Агентство образования администрации Красноярского края
Красноярский государственный университет
Заочная естественно-научная школа при КрасГУ

МАТЕМАТИКА

Векторы на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости

Модуль № 3 для 11 класса

Учебно-методическая часть

Красноярск 2006

Математика: Модуль №3 для 11 класса. Учебно-методическая часть./ Сост.: Е.К.Лейнартас, д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций, КрасГУ. – Красноярск, 2006 — 25 с.

ISBN 5-7638-0705-7

Печатается по решению Дирекции
Краевого государственного учреждения дополнительного образования
Заочная естественно-научная школа
при Красноярском государственном университете

ISBN 5-7638-0705-7

Программа модуля

1. Координаты точки на плоскости и в пространстве.
2. Расстояние между точками на плоскости и в пространстве.
3. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.
4. Скалярное произведение векторов. Условие перпендикулярности и колинеарности векторов.
5. Нахождение угла между векторами. Координаты вектора.
6. Уравнения прямой и плоскости.
7. Построение геометрических образов уравнений и неравенств.

Введение

Величины, встречающиеся в механике, физике и других прикладных науках, могут быть разделены на две категории. К одной из них относятся такие физические или механические величины, которые определяются только числовым значением (числом), например: масса, плотность, температура, объем. К другой категории можно отнести те величины, для определения которых требуется знание не только числового значения, но и направления, например: сила, скорость, ускорение. Величины первой категории называются *скалярными*, второй — *векторными*. Скалярная величина может быть задана числом, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Для изображения векторных величин (физических, механических и т. д.) употребляются векторы. *Векторами* называются *направленные отрезки*.

Это одно из основных понятий раздела математики, который называется аналитической геометрией. Отрезок прямой, ограниченный точками A и B, называется направленным, если указано, какая из этих двух точек является его началом и какая — концом. Если обозначим $\overrightarrow{AB}$ — направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B, то $\overrightarrow{BA}$ будет

означать направленный отрезок с началом B и концом A. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ имеют взаимно противоположные направления.

Возьмем произвольную прямую. На ней можно установить два взаимно противоположных направления. Выберем любое из них и назовем его *положительным* (а противоположное направление — *отрицательным*). Прямая с выбранным на ней направлением называется *осью*.

Метод координат начинается с того, что на оси выбирается точка O (*начало координат*) и единица масштаба (*единичный отрезок*). При этом сама прямая называется *координатной осью* (или говорят, что на прямой введена *система координат*).

Введение на прямой системы координат позволяет определить положение точек этой прямой с помощью действительных чисел.

Координатой любой точки M прямой называется число x, равное по абсолютной величине расстоянию от начала координат до точки M, положительное, если направление отрезка $\overrightarrow{OM}$ совпадает с направлением координатной оси, и отрицательное, если направление отрезка $\overrightarrow{OM}$ противоположно направлению этой оси.

1. Векторы на плоскости и в пространстве.
Основные определения и свойства

Определение 1.1 ***Вектором*** *называется* ***направленный отрезок***.

Векторы рассматриваются на плоскости (двумерные) и в пространстве (трехмерные). И в том и в другом случае вектор определяется упорядоченной парой точек, первая из которых *начало* вектора (или его *точка приложения*), другая — *конец* вектора; вектор направлен от начала к концу. На рисунке вектор изображается стрелкой (рис. 1). Для обозначения векторов используются символы **a, b, x** и т. п.; если A и B, соответственно, точки начала и конца вектора, то этот вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{BA}$.

Определение 1.2 *Длина отрезка AB называется* ***длиной*** *вектора* $\overrightarrow{AB}$. *Длина вектора* **a** *обозначается* **|a|.**

Определение 1.3 *Если начало вектора совпадает с его концом, вектор называется* ***нулевым*** *(обозначается 0 или* $\vec{0}$*). Длина нулевого вектора равна нулю. Направленными отрезками изображаются только ненулевые векторы.*

Рис.1

Определение 1.4 *Два ненулевых вектора называются* ***коллинеарными,*** *если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.*

Коллинеарные векторы могут быть *одинаково направленными* или *противоположно направленными*.

Определение 1.5 *Два вектора называются равными, если они* ***коллинеарны****, одинаково направлены и имеют одинаковые длины*.

На рис. 2 изображены равные векторы **a** и **b**, а на рис. 3 ––неравные векторы **a** и **b**, **c** и **d**.

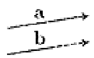

Рис. 2 Рис. 3

Определение 1.6 *Ненулевые векторы называются* ***компланарными****, если они параллельны одной и той же плоскости*.

Любые два вектора всегда компланарны, а три вектора могут и не быть компланарными. На рис. 4 изображена треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

Векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1B_1}$ компланарны, а векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ компланарными не являются.

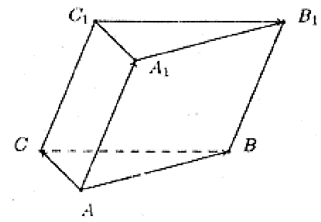

Рис. 4

Сложение векторов и умножение вектора на число называются линейными *операциями* над векторами.

Напомним определения и основные свойства этих операций.

Определение 1.7 *Пусть даны два ненулевых вектора* **a** *и* **b** *(рис. 5). От конца вектора* **a** *отложим вектор, равный вектору* **b***. Суммой векторов* **a** *и* **b** *называется вектор* $\overrightarrow{AC}$, *идущий из начала вектора* $\overrightarrow{AB}$ = **a** *в конец вектора* $\overrightarrow{BC}$ =**b**.

Обозначение: $\overrightarrow{AC}$=a+b. Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*.

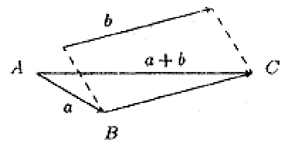

Рис. 5

Из свойств параллелограмма следует *правило параллелограмма* сложения векторов: сумма двух неколлинеарных

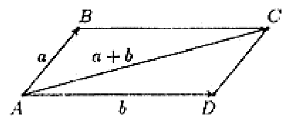

Рис. 6

векторов есть вектор, изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах, идущей от их общего начала (рис.6).

Если три вектора **a, b** и **c** некомпланарны, их сумма может быть найдена по *правилу параллелепипеда*: вектор **a+b+c** изображается диагональю параллелепипеда, построенного на векторах **a, b** и **c**, имеющих общее начало (рис.7).

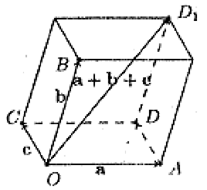

Рис. 7

Определение 1.8 *Разностью* **a−b** *двух векторов* **a** и **b** *называется сумма вектора* **a** *и вектора, противоположного вектору* **b**.

Заметим, что если на векторах **a** и **b**, отложенных от общего начала O, можно построить параллелограмм (рис.8), то длина диагонали, имеющей то же начало *O*, равна длине вектора **a+b**, а длина другой диагонали равна длине вектора **a−b**.

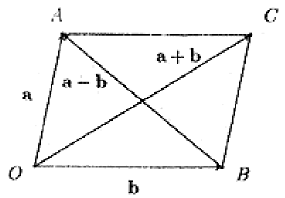

Рис. 8

Определение 1.9 *Произведением ненулевого вектора* **a** *на число* $x \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|x| \cdot |\mathbf{a}|$ *и который сонаправлен вектору* **a** *при* x > 0, *и который направлен в противоположную сторону при* $x<0$. *Произведение вектора* a *на число x обозначается* $x \cdot$ a = xa.

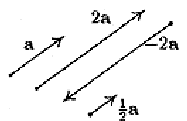

Рис. 9

Пример 1.1. Известно, что векторы **a, b, c** попарно не коллинеарны, но вектор **a+b** коллинеарен **c**, а вектор **b+c** коллинеарен вектору **a+b**. Найдите сумму **a+b+c**.

Решение. По условию найдутся $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$, такие что **a+b**=λ **c** и **b+c**=μ a. Вычтем из первого равенства второе, получим **a** − **c** = λ **c** − μ **a**, отсюда **a** + μ **a** = **c** + λ **c**. По свойству 5 найдем $(1+\mu)$**a**=$(1+\lambda)$**c**. Если $1+\mu \neq 0$ или $1+\lambda \neq 0$, то векторы **a** и **c** коллинеарны, это противоречит условию задачи, поэтому $\mu = 1$ и $\lambda = -1$, что означает **a+b** = −**c** или **a+b+c** = 0.

Произведение нулевого вектора на любое число и произведение любого вектора на нуль по определению считается равным нулевому вектору.

Линейные операции над векторами

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. **a+b=b+a**.
2. **(a+b)+c=a+(b+c).**
3. **a+0=a.**
4. $x(y$ **a**$)=(xy)$**a**.
5. x**a**+y**a**=$(x+y)$**a**.
6. x**a**+x**b**=x (**a+b**).
7. 0 $\cdot$ **a**=$x \cdot 0$=0.

Здесь **a, b, c** — произвольные векторы; 0 — нулевой вектор; *x, y* — произвольные числа.

Теорема 1.1. *Вектор* **b** *коллинеарен ненулевому вектору* **a** *тогда и только тогда, когда существует такое число x, что* **b**=x**a**.

Следствие 1.1. *Для неколлинеарных векторов* **a** *и* **b** *равенство* x**a**+y**b**=0 *выполняется тогда и только тогда, когда* $x=y=0$.

Пример 1.2. Векторы **a** и **b** неколлинеарны. Найти, при каком x векторы **c**=(x–2)**a+b** и **d**=(2x+1)**a–b** будут коллинеарны.

Решение. Вектор **c** ненулевой, так как коэффициент при **b** отличен от нуля, следовательно, существует такое число y, что **d**=y**c**, т. е.

(2x+1)**a–b**=y(x–2)**a**+y**b**.

Так как слагаемые в векторном равенстве можно переносить из одной части в другую, изменяя знаки перед этими слагаемыми на противоположные, то будем иметь

$$(yx–2y–2x–1)\mathbf{a}+(y+1)\mathbf{b}=0.$$

Векторы **a** и **b** неколлинеарны, поэтому

$$yx-2y-2x-1=0,$$
$$y+1=0.$$

Решая эту систему, находим $y=–1$ и $x=1/3$. При $x=1/3$ векторы **c** и **d** таковы:

$$c=-\frac{5}{3}a+b, \qquad d=\frac{5}{3}a-b..$$

Как легко видеть, они противоположные: **d** = – **c**.

Пусть векторы **a** и **b** неколлинеарны, отложим их от одной точки: $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ (рис. 10). Любой ненулевой вектор **c**, компланарный с векторами **a** и **b**, по определению параллелен плоскости OAB.

Если построить вектор $\overrightarrow{OC}$=**c**, то точка C лежит в плоскости OAB, поэтому говорят, что любые три компланарных вектора можно перенести в одну плоскость.

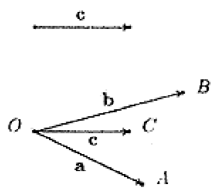

Рис. 10

Теорема 1.2. *Если векторы* **a** *и* **b** *неколлинеарны, то вектор* **c** *компланарен с векторами* **a** *и* **b** *тогда и только тогда, когда имеет место разложение* **c**=x**a**+y**b**.

Нулевой вектор по определению считается компланарным с любыми двумя векторами.

Пример 1.3. На стороне BC треугольника OBC расположена точка N так, что $BN : BC = n$ (рис. 11). Разложить вектор $\overrightarrow{ON}$ по векторам $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

Решение. Векторы $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны и сонаправлены, следовательно, $\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{BC}$ и x>0. Поскольку BN=nBC, то x=n и $\overrightarrow{BN}=n\overrightarrow{BC}$. Так как $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}$, то

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+n(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=n\overrightarrow{OC}+(1–n)\overrightarrow{OB}.$$

Заметим, что при n=1/2 точка N является серединой стороны BC, а ON — медианой треугольника. В этом случае

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}).$$

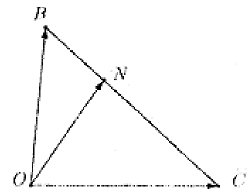

Рис. 11

Теорема 1.3. *Если векторы* **a, b** *и* **c** *некомпланарны, то любой вектор* **d** *можно единственным образом представить в виде* d=xa+yb+zc.

Это представление называется разложением вектора **d** по трем некомпланарным векторам **a, b** и **c**, и вектор **d** называется линейной комбинацией векторов **a, b** и **c**.

Пример 1.4. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 12). Разложить вектор $\overrightarrow{AA_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

Решение. По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}, \quad \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}, \quad \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}.$$

Складывая левые и правые части этих векторных равенств, получаем

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}.$$

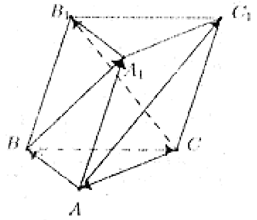

Рис. 12

Так как $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=0$ и $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$, то $3\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}$ и, следовательно,

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}).$$

Определение 1.10. ***Углом между ненулевыми векторами*** *называется угол между векторами, равными данным и имеющими общее начало. Угол между векторами, как и угол между лучами, может принимать значения от* 0° *до* 180°.

Рис. 13

Определение 1.11. *Векторы* **a** *и* **b** *называются* ***перпендикулярными***, *если угол между ними равен* 90°.

Определение 1.12. ***Скалярным произведением*** *ненулевых векторов* **a** *и* **b** *называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними*. *Скалярное произведение векторов* **a** *и* **b** обозначается a b=ab.

Таким образом,

$$\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|\cos(\mathrm{a},\mathrm{b}).$$

Свойства скалярного произведения

1. **a a**=|**a**|^2.
2. **a b**=**b a**.
3. (x**a**) **b**=x(**a b**).
4. (**a**+**c**) **b**=**a b**+ **c b**.

Пример 1.5. Найти длину диагонали AC ромба $ABCD$ (рис. 14), у которого длины сторон равны 1 и угол BAD равен 30°.

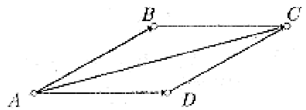

Рис. 14

Решение. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Из свойств скалярного произведения следует

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2.$$

Так как AB=AD=1 и ($\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$)=$30^{\circ}$, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}/2$. Учитывая это, получаем $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=2+\sqrt{3}$, откуда находим $AC=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Из определения скалярного произведения сразу следует, что в случае ненулевых векторов **a** и **b** косинус угла между векторами **a** и **b** находится по формуле

$$\cos(\mathrm{a},\mathrm{b})=\frac{\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}}{|\mathrm{a}|\cdot|\mathrm{b}|}$$

В частности, *векторы* **a** *и* **b** *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю*.

Пример 1.6. Длины ненулевых векторов **a** и **b** равны. Найти угол между этими векторами, если известно, что векторы **p=a**+2**b** и **q**=5**a**–4**b** перпендикулярны.

Решение. Так как векторы **p** и **q** перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

p q = (**a**+2**b**) (5**a**–4**b**)=0.

Используя свойства скалярного произведения, получаем

(**a**–2**b**) (5**a**–4**b**)=5|**a**|^2 +6 **b** –8|**b**|^2.

6|**a**|^2 cos(**a**,**b**)–3|**a**|^2=0.

Поскольку |**a**| ≠ 0, то, сокращая на 3|**a**|^2, находим cos(**a**,**b**)=1/2.

Следовательно, угол между векторами **a** и **b** равен 60°.

Пример 1.7. Зная, что |**a**|=2, |**b**|=5, (**a**,**b**)= 2π/3, найти, при каком значении x векторы **p** =x**a** + 17**b** и **q** = 3**a**–**b** перпендикулярны.

Решение. Найдем скалярное произведение векторов **a** и **b**:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=10\cos\frac{2\pi}{3}=-5.$$

Перпендикулярность векторов **p** и **q** означает, что их скалярное произведение равно нулю, найдем его:

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (x\mathbf{a}+17\mathbf{b},\, 3\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (x\mathbf{a},3\mathbf{a}) + (x\mathbf{a},-\mathbf{b}) + (17\mathbf{b},3\mathbf{a}) + (17\mathbf{b},-\mathbf{b})=$$

$$=3x(\mathbf{a},\mathbf{a}) - x(\mathbf{a},\mathbf{b}) + 51(\mathbf{b},\mathbf{a}) - 17(\mathbf{b},\mathbf{b}) =$$

$$= 3x|\mathbf{a}|^2 + 5x - 255 - 17|\mathbf{b}|^2 =$$

$$= 12x + 5x - 255 - 425 = 17x - 680.$$

Из уравнения $17x - 680 = 0$ получим $x = 40$.

Контрольные вопросы.

1. Что такое вектор? Как обозначаются векторы?
2. Что такое длина вектора?
3. Что такое нулевой вектор?
4. Какие векторы называются равными?
5. Как можно найти сумму векторов?
6. Как найти разность векторов?

7. Как умножить вектор на число?
8. Какие векторы называются коллинеарными?
9. Какие векторы называются компланарными?
10. Как определяется угол между векторами?
11. Дайте определение скалярного произведения векторов.
12. Чему равен угол между противоположными векторами?
13. Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из слагаемых?
14. Может ли длина разности двух векторов быть равной сумме длин этих векторов?

2. Координаты вектора

2.1 Векторы на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат и вектор **a** имеет начало в точке $A(x_1;y_1)$, а конец — в точке $B(x_2;y_2)$.

Определение 2.1 Координатами вектора **a** называются два числа

$a_1 = x_2 - x_1$ и $a_2 = y_2 - y_1$,

т.е. упорядоченная пара чисел, равных разностям соответствующих координат конца и начала вектора.

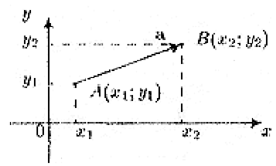

Рис. 15

Координаты вектора пишутся рядом с его значением в круглых скобках **a**$(a_1;\, a_2)$ или **a** = $(a_1;\, a_2)$.

Координаты нулевого вектора равны нулю.

Векторное равенство **a** = **b** равносильно системе равенств: $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$.

Пример 2.1. Дана точка $A(-1;1)$ и вектор $\mathbf{a} = (3;2)$. Найти координаты точки B такой, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$.

Решение. Пусть $(x;y)$ — координаты точки B, тогда $\overrightarrow{AB} = (x+1;y-1)$. Если $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, то $x+1=3$ и $y-1=2$. Отсюда $x=2$ и $y=3$.

Определение 2.2. *Единичные векторы, имеющие направление положительных координатных полуосей,* ***называются координатными векторами*** *или* ***ортами****.*

Координатные векторы осей OX и OY принято обозначать **i** и **j** (или $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$). Итак, $\mathbf{i}(1;0)$, $\mathbf{j}(0;1)$. Если вектор задан своими координатами $\mathbf{a}(a_1; a_2)$, то, очевидно,

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}.$$

Правила действий над векторами, заданными своими координатами

1. При сложении векторов $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ и $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ их координаты складываются:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

2. При умножении вектора $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ на число все его координаты умножаются на это число:

$$m\mathbf{a} = (ma_1; ma_2).$$

3. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ и $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ равно сумме произведений соответствующих координат:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

4. Длина вектора $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ равна

$$|\mathrm{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,.$$

5. Векторы $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ и $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

6. Векторы $\mathbf{a}(a_1; a_2)$ и $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ коллинеарны, если их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = 0\,.$$

Пример 2.2. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(-4;3)$ и $C(2;2)$.

Найти длину медианы AN.

Решение. Пусть O — начало координат, тогда $\overrightarrow{OB} = (-4;\ 3)$ и $\overrightarrow{OC} = (2;2)$. Если N — середина стороны BC, то $\overrightarrow{ON} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})/2$, т.е. координаты середины отрезка BC равны полусумме соответствующих координат точек B и C. Находим

$$\overrightarrow{ON} = ((-4+2)/2;(3+2)/2),$$

тогда $N(-1;5/2)$ и

$$AN = \sqrt{(-1-1)^2 + (\tfrac{5}{2}-1)^2} = \tfrac{5}{2}\,.$$

Пример 2.3. Определить угол между векторами $\mathbf{c}=4\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathrm{d} = -\frac{1}{4}\mathrm{a} + \frac{7}{4}\mathrm{b}$, если

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \text{ и } \mathbf{b} = \mathbf{I} + 3\mathbf{j}.$$

Решение. Находим координаты векторов **c** и **d**: $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ и $\mathbf{d} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Вычисляем длины векторов **c** и **d** и их скалярное произведение:

$$|\mathrm{c}| = \sqrt{58}, \quad |\mathrm{d}| = \sqrt{29}, \quad \mathrm{c}\cdot\mathrm{d} = 29\,.$$

Далее находим

$$\cos(\mathrm{c},\mathrm{d}) = \frac{\mathrm{c}\cdot\mathrm{d}}{|\mathrm{c}|\cdot|\mathrm{d}|} = \frac{29}{\sqrt{58}\sqrt{29}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, угол равен 45°.

2.2. Векторы в пространстве

Если через некоторую точку O проведены три взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом отсчета, то говорят, что задана *прямоугольная декартова система координат* (рис. 16). Прямые называются осями координат, обозначаются *OX, OY, OZ* и называются: *OX — ось абсцисс, OY — ось ординат, OZ — ось аппликат*. Их общее начало называется *началом координат*. Плоскости, проходящие через каждые две координатные оси, называются *координатными плоскостями*, таких плоскостей три: *OXY, OXZ, OYZ*. Вся система координат обозначается *OXYZ*.

Пусть M_1, M_2, M_3 — ортогональные проекции точки M, соответственно, на координатные оси *OX, OY, OZ*. Точка M_1 как точка координатной прямой *OX* имеет координату x, аналогично, точки M_2 и M_3 на координатных прямых *OY* и *OZ* имеют координаты y и z. Упорядоченная тройка чисел x, y, z называется координатами точки M, координаты пишутся в круглых скобках $M(x; y; z)$.

Определение 2.3. *Пусть вектор* **a** *имеет начало в точке* $A(x_1;y_1;z_1)$ *и конец в точке* $B(x_2;y_2;z_2)$. *Три числа* $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ *и* $a_3=z_2-z_1$ *называются координатами вектора* **a**.

Обозначение: $\mathbf{a}(a_1;a_2;a_3)$ или $a=(a_1;a_2;a_3)$.

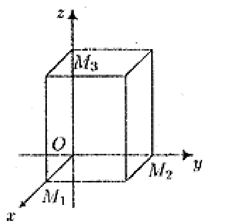

Рис. 16

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты; если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

Определение 2.4. *Единичные векторы, имеющие направление положительных координатных полуосей,* ***называются координатными векторами*** *или* ***ортами***.

Координатные векторы оси абсцисс, ординат и аппликат обозначим, соответственно, **i, j, k** (рис. 17).

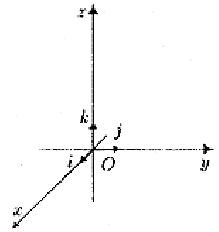

Рис. 17

Очевидно,

$$\mathbf{i}(1;\,0;\,0),\ \mathbf{j}(0;1;0),\ \mathbf{k}(0;0;1).$$

Определение 2.5. *Если вектор задан своими координатами* $\mathbf{a}(a_1;a_2;a_3)$, *то имеет место равенство*

$$\mathbf{a} = (a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k})$$

которое называется ***разложением вектора*** **a** *по координатным векторам*.

Пусть $a=(a_1;a_2;a_3)$ и $b=(b_1;b_2;b_3)$. Как и в плоском случае, действия над векторами, заданными своими координатами, выполняются по следующим правилам:

1. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$.
2. $m\mathbf{a}=(ma_1;ma_2;ma_3)$.
3. $\mathbf{a}\ \mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.
4. $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.
5. Векторы **a** и **b** перпендикулярны, если $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.
6. Векторы **a** и **b** коллинеарны, если $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

Пример 2.4. Найти координаты и длину вектора 2**a**–3**b**, если **a**=(0;3;2) и **b**=(–2;3;2).

Решение. Находим 2a=(0;6;4), 3**b**=(–6;9;6) и 2**a**–3**b**=(6;–3;–2). Теперь

$$|2a-3b|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}\,.$$

Пример 2.5. Найти m и n, при которых векторы **a**=(1;m;–2) и **b**=(–2;3;n) коллинеарны.

Решение. Вектор **b** коллинеарен вектору **a** ≠ 0 тогда и только, когда существует число p такое, что **b**=p**a**. Для данных векторов **a** и **b**, это векторное равенство равносильно системе –2=p, 3=pm/2, n= –2p, из которой находим p = –2, m = –3/2, n = 4. Итак, **a**=(1; –3/2; –2); **b**=(–2; 3; 4).

Пример 2.6. Найти, при каком значении m векторы **a**=(1; 3; –2) и **b**=(–1; m; 4) перпендикулярны.

Решение. Векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Так как **a b** = –9+3m, то **a b**=0 при m=3.

Пример 2.7. Найти координаты единичного вектора, сонаправленного с вектором **a** = (2; –3; 6).

Решение. Векторы **b** и **a** сонаправлены, если **b**=m**a** и m > 0. По условию |**b**|=1, тогда из равенства |**b**|=m|**a**| находим $m=\frac{1}{|a|}$. Далее |**a**|=7 и $m=\frac{1}{7}$. Таким образом, $b=(\frac{2}{7},-\frac{3}{7},\frac{6}{7})$.

Пример 2.8. Дан треугольник с вершинами в точках A (3; –2; 1), B (3; 0; 2), C (1; 2; 5). Найти угол, образованный медианой BD и основанием AC.

Решение. Координаты середины отрезка AC равны полусумме соответствующих координат точек A и C (см. пример 2.2). Находим D (2; 0; 3).

Далее ищем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$. $\overrightarrow{AC}$ =(–2; 4; 4) и $\overrightarrow{DB}$=(1; 0; –1).

Если φ – угол между этими векторами, то

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB})}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=\frac{-2\cdot1+4\cdot0+4\cdot(-1)}{\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Искомый угол φ =120°.

Пример 2.9. Найти косинусы углов, которые образует с координатными векторами вектор **a** = (3; 0; –4).

Решение. Вычислим скалярные произведения вектора **a** с каждым из координатных векторов. Так как **i** =(1; 0; 0), **j** =(0; 1; 0) и **k** =(0; 0; 1), то **a i** =3, и **a j** = 0; **a k** = –4. Длины координатных векторов равны 1, вычисляем длину вектора **a**: |**a**|=5. Теперь находим

$$\cos(a,i)=\frac{a\cdot i}{|a|\cdot|i|},$$

$$\cos(a,j)=\frac{a\cdot j}{|a|\cdot|j|}$$

$$\cos(a,k)=\frac{a\cdot k}{|a|\cdot|k|}.$$

Контрольные вопросы.

1. Что называется координатами вектора на плоскости? В пространстве?

2. Что называется координатными векторами (ортами)?

Даны координаты векторов **a** и **b**.

3. Как найти координаты их суммы?

4. Как найти координаты произведения вектора на число?

5. Как найти скалярное произведения векторов?

6. Как найти длину вектора?

3 Уравнения плоскости

В прямоугольной системе координат в пространстве любое уравнение

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (1)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов a, b, c отличен от нуля, определяет плоскость. Верно и обратное: каждая плоскость может быть задана уравнением вида (1).

Пример 3.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A (0; 1; 5), B (3; 0; 0), C (–1; 1; 6).

Решение. Пусть уравнение этой плоскости $ax+by+cz+d=0$. Координаты точек A, B, C удовлетворяют ему, следовательно,

$$\begin{cases} b+5c+d=0, \\ 3a+d=0, \\ -a+b+6c+d=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $d = -3a$. Подставляя это в первое и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} b+5c=3a, \\ b+6c=4a. \end{cases}$$

Почленно вычитая из первого уравнения второе, получаем $c=a$ и тогда находим $b = -2a$. Уравнение плоскости имеет вид $ax-2ay+az-3a=0$ или (так как a, b и c одновременно не равны нулю)

$$x-2y+z-3=0.$$

Определение3.1. *Ненулевой вектор* **n** $=\overrightarrow{AB}$ *называется перпендикулярным плоскости, если прямая AB перпендикулярна этой плоскости*.

Пусть вектор **n** = (a; b; c) перпендикулярен плоскости, проходящей через точку M (x_0; y_0; z_0). Тогда для любой точки M_1 (x; y; z) этой плоскости векторы **n** и $\overrightarrow{MM_1}$ перпендикулярны, следовательно, **n** $\overrightarrow{MM_1}$=0.

Записывая это скалярное произведение в координатах, получаем следующее уравнение плоскости:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0, \quad (2)$$

которое, если положить $d = -ax_0-by_0-cz_0$, приводится к виду (1).

Таким образом, уравнение

$$ax+by+cz+d=0$$

определяет плоскость, перпендикулярную вектору **n**=(a; b; c).

Пример 3.2. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору **n**=(–2; 1; 3).

Решение. Подставим в (2) координаты вектора **n** и координаты точки M (0; 0; 0), получим уравнение плоскости

$$-2x+y+3z=0.$$

Определение 3.2. *Пусть две плоскости пересекаются. Плоскость, перпендикулярная их линии пересечения, пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми не зависит от секущей плоскости и называется* ***углом между плоскостями****. Напомним, что если угол между прямыми, а следовательно, и угол между плоскостями равен* 90°, *они называются* ***перпендикулярными***.

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \qquad (3)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0. \qquad (4)$$

Эти две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны перпендикулярные им векторы $\mathbf{n_1}=(a_1; b_1; c_1)$ и $\mathbf{n_2}=(a_2; b_2; c_2)$, т. е. существует такое число $m \neq 0$, что $a_1=m\,a_2$, $b_1=m\,b_2$, $c_1=m\,c_2$.

Пусть плоскости, заданные уравнениями (3) и (4), пересекаются. Угол между ними равен углу φ между векторами $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$, если $0° \le \varphi \le 90°$, равен $180° - \varphi$, если $90° \le \varphi \le 180°$.

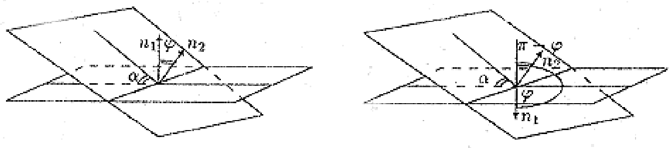

Рис. 18

И в том и в другом случае cos α =|cos φ|.

Таким образом, косинус угла α между плоскостями, заданными уравнениями (3) и (4), находится по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|\mathrm{n}_1 \cdot \mathrm{n}_2|}{|\mathrm{n}_1||\mathrm{n}_2|}. \quad (5)$$

Пример3.3. Найти угол между плоскостями $-3y+z+2=0$ и $2y+z-5=0$.

Решение. Векторы **n₁** и **n₂**, перпендикулярные этим плоскостям, имеют координаты $\mathbf{n}_1=(0;\ -3;\ 1)$, $\mathbf{n}_2=(0;\ 2;\ 1)$. Найдем длины этих векторов и их скалярное произведение: $|\mathbf{n}_1|=\sqrt{10}$, $|\mathbf{n}_2|=\sqrt{5}$; $\mathbf{n}_1\ \mathbf{n}_2=-5$.

Тогда по формуле (5) получаем $\cos\alpha=|-5|/(\sqrt{10}\ \sqrt{5})=1/\sqrt{2}$, откуда $\alpha=45^{\circ}$.

Плоскости, заданные уравнениями (3) и (4), перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны векторы $\mathbf{n}_1=(a_1;\ b_1;\ c_1)$ и $\mathbf{n}_2=(a_2;\ b_2;\ c_2)$, т. е. когда $\mathbf{n}_1\ \mathbf{n}_2=0$.

Пример 3.4. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, равные *a, b, c*.

Решение. Проведем через точки $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$ и $(0;\ 0;\ c)$ плоскость, уравнение которой запишем в виде

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Подставим в уравнение координаты точек $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$ и $(0;\ 0;\ c)$, получим соотношения

$$\begin{cases} A\cdot a + D = 0, \\ B\cdot b + D = 0, \\ C\cdot c + D = 0, \end{cases}$$

из которых найдем *A, B, C*.

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}..$$

Подставим в уравнение плоскости и, после несложных преобразований, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется уравнением плоскости в отрезках.

Контрольные вопросы.

1. Запишите общее уравнение плоскости.

2. Как по уравнению плоскости найти вектор, перпендикулярный плоскости?

3. Что называется углом между плоскостями?

4. Какие плоскости называются перпендикулярными?

5. Запишите формулу, позволяющую найти угол между плоскостями.

6. Запишите уравнение плоскости в отрезках.

Учебное издание

Математика: Векторы на плоскости и в пространстве. Уравнение плоскости

Модуль № 3 для 11 класса

Учебно-методическая часть

Составитель: Евгений Константинович Лейнартас

Редактор: О.Ф.Александрова

Корректура автора

Подписано в печать 25.12.2006. Формат 60x84/16.

Бумага газетная. Печать ризографическая.

Усл. печ. л. 1,5.

Тиражируется на электронных носителях

Адрес в Internet: zensh.ru/resourses

Отдел информационных ресурсов управления информатизации КрасГУ

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 22-05, e-mail: info@lan.krasu.ru

Издательский центр Красноярского государственного университета

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: rio@lan.krasu.ru