поток изменят знак.

Замечание 2. Если вектор ***A*** задает скорость течения жидкости в данной точке, то интеграл (106) определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность *S* в положительном направлении (отсюда общий термин «поток»).

5. Дивергенция векторного поля

Продолжим изучение характеристик векторных полей.

Определение 23. **Дивергенцией** векторного поля $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, где A_x, A_y, A_z – функции от x, y, z, называется

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,. \tag{107}$$

Замечание 1. Из определения видно, что дивергенция является *скалярной* функцией.

Замечание 2. Слово «дивергенция» означает «расходимость», так как дивергенция характеризует плотность источников данного векторного поля в рассматриваемой точке.

Рассмотрим формулу Гаусса-Остроградского с учетом определений потока и дивергенции векторного поля. Тогда в левой части формулы (67) стоит тройной интеграл по объему *V* от дивергенции векторного поля $\{P, Q, R\}$, а в правой – поток этого вектора через ограничивающую тело поверхность *S*:

$$\iint\limits_S A_n dS = \iiint\limits_V div\vec{A}dV. \tag{108}$$

Докажем, что величина дивергенции в данной точке не зависит от выбора системы координат. Рассмотрим некоторую точку M, которую окружает трехмерная область V, ограниченная поверхностью S. Разделим обе части формулы (108) на V и перейдем к пределу при стягивании тела V к точке M. Получим:

$$div\vec{A} = \lim_{V\to M}\frac{\iint\limits_S A_n dS}{V}. \tag{109}$$

Это равенство можно считать **инвариантным определением дивергенции**, то есть определением, не зависящим от выбора координатной системы.

<u>Пример 28</u>.

Определить дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{A} = \{x^3y^3; y^2z^2; xyz\}$.

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 3x^2y^3 + 2yz^2 + xy;$$

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3y^3 & y^2z^2 & xyz \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(xz - 2y^2z) + \vec{j}(0 - yz) + \vec{k}(0 - 3x^3y^2) = z(x - 2y^2)\vec{i} - yz\vec{j} - 3x^3y^2\vec{k}.$$

6. Оператор Гамильтона, его использование и свойства. Дифференциальные операции второго порядка

Вспомним определение градиента скалярной функции $u = u(x, y, z)$:

$$\text{grad}\, u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)u.$$

Определим оператор, стоящий в скобках в правой части этого равенства, так:

Определение 24. Оператор

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{110}$$

называется **оператором Гамильтона или набла-оператором** и обозначается символом ∇ («набла»).

При применении оператора Гамильтона удобно рассматривать его как «символический вектор» и использовать различные операции над векторами. Например:

1) если умножить «вектор» ∇ на скалярную функцию u, то получим градиент этой функции:

$$\nabla u = \text{grad}\, u; \qquad (111)$$

2) составив скалярное произведение ∇ на вектор $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, получим дивергенцию вектора $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\vec{A}; \qquad (112)$$

3) перемножим теперь векторы ∇ и $\boldsymbol{A}$ векторным образом. Результатом будет ротор вектора $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

$$= rot\vec{A} \qquad (113)$$

4) рассмотрим скалярное произведение векторов ∇ и $\nabla u = \text{grad}\, u$:

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \text{div}\,(\text{grad}\, u) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u.$$

Определение 25. Оператор

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (114)$$

называется **оператором Лапласа** и обозначается символом Δ («дельта»).

Определение 26. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (115)$$

называется **уравнением Лапласа**, а функция, удовлетворяющая ему – **гармонической функцией**.

Отметим еще раз, результатом применения к скалярной функции u оператора Гамильтона является *вектор*, а оператора Лапласа – *скаляр*.

По аналогии с производной по направлению от скалярной функции u: $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ введем понятие производной по направлению единичного вектора $\vec{s}$ от векторной функции $\vec{a} = \{a_x(x,y,z); a_y(x,y,z); a_z(x,y,z)\}$:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}} = (\vec{s}, \nabla)\vec{a} = \vec{i}(\vec{s}, grad\ a_x) + \vec{j}(\vec{s}, grad\ a_y) + \vec{k}(\vec{s}, grad\ a_z) =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial s}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial s}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial s}\vec{k}. \qquad (116)$$

Производная по направлению любого произвольного вектора $\vec{b}$ отличается от производной по направлению единичного вектора лишь тем, что в нее входит дополнительный скалярный множитель $|\vec{b}|$:

$$(\vec{b}, \nabla)u = (\vec{b}, grad\ u)$$

$$(\vec{b}, \nabla)\vec{a} = (\vec{b}, grad\ a_x)\vec{i} + (\vec{b}, grad\ a_y)\vec{j} + (\vec{b}, grad\ a_z)\vec{k} \qquad (117)$$

Таким образом, с помощью оператора Гамильтона можно образовать пять дифференциальных операций второго порядка:

1. div grad u = $(\nabla, \nabla)u = \nabla^2 u$
2. rot grad u = $[\nabla, \nabla]u$
3. grad div $\vec{a}$ = $\nabla(\nabla, \vec{a})$ (118)
4. div rot $\vec{a}$ = $(\nabla, [\nabla, \vec{a}])$
5. rot rot $\vec{a}$ = $[\nabla, [\nabla, \vec{a}]]$

Кроме того, операцию ∇^2 можно применять и к векторным полям, рассматривая $\nabla^2\vec{a}$.

Результатом применения второй и четвертой операции всегда является нуль: rot grad $u = [\nabla, \nabla]u \equiv 0$, div rot $\vec{a} = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]) \equiv 0$. Это следует из векторного смысла оператора ∇: во второй операции присутствует векторное произведение коллинеарных векторов (более подробное доказательство этого утверждения будет проведено далее, на стр. 70), а в четвертой операции – смешанное произведение коллинеарных векторов.

<u>Пример 29.</u>

Определить rot rot $\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} = \{x^2y, y^2z, z^2x\}$.

Известно, что rot rot $\vec{a} = [\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = \nabla(\nabla, \vec{a}) - \nabla^2\vec{a} = grad\ div\ \vec{a} - \nabla^2\vec{a}$.

Здесь $grad\ div\ \vec{a} = \nabla(\nabla, \vec{a}) = \frac{\partial(div\vec{a})}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(div\vec{a})}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(div\vec{a})}{\partial z}\vec{k}$,

$\nabla^2\vec{a} = \nabla^2 a_x\vec{i} + \nabla^2 a_y\vec{j} + \nabla^2 a_z\vec{k}$. Проведем последовательные вычисления:

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2xy + 2yz + 2xz;$$

$$grad\ div\vec{a} = (2y+2z)\vec{i} + (2x+2z)\vec{j} + (2x+2y)\vec{k} = 2\left((y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}\right);$$

$$\nabla^2\vec{a} = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\vec{k} =$$

$$= 2(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}).$$

Окончательно получим:

$$rot\ rot\vec{a} = 2\left((y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}\right) - 2(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}) =$$

$$= 2\left((y+z-y)\vec{i} + (x+z-z)\vec{j} + (x+y-x)\vec{k}\right) = 2(z\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}).$$

7. Потенциальные векторные поля

Определение 27. Векторное поле $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ называется **потенциальным**, если вектор $\boldsymbol{A}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(x, y, z)$:

$$\boldsymbol{A} = \text{grad}\, u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (119)$$

При этом функция u называется **потенциалом** данного векторного поля.

Примерами потенциальных полей являются поле тяготения точечной массы m, помещенной в начале координат, электрическое поле точечного заряда e, находящегося в начале координат, и другие.

Выясним, при каких условиях векторное поле является потенциальным.

Так как из (119) следует, что $A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, A_y = \frac{\partial u}{\partial y}, A_z = \frac{\partial u}{\partial z}$, то

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$

так как смешанная производная второго порядка не зависит от порядка дифференцирования. Из этих равенств легко получаем, что

$$\text{rot}\, \boldsymbol{A} = 0 - \qquad (120)$$

- условие потенциальности векторного поля.

Определение 28. Векторное поле $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, для которого $\text{rot}\, \boldsymbol{A} = 0$, называется **безвихревым**.

Из предыдущих рассуждений следует, что любое потенциальное поле является безвихревым. Можно доказать и обратное, то есть то, что любое безвихревое поле есть поле потенциальное.

Пример 30.

Определить, является ли векторное поле $\vec{F} = \{3x^2y - y^3; x^3 - 3xy^2; 2z\}$ потенциальным. В случае положительного ответа найти его потенциал *u* в предположении, что в начале координат *u* = 0.

Вычислим частные производные функций $P = 3x^2y - y^3$, $Q = x^3 - 3xy^2$, $R = 2z$: $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$; $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$

Следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$; $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, то есть rot ***F*** = 0 – выполнено условие (120), и поле является потенциальным.

Тогда $u = \int_0^x (3x^2y - y^3)dx + \int_0^y (0 - 3\cdot 0\cdot y^2)dy + \int_0^z 2zdz = x^3y - xy^3 + z^2$.

8. Соленоидальные и гармонические векторные поля

Определение 29. Векторное поле ***A*** = {A_x, A_y, A_z} называется **соленоидальным** в области *D*, если в каждой точке этой области

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \qquad (121)$$

Замечание. Так как дивергенция характеризует плотность источников поля ***A***, то в области, где поле соленоидально, нет источников этого поля. Примером соленоидального поля может служить поле точечного заряда *e* во всех точках, кроме точки, где расположен заряд.

Условием соленоидальности поля является требование, что вектор ***A*** является ротором некоторого вектора ***B***: ***A*** = rot ***B***. Докажем это.

Действительно, если $A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$, то

div ***A*** =

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} \equiv 0.$$

Определение 30. Скалярное поле, задаваемое функцией $u = u(x, y, z)$, называется **гармоническим** в некоторой области, если функция u в этой области удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$.

Примеры: линейная функция, потенциал электрического поля точечного заряда или поля тяготения точечной массы.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Математический анализ. М.: Наука, 1999.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- Т.2. М.: Наука, 1965.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т.2. М.: Наука, 1981.
7. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа (под редекцией А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича). – Т.2. М.: Наука, 1981.
8. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1973.