Агентство образования администрации Красноярского края

Красноярский государственный университет

Заочная естественно-научная школа при КрасГУ

МАТЕМАТИКА

Преобразование графиков функций.

Графическое решение уравнений

Модуль № 1 для 11 класса

Учебно-методическая часть

Красноярск 2006

Математика: Модуль №1 для 11 класса. Учебно-методическая часть./ Сост.: С.Г.Мысливец, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики, КрасГУ. – Красноярск, 2006 — 29 с.

ISBN 5-7638-0705-7

Печатается по решению Дирекции
Краевого государственного учреждения дополнительного образования
Заочная естественно-научная школа
при Красноярском государственном университете

ISBN 5-7638-0705-7

ВВЕДЕНИЕ

Для графического решение уравнений нужно хорошо знать графики элементарных функций (т.е. функций, изучаемых в школьном курсе), а также правила преобразования графиков: сдвиг, отражение, растяжение или сжатие вдоль осей координат. Полезно также уметь производить арифметические действия с графиками: сложение, вычитание, умножение и деление.

Графический способ решения уравнений может дать только приближенный ответ. Но такое решение часто бывает полезным при нахождении возможных интервалов, где лежат корни уравнения, при нахождении промежутков, где корней заведомо нет и т.д. Если даже кажется, что по графику корень найден точно, нужно убедиться в этом, подставляя его в уравнение, т.е. производя проверку.

Для того чтобы не возникло разночтений, напомним предварительно некоторые определения.

Определение 0.1 ***Графиком*** *функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости, координаты которых есть $(x, f(x))$ и x принадлежит области определения функции f.*

Определение 0.2 *Функция $y = f(x)$ называется* ***возрастающей*** *на некотором интервале, если для всех x_1, x_2 из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ при $x_1 < x_2$, то функция называется* ***убывающей*** *на этом интервале. Если же из $x_1 < x_2$ следует строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется* ***строго возрастающей. Строго убывающей*** *называется функция, для которой при $x_1 < x_2$ выполняется строгое неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Интервал, на котором функция убывает или возрастает, называется интервалом* ***монотонности*** *функции, а функция —* ***монотонной*** *на этом интервале (****монотонно убывающей*** *или* ***монотонно возрастающей****).*

Так, функция $y = x^2$ строго убывает при $x \in (-\infty, 0)$ и строго возрастает при $x \in (0, +\infty)$. Функция $y = x + |x|$ является возрастающей на всей числовой оси (но не является строго возрастающей).

Определение 0.3 *Функция $y = f(x)$ называется* ***четной****, если для всех x из области определения функции число $(-x)$ также принадлежит области определения и $f(x) = f(-x)$.*

Например, функция $y = \sin(x^2 - 1)$ является четной на всей числовой оси $\mathbb{R}$. График четной функции **симметричен** относительно оси ординат.

Определение 0.4 *Функция $y = f(x)$ называется* ***нечетной****, если для всех x из области определения функции число $(-x)$ также принадлежит области определения и $f(-x) = -f(x)$.*

Так, функция $y = x^3 - x$ является нечетной при $x \in \mathbb{R}$, поскольку

$$f(-x) = (-x)^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Многие функции, например $y = x^4 + x$, $y = \sin x + \cos x$, не являются ни четными, ни нечетными функциями.

График нечетной функции есть кривая, для которой начало координат есть центр симметрии. В самом деле, возьмем точку A на графике с координатами $(x, f(x))$. Тогда точка A', симметричная относительно начала координат точке A, имеет координаты $(-x, -f(x))$. Так как $-f(x) = f(-x)$, то точка A' также лежит на графике функции $y = f(x)$.

Определение 0.5 *Функция $y = f(x)$ называется* ***периодической****, если существует такое число $T > 0$, что $x + T$ принадлежит области определения и $f(x+T) = f(x)$ для всех x из области определения функции. При этом число T называется* ***периодом*** *функции $f(x)$.*

Ясно, что $f(x + nT) = f(x), \quad n \in \mathbb{N}$, например,

$$f(x + 2T) = f(x + T + T) = f(x + T) = f(x) \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, nT — также период функции. **Наименьший** период (если он существует) называется **основным** периодом. График функции $y = f(x + T)$ получается переносом графика функции $y = f(x)$ на T единиц влево.

Если $x - T$ принадлежит области определения функции, то

$$f(x) = f(x - T + T) = f(x - T),$$

т.е. число $(-T)$ также период функции $f(x)$. Примером периодической функции может служить функция $y = \sin x$, основной период $T = 2\pi$.

График периодической функции **достаточно построить на одном из отрезков** $[-T, 0]$, $[0, T]$, $[T, 2T]$, ..., а затем с помощью сдвигов на nT единиц вправо и влево продолжить на всю область определения.

Функция $f(x) = c$ (c — постоянная величина) имеет своим периодом любое число, основного периода у нее нет.

1 Простейшие преобразования графиков

Рассмотрим простейшие преобразования графиков функций: сдвиги вдоль осей координат, растяжения и сжатия вдоль осей координат, отражения.

1.1 Сдвиг вдоль оси абсцисс

Пусть нам задана некоторая функция $y = f(x)$ и мы умеем строить график этой функции. Как построить график функции $y = f(x + b)$, где b — некоторое число? Рассмотрим сначала случай, когда $b > 0$. Если x_0 лежит в области определения функции $y = f(x + b)$, то число $x_1 = x_0 + b$ лежит в области определения функции $y = f(x)$ и выполнено равенство

$$f(x_0 + b) = f(x_1),$$

следовательно, точка $(x_0, f(x_1))$ лежит на графике функции $y = f(x+b)$, а точка $(x_1, f(x_1))$ лежит на графике функции $y = f(x)$.

Эти точки получаются друг из друга сдвигом (параллельным переносом) на b единиц вдоль оси Ox. А именно точка $(x_0, f(x_1))$ получается из точки $(x_1, f(x_1))$ сдвигом на b единиц масштаба **влево** вдоль оси Ox.

Если $b < 0$, то аналогичное рассуждение показывает, что точка $(x_0, f(x_1))$ получается из точки $(x_1, f(x_1))$ сдвигом **вправо** на $-b$ (т.е. на $|b|$) единиц вдоль оси Ox.

Отсюда получаем

Правило 1.1 *График функции*

$$y = f(x+b)$$

получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси Ox на $|b|$ единиц масштаба в направлении, имеющем знак, противоположный знаку числа b. Это означает, что если $b > 0$, то график функции сдвигается на b единиц ***влево****, а если $b < 0$, то график функции сдвигается на $|b|$ единиц* ***вправо****.*

Заметим, что промежутки монотонности функции $y = f(x+b)$ получаются сдвигом (из соответствующих промежутков монотонности функции $y = f(x)$) вдоль оси Ox на $|b|$ единиц масштаба в направлении, противоположном знаку числа b.

Пример 1.1. Построить график функции

$$y = (x-3)^2.$$

Решение. Строим график функции $y = x^2$. Далее этот график переносим на 3 единицы вправо (рис. 1).

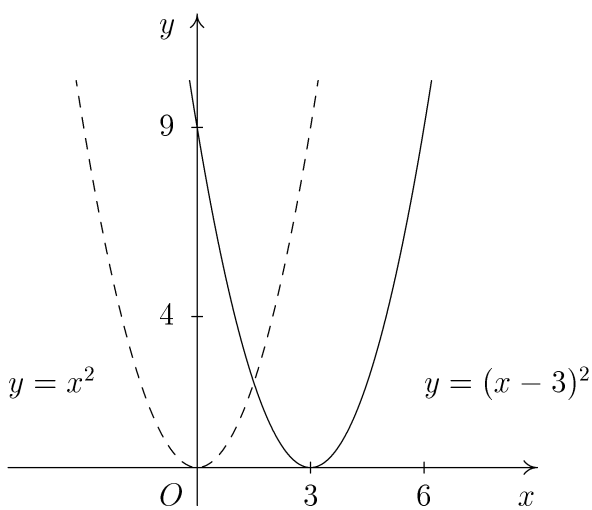

Рис. 1. $y = (x-3)^2$

Контрольный вопрос 1.1. Как построить график функции
$y = f(x+2)$, зная график функции $y = f(x)$?

1.2 Сдвиг вдоль оси ординат

Пусть нам задана функция $y = f(x)$ и ее график. Как построить график функции $y = f(x) + b$, где b — некоторое число?

Рассмотрим x_0 из области определения функции $y = f(x)$. Она, очевидно, принадлежит области определения функции $y = f(x) + b$. Так как точка $(x_0, f(x_0))$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(x_0, f(x_0) + b)$ принадлежит графику функции $y = f(x) + b$. Мы видим, что точка $(x_0, f(x_0) + b)$ получается из точки $(x_0, f(x_0))$ сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси Oy на b единиц масштаба **вверх**, если $b > 0$, и на $|b|$ единиц **вниз**, если $b < 0$.

Правило 1.2 *График функции*

$$y = f(x) + b$$

получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига (параллельного переноса) последнего вдоль оси Oy на $|b|$ единиц масштаба в направлении, имеющем знак числа b. Это означает, что если $b > 0$ график функции $y = f(x)$ сдвигается на b единиц ***вверх****, а если $b < 0$, то график функции сдвигается на $|b|$ единиц масштаба* ***вниз****.*

Промежутки монотонности у данных функций одни и те же.

Пример 1.2. Построить график функции

$$y = x^2 + 3.$$

Решение. Строим график функции $y = x^2$. Затем сдвигаем его вдоль оси ординат на 3 единицы вверх (рис. 2).

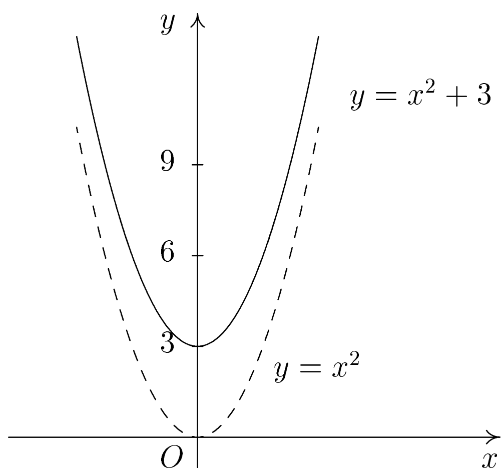

Рис. 2. $y = x^2 + 3$

Контрольный вопрос 1.2. Как построить график функции $y = f(x) - 4$, зная график функции $y = f(x)$?

1.3 Отражение относительно осей координат

Пусть нам задана функция $y = f(x)$ и ее график. Как построить график функции $y = f(-x)$?

Рассмотрим произвольное число x_0 из области определения функции $y = f(x)$, тогда $-x_0$ принадлежит области определения функции $y = f(-x)$. Поэтому точка $(x_0, f(x_0))$ лежит на графике функции $y = f(x)$, а точка $(-x_0, f(x_0))$ лежит на графике функции $y = f(-x)$. Эти точки расположены **симметрично** относительно оси Oy. Получаем

Правило 1.3 *Чтобы построить график функции*

$$y = f(-x),$$

нужно график функции $y = f(x)$ отразить ***симметрично относительно оси*** *Oy.*

Замечание 1.1 *Для* ***четной*** *функции данное преобразование не меняет графика, поскольку в этом случае $f(-x) = f(x)$.*

Аналогичным образом получается следующее правило.

Правило 1.4 *Для того, чтобы построить график функции $y = -f(x)$, нужно график функции $y = f(x)$ отразить* ***симметрично относительно оси*** *Ox.*

Промежутки монотонности у данных функций одни и те же, но при этом промежуток **возрастания** для функции $y = f(x)$ является промежутком **убывания** для функции $y = -f(x)$ и наоборот.

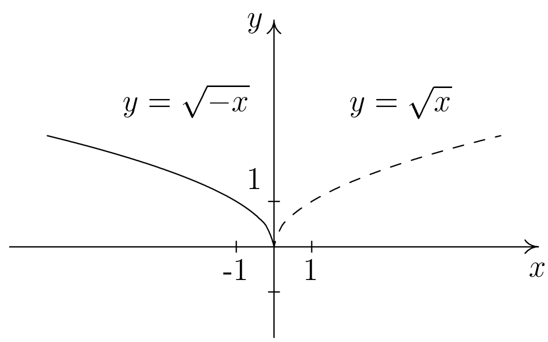

Рис. 3. $y = \sqrt{-x}$

Пример 1.3. Построить график функции

$$y = f(-x), \quad \text{если} \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

Решение. Строим график функции $y = \sqrt{x}$, затем отражаем его симметрично относительно оси Oy (рис. 3).

Пример 1.4. Построить график функции

$$y = -f(x), \quad \text{если} \quad f(x) = (x-3)^2.$$

Решение. Строим график функции $y = (x-3)^2$ (см. пример 1.1), а затем отражаем его симметрично относительно оси Ox (рис. 4).

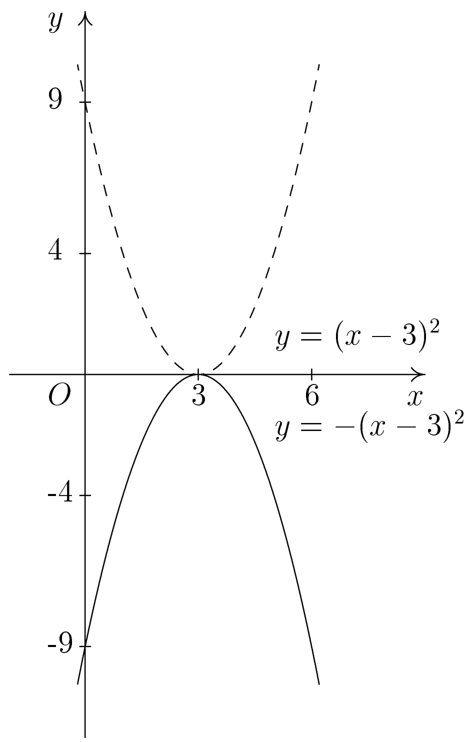

Рис. 4. $y = -(x-3)^2$

Правило 1.5 ***Отражение*** *графика функции* $y = f(x)$ *относительно начала координат соответствует построению графика функции* $y = -f(-x)$*, и таким образом сводится к последовательному выполнению двух преобразований: отражения относительно оси* Ox *и отражения относительно оси* Oy*.*

Замечание 1.2 *Для* ***нечетной*** *функции отражение относительно начала координат не меняет графика, поскольку в этом случае* $f(-x) = -f(x)$*.*

Пример 1.5. Построить график функции

$$y = -f(-x), \quad \text{если} \quad f(x) = x^2 - x.$$

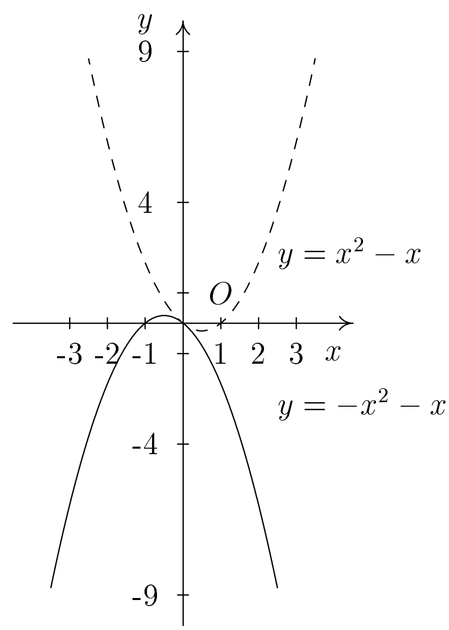

Рис. 5. $y = -((-x)^2 - (-x))$

Решение. Строим сначала график функции $y = x^2 - x$ следующим образом: преобразуем функцию, выделяя полный квадрат

$$x^2 - x = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Поэтому график данной функции получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Ox на $\frac{1}{2}$ вправо и сдвигом вдоль оси Oy на $\frac{1}{4}$ вниз (см. правила 1.1 и 1.2). Затем этот график мы отражаем симметрично относительно начала координат (рис. 5).

1.4 Растяжение или сжатие вдоль оси абсцисс

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$ и ее график. Как построить график функции $y = f(kx)$, где k — некоторое число, отличное от нуля?

Рассмотрим несколько возможностей. Пусть $k > 1$. Если x_0 принадлежит области определения функции $y = f(kx)$, то число $x_1 = kx_0$ лежит в области определения функции $y = f(x)$. Поэтому, точка $(x_0, f(x_1))$ лежит на графике функции $y = f(kx)$, а точка $(x_1, f(x_1))$ лежит на графике функции $y = f(x)$. Таким образом, точка $(x_0, f(x_1))$ получена из точки $(x_1, f(x_1))$ **сжатием** в k раз вдоль оси Ox $(x_0 = \dfrac{1}{k} x_1)$.

Если $0 < k < 1$, то аналогичное рассуждение показывает, что точка $(x_0, f(x_1))$ получается из точки $(x_1, f(x_1))$ **растяжением** в $\dfrac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox.

При $k < 0$ данное преобразование графиков сводится к последовательному выполнению двух преобразований: построению графика функции $y = f(|k|x)$ и отражению относительно оси OY.

Таким образом справедливо

Правило 1.6 *График функции*

$$y = f(kx) \quad (k \neq 0)$$

получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью ***сжатия вдоль оси абсцисс*** *исходного графика пропорционально коэффициенту k при аргументе (если $k > 1$, то график* ***сжимается*** *в k раз, а если $0 < k < 1$, то график* **растягивается** *в $\frac{1}{k}$ раз). Если $k < 0$, то нужно сначала построить график функции $y = f(|k|x)$, а затем отразить его* ***симметрично относительно оси*** *Oy.*

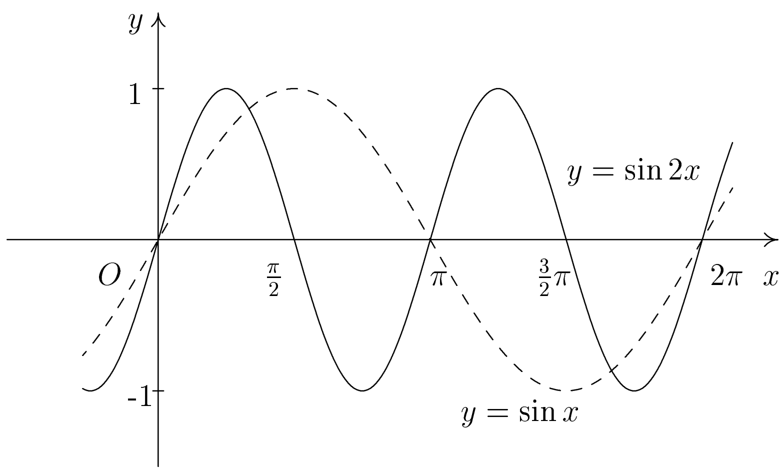

Рис. 6. $y = \sin 2x$

Сжатие или растяжение графика функции вдоль оси абсцисс осуществляется так: строим график функции $y = f(x)$, далее при $k > 1$ уменьшаем абсциссы точек графика в k раз, оставляя ординаты без изменения, при $0 < k < 1$ увеличиваем абсциссы точек графика в $\frac{1}{k}$ раз, оставляя ординаты без изменения.

Пример 1.6. Построить график функции

$$y = \sin 2x.$$

Решение. Строим график функции $y = \sin x$, далее сжимаем его по оси абсцисс в 2 раза (здесь $k = 2 > 1$) (рис. 6). Заметим, что период функции $y = \sin 2x$ равен π. Сжатие удобно проводить в характерных точках графика функции $y = \sin x$.

Пример 1.7. Построить график функции

$$y = \sin \frac{2x}{3}.$$

Решение. Построение этого графика аналогично построению графика примера 1.6, только вместо сжатия мы имеем растяжение в 1,5 раза вдоль оси Ox (рис. 7).

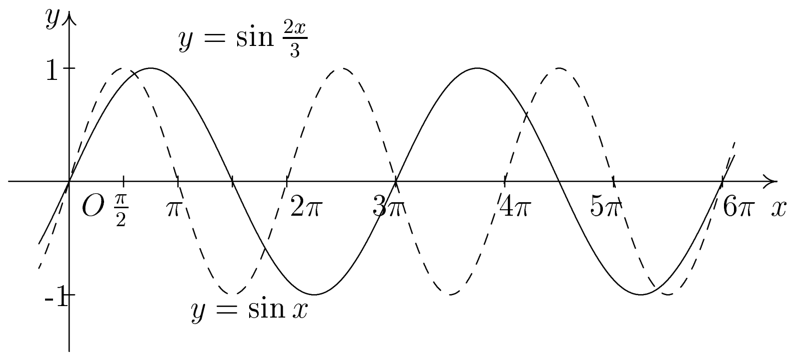

Рис. 7. $y = \sin \frac{2x}{3}$

Контрольный вопрос 1.3. Как построить график функции $y = f(\frac{1}{2}x)$,зная график функции $y = f(x)$?

1.5 Растяжение и сжатие вдоль оси ординат

Пусть задана функция $y = f(x)$ и ее график. Требуется построить график функции $y = m\,f(x)$, где m — некоторое число, отличное от 0.

Рассмотрим несколько возможностей. Пусть сначала $m > 1$. Возьмем число x_0 из области определения функции $y = f(x)$, тогда это число лежит и в области определения функции $y = m\,f(x)$. Следовательно, точка $(x_0, f(x_0))$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, а точка $(x_0, m\,f(x_0))$ расположена на графике функции $y = m\,f(x)$. Мы видим, что ордината второй точки получается **растяжением** в m раз (умножением на m) ординаты первой точки.

Пусть $0 < m < 1$, аналогичное рассуждение показывает, что ордината точки $(x_0, m\,f(x_0))$ получается из ординаты точки $(x_0, f(x_0))$ **сжатием** (делением) в $\frac{1}{m}$ раз.

Если $m < 0$, нужное нам преобразование графика функции получается последовательным выполнением двух преобразований: сначала строим график функции $y = |m|f(x)$, а затем берем его отражение относительно оси Ox.

Таким образом имеем

Правило 1.7 *График функции*

$$y = m\,f(x) \quad (m \neq 0)$$

получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью ***растяжения*** *этого графика вдоль оси ординат пропорционально коэффициенту m при функции (если $m > 1$, то график* ***растягивается*** *в m раз, если $0 < m < 1$, то график* **сжимается** *в $\dfrac{1}{m}$ раз). Если $m < 0$, то сначала нужно построить график функции $y = |m|f(x)$, а затем отразить его* ***симметрично относительно оси*** *Ox.*

Растяжение или сжатие графика функции вдоль оси ординат выполняется так: строим график функции $y = f(x)$, далее при $m > 1$ умножаем ординаты этого графика на m (т.е. увеличиваем их в m раз), при $0 < m < 1$ умножаем ординаты на m (т.е. уменьшаем их в $\frac{1}{m}$ раз), оставляя абсциссы без изменения.

Пример 1.8. Построить график функции

$$y = \frac{1}{3}\sin x.$$

Решение. Строим график функции $y = \sin x$, далее осуществляем сжатие графика вдоль оси ординат в 3 раза (здесь $m = \frac{1}{3} < 1$), т.е. уменьшаем ординаты точек графика в три раза, оставляя абсциссы без изменения (рис. 8). Сжатие удобно проводить в характерных точках графика функции $y = \sin x$.

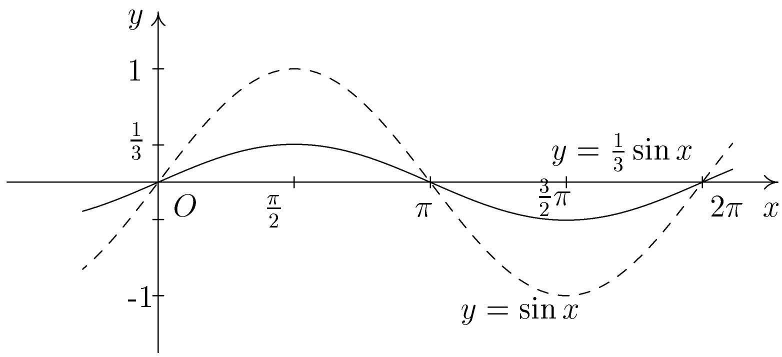

Рис. 8. $y = \frac{1}{3}\sin x$

Контрольный вопрос 1.4. Как построить график функции $y = \dfrac{1}{3}f(x)$, зная график функции $y = f(x)$?

1.6 Последовательное выполнение нескольких преобразований

Предположим, что нам нужно построить график функции

$$y = m\,f(kx + a) + b$$

по известному графику функции $y = f(x)$.

Правило 1.8 *График функции $y = m\,f(kx+a)+b$ строится из графика функции $y = f(x)$, применяя в определенной последовательности описанные выше преобразования. А именно: сначала строим график функции $y = f(kx)$, далее строим график функции $y = f(k(x + \frac{a}{k}))$. Затем строим график функции $y = m\,f(kx + a)$. Наконец, получаем график итоговой функции $y = m\,f(kx + a) + b$.*

Эти преобразования выполняются в следующем порядке: сначала строим график функции $y = f(kx)$, затем переносим его вправо (или влево) на $\left|\frac{a}{k}\right|$, поднимаем (или опускаем) на $\left|\frac{b}{m}\right|$, и, наконец, растягиваем (или сжимаем) в m раз. В зависимости от знаков k и m придется, возможно, отражать график симметрично относительно осей координат.

Заметим, что рассмотренные преобразования можно выполнять в любом порядке, но величины, на которые график переносится вдоль осей, зависят от порядка преобразований.

Пример 1.9. Построить график функции

$$y = \sin^2 x.$$

Решение. Записываем заданную функцию в виде

$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}.$$

Ясно, что график функции $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$ получится из графика функции $y = \cos x$, после выполнения следующих преобразований: сжатие вдоль оси абсцисс в 2 раза; сжатие вдоль оси ординат в 2 раза; симметричное отражение относительно оси абсцисс; сдвиг вдоль оси ординат вверх на $\frac{1}{2}$ единицы масштаба (рис. 9).

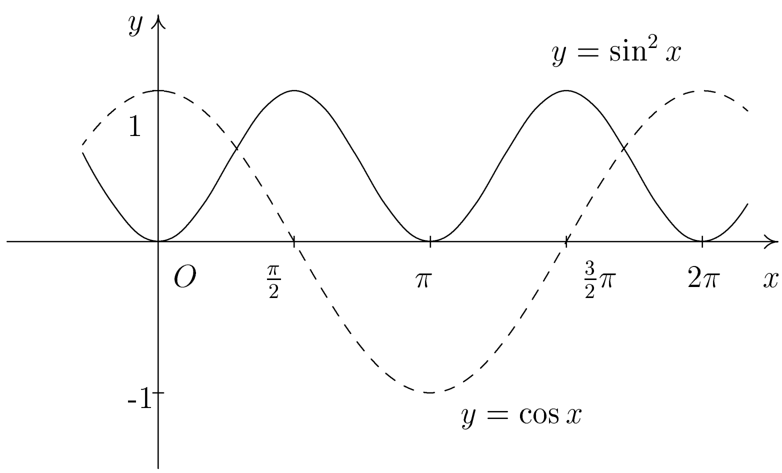

Рис. 9. $y = \sin^2 x$

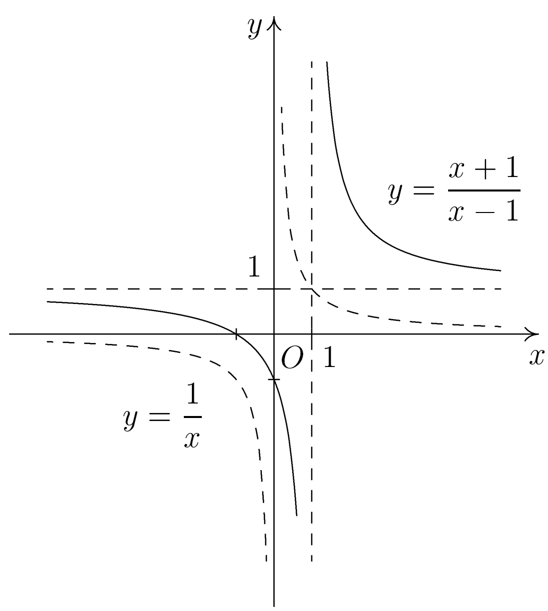

Рис. 10. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

Пример 1.10. Построить график функции

$$y = -\frac{x+1}{x-1}.$$

Решение. Преобразуем функцию

$$y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Теперь ясно, что график данной функции получается из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ с помощью следующих преобразований: сдвиг вдоль оси Ox на 1 единицу вправо, растяжение вдоль оси Oy в 2 раза, наконец, сдвиг вверх по оси Oy на единицу (рис. 10).

Контрольный вопрос 1.5. Как построить график функции $y = -4f(3x-1)+2$, зная график функции $y = f(x)$?

1.7 Построение графиков функций, содержащих знак модуля

1.7.1 Построение графика функции $\mathbf{y = f(|x|)}$.

Напомним определение функции $y = |x|$

$$y = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Правило 1.9 *Для построения графика функции $y = f(|x|)$ нужно построить график функции $y = f(x)$ для $x \geqslant 0$, а затем отразить построенную кривую **симметрично относительно оси ординат.** Эти две части (построенная и отраженная) дадут в **совокупности** график функции $y = f(|x|)$.*

Пример 1.11. Построить график функции

$$y = \sin|x|.$$

Решение. Строим график функции $y = \sin x$ для $x \geqslant 0$, а затем этот график зеркально отражаем относительно оси Oy. Получаем график заданной функции (рис. 11).

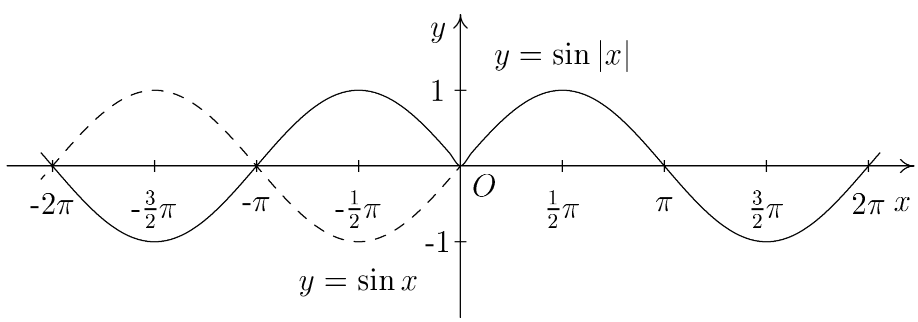

Рис. 11. $y = \sin|x|$

Контрольный вопрос 1.6. Как построить график функции
$y = \frac{1}{3} f(|x|)$, зная график функции $y = f(x)$?

Контрольный вопрос 1.7. Как построить график функции
$y = f(|3x - 2|)$, зная график функции $y = f(x)$?

1.7.2 Построение графика функции $\mathbf{y} = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|$.

Правило 1.10 *Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо построить график функции $y = f(x)$, далее оставить без изменения все части построенного графика, которые лежат выше оси абсцисс, а части, расположенные ниже ее,* ***отразить симметрично относительно этой оси.***

Пример 1.12. Построить график функции

$$y = |x^2 - 1|.$$

Решение. Строим график функции $y = x^2 - 1$ на $(-\infty, +\infty)$. На интервале $(-1, 1)$ функция $y = x^2 - 1 < 0$ (кривая расположена под осью абсцисс). Эту часть графика функции $y = x^2 - 1$ симметрично отражаем относительно оси абсцисс, а остальную часть оставляем без изменения (рис. 12).

Контрольный вопрос 1.8. Как построить график функции
$y = |f(3x)|$, зная график функции $y = f(x)$?

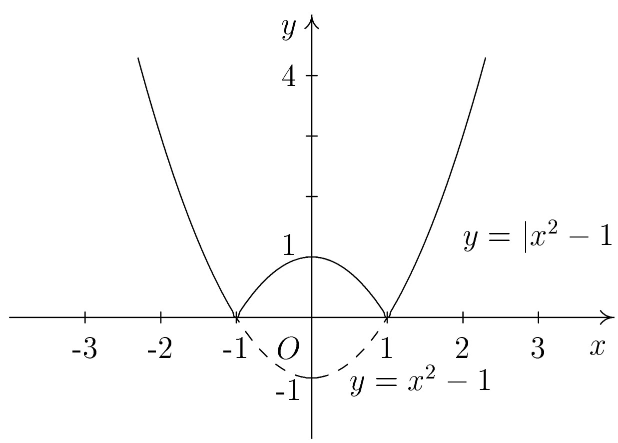

Рис. 12. $y = |x^2 - 1|$

1.7.3 Построение графика функции $\mathbf{y} = |\mathbf{f}(|\mathbf{x}|)|$.

Правило 1.11 *Для построения графика функции $y = |f(|x|)|$ надо построить график функции $y = f(|x|)$, далее оставить* ***без изменения*** *все части построенного графика, которые лежат* ***выше оси абсцисс****, а части, расположенные* ***ниже ее****, отразить* ***симметрично*** *относительно этой оси.*

Пример 1.13. Построить график функции

$$y = |\sin |x||.$$

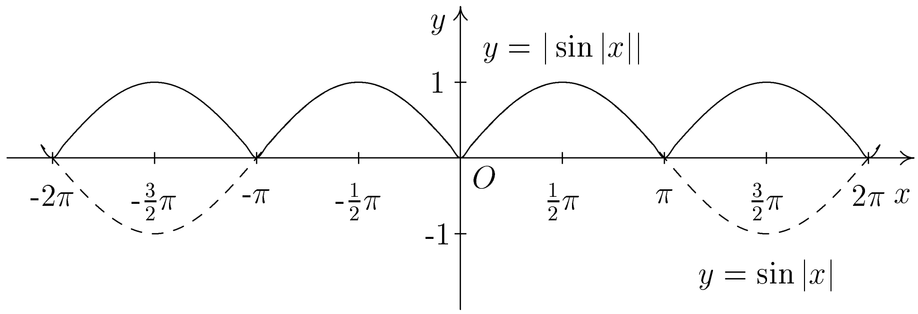

Рис. 13. $y = |\sin|x||$

Решение. Строим график функции $y = \sin|x|$. Затем строим график модуля этой функции, отражая части построенного графика, лежащие ниже оси абсцисс, симметрично относительно этой оси. Получаем график заданной функции $y = |\sin|x||$ (рис. 13).

Рассмотрим еще один пример построения графика такой функции.

Пример 1.14. Построить график функции

$$y = ||x| - 1|.$$

Решение. Построение графика выполняем в три этапа: строим график функции $y = |x|$, выполняем его параллельный перенос вдоль оси ординат на одну единицу вниз, часть графика, расположенную под осью абсцисс, симметрично отражаем относительно этой оси (рис. 14).

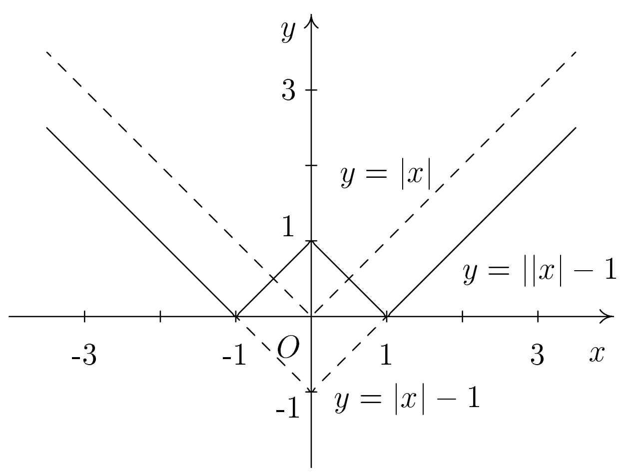

Рис. 14. $y = ||x| - 1|$

Контрольный вопрос 1.9. Как построить график функции $y = 3|f(|3x|)|$, зная график функции $y = f(x)$?

1.7.4 Построение графика $|\mathbf{y}| = |\mathbf{f}(|\mathbf{x}|)|$.

Соотношение $|y| = |f(|x|)|$ не является функцией, поэтому под графиком данного выражения будем понимать множество точек (x, y) на плоскости, удовлетворяющих этому соотношению.

Правило 1.12 *Для построения графика $|y| = |f(|x|)|$ надо построить график функции $y = |f(|x|)|$, а затем отразить его симметрично относительно оси абсцисс и взять объединение получившихся графиков.*

Пример 1.15. Построить график

$$|y| = |x^2 - 4|x| + 3|.$$

Решение. По выше изложенным правилам строим график функции $y = |x^2 - 4|x| + 3|$, а затем отражаем его симметрично относительно оси абсцисс. Обе части построенного графика дадут искомый график (рис. 15).

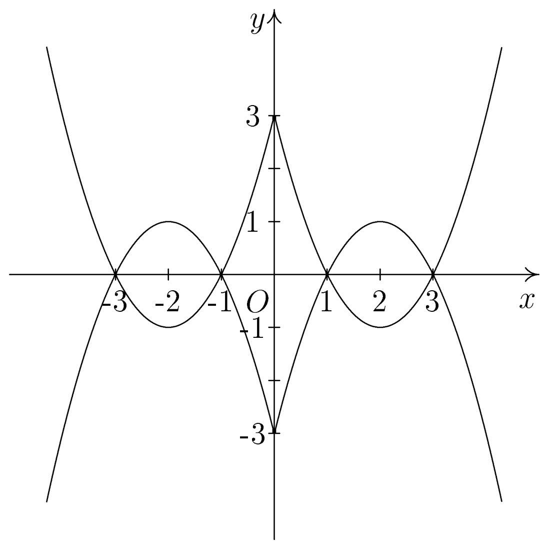

Рис. 15. $|y| = |x^2 - 4|x| + 3|$

Замечание 1.3 *При построении графиков функций, являющихся суммой, произведением, частным функций или более сложной функцией, из которых одна или несколько содержат знак модуля, находят область определения функции, раскрывают знак модуля на тех промежутках, где выражения под знаком модуля не меняют знака, и, наконец, строят график функции, заданной на разных промежутках разными формулами.*

Пример 1.16. Построить график функции

$$y = |x + 2| + |2x - 4| + |x - 3| + x - 10.$$

Решение. Область определения функции: $(-\infty, +\infty)$. Решаем уравнения

$$\begin{aligned} x + 2 = 0, &\qquad x = -2, \\ 2x - 4 = 0, &\qquad x = 2, \\ x - 3 = 0, &\qquad x = 3. \end{aligned}$$

Рассмотрим промежутки $(-\infty, -2]$, $(-2, 2]$, $(2, 3]$, $(3, +\infty)$. На этих промежутках функции $y = x + 2$, $y = 2x - 4$, $y = x - 3$ не меняют знака.

Найдем вид нашей функции на этих промежутках:

$$y = \begin{cases} -x-2-2x+4-x+3+x-10 = -3x-5 & \text{при} \quad x \in (-\infty, -2], \\ x+2-2x+4-x+3+x-10 = -x-1 & \text{при} \quad x \in (-2, 2], \\ x+2+2x-4-x+3+x-10 = 3x-9 & \text{при} \quad x \in (2, 3], \\ x+2+2x-4+x-3+x-10 = 5x-15 & \text{при} \quad x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

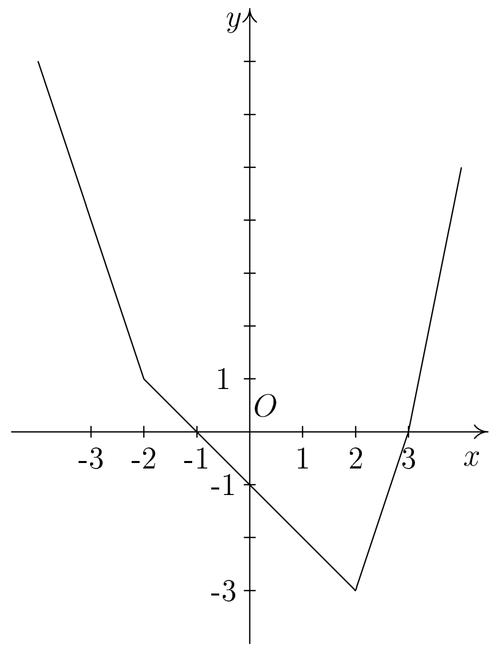

Рис. 16.
$y = |x+2|+|2x-4|+|x-3|+x-10$

Построим графики полученных функций на соответствующих промежутках, получим график заданной функции (рис. 16).

Контрольный вопрос 1.10. Как построить график $|y| = f(|4x|)$, зная график функции $y = f(x)$?

Контрольный вопрос 1.11. Как построить график $|y| = |f(|4x+2|)|$, зная график функции $y = f(x)$?

2 Арифметические действия с графиками

2.1 Сложение и вычитание графиков

Правило 2.1 *Общий метод построения графиков суммы и разности двух функций заключается в том, что предварительно строят два графика для обеих функций, а затем складывают или вычитают* ***ординаты*** *этих кривых при одних и тех же значениях* x *(удобно — в характерных точках). По полученным точкам строят искомый график и выполняют проверку в нескольких контрольных точках.*

В отдельных случаях построение графиков суммы и разности функций можно выполнить так.

Если надо построить график суммы двух функций, то строят вначале график одной, более простой, функции, затем к нему пристраивают график второй функции, ординаты которого откладывают от соответствующих точек первого графика.

Если надо построить график разности двух функций, то строят сначала график функции–уменьшаемого, а затем от него откладывают ординаты функции-вычитаемого, взятые с противоположным знаком. Иногда удобно начертить график функции–вычитаемого с противоположным знаком и ординаты обеих кривых (функции–уменьшаемого и функции–вычитаемого с противоположным знаком) сложить.

Замечание 2.1 *Представленный метод построения графика алгебраической суммы конечного числа функций удобно применять в более простых случаях. Если же функции–слагаемые имеют более сложную природу, то следует выполнять исследование и построение графика функции, используя производные.*

Пример 2.1. Построить график функции

$$y = x + \sin x.$$

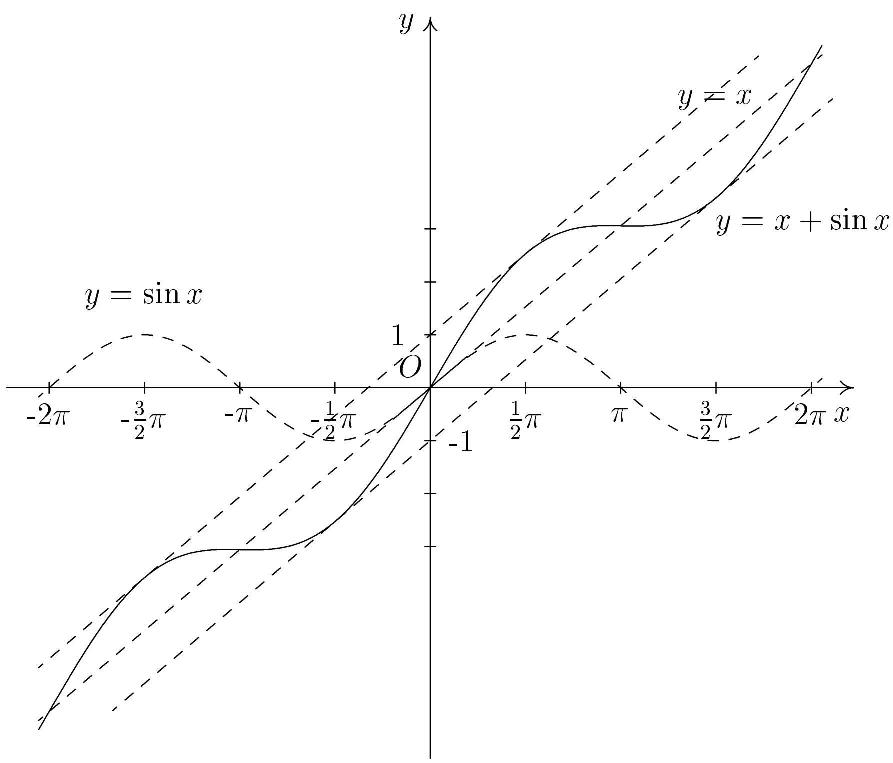

Рис. 17. $y = x + \sin x$

Решение. Имеем две функции: $y = x$ и $y = \sin x$. Строим график функции $y = x$, затем от него (а не от оси абсцисс) откладываем ординаты второй функции. Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$, то целесообразно провести две вспомогательные прямые: $y = x + 1$ и $y = x - 1$. В точках, где $\sin x = 0$ (т.е. при $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$), $y = x$, а это значит, что соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y = x$. В тех точках, где $\sin x = 1$ (т.е. при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$), $y = x + 1$, а это значит, что соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y = x + 1$. В точках, где $\sin x = -1$ (т.е. при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$), $y = x - 1$, а это означает, что соответствующие точки лежат на прямой $y = x - 1$. Следовательно, на прямых $y = x - 1$ и $y = x + 1$ лежат вершины синусоиды, построив ее по найденным точкам мы получим график заданной функции (рис. 17).

Пример 2.2. Построить график функции

$$y = x^3 - 3x.$$

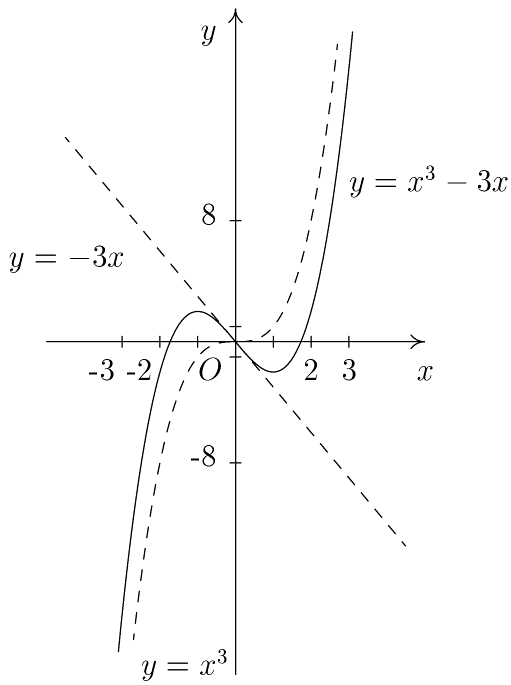

Рис. 18. $y = x^3 - 3x$

Решение. Строим графики функций–слагаемых $y = x^3$ и $y = -3x$. Затем складываем ординаты кривых при одинаковых значениях x. Возьмем значения $x = 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2,\ 2.5, \ldots$. Складывая ординаты обоих графиков для каждого из этих значений x, получаем точки графика заданной функции. Соединив их плавной линией, получим одну ветвь графика функции (при $x > 0$). Заметив, что функция нечетная и график ее симметричен относительно начала координат, строим вторую ветвь графика функции (при $x < 0$). Обе построенные ветви графика дадут график заданной функции (рис. 18).

Пример 2.3. Построить график функции

$$y = \sqrt{x} - \cos x.$$

Решение. Строим графики двух функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\cos x$. Затем от графика первой функции $y = \sqrt{x}$ откладываем ординаты второй функции, делая это аналогично как в примере 2.1 по характерным точкам функции $y = -\cos x$. Соединив полученные точки плавной линией, получим график заданной функции (рис. 19).

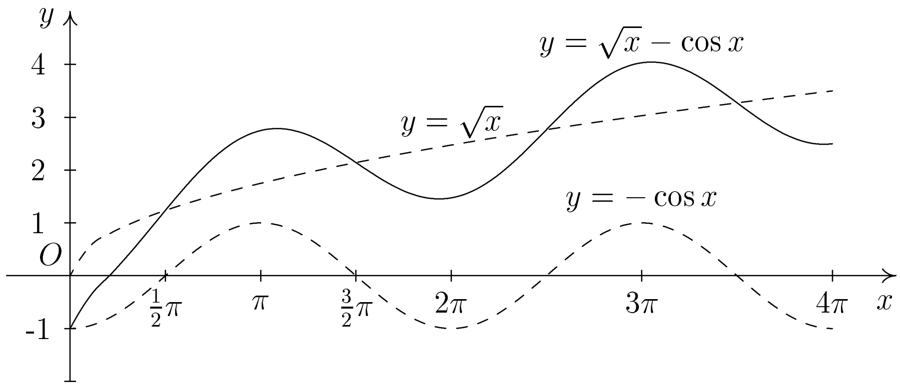

Рис. 19. $y=\sqrt{x}-\cos x$

Контрольный вопрос 2.1. Как построить график функции $y=2f_1(x)-f_2(-x)$, зная графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$?

2.2 Умножение и деление графиков

Правило 2.2 *Если заданы графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, то можно построить "по точкам" график функции $y=f_1(x)f_2(x)$ или $y=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $(f_2\neq 0)$. Заметим, что если при сложении (вычитании) графиков можно пользоваться циркулем для сложения ординат, то при умножении (делении) надо предварительно выразить отрезки (ординаты) числами и лишь затем умножить (разделить) эти числа с учетом их знаков. Деление графиков можно свести к умножению:*

$$y=f_1(x)\cdot\frac{1}{f_2(x)}.$$

Замечание 2.2 *Указанный метод построения графиков произведения или частного функций нерационален и используется крайне редко. Такие графики лучше всего строить с помощью методов высшей математики.*

Пример 2.4. Построить график функции

$$y=x\sin x.$$

Решение. Строим графики функций $y=x$ и $y=\sin x$. Умножение этих графиков упрощается благодаря тому, что функций $y=\sin x$ периодически принимает значения 0, 1, -1. При $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ функция $\sin x=0$, тогда $y=x\sin x=0$, т.е. соответствующая точка графика функции $y=x\sin x$ находится на оси абсцисс. При $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,1,2,\dots)$ функция $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$, тогда $y=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, т.е. соответствующая точка графика функции $y=x\sin x$ лежит на прямой $y=x$. При $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,1,2,\dots)$ функция $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-1$, тогда $y=\frac{\pi}{2}-2k\pi$, т.е. соответствующая точка графика функции $y=x\sin x$ лежит на прямой $y=-x$.

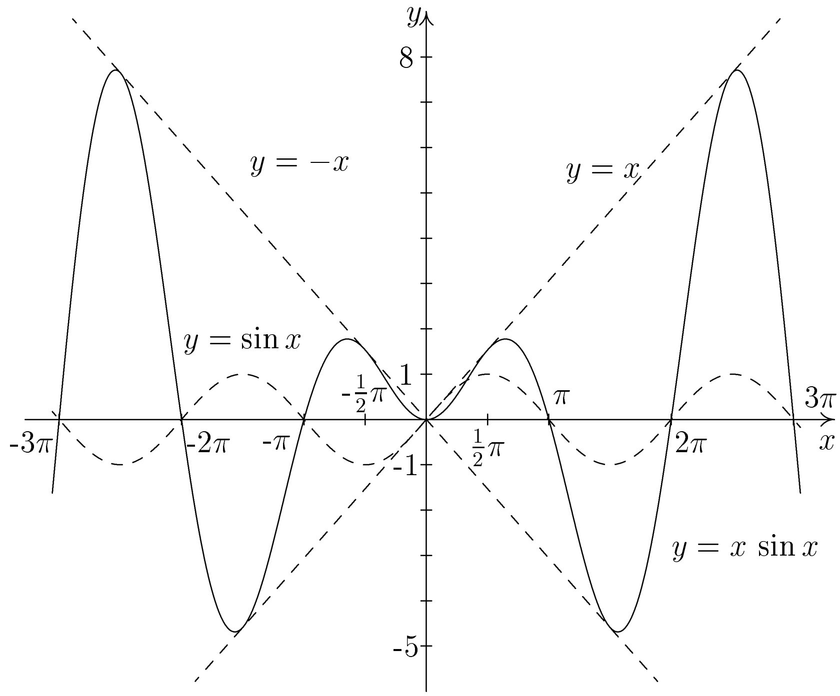

Рис. 20. $y = x\sin x$

Поскольку заданная функция $y = x\sin x$ четная, то указанное построение производим только для правой части графика, левую часть графика (для $x < 0$) строим симметрично правой относительно оси ординат. Найденные точки соединяем плавной линией, получим график заданной функции (рис. 20).

Контрольный вопрос 2.2. Как построить график функции $y = 2f_1(|x|) \cdot f_2(3x)$, зная графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$?

2.3 Построение графиков сложных функций

Рассмотрим сложную функцию[1]

$$y = f(g(x)).$$

Здесь функция y зависит от аргумента x не непосредственно, а через промежуточную функцию $g(x)$. Обозначив $g(x)$ через u, получим $y = f(u)$, где $u = g(x)$.

Часто промежуточную функцию $u = g(x)$ называют внутренней, а функцию $y = f(u)$ — внешней. Графики сложных функций чаще строят, учитывая результаты общего исследования этих функций.

Приведем графический способ построения графика сложной функции на примере функции $y = \sin x^2$ (рис. 21). Здесь функция $f(u) = \sin u$, а функция $g(x) = x^2$.

Обозначим через A, A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно точки $(x, 0)$, $(x, g(x))$, $(g(x), g(x))$, $(g(x), f(g(x)))$, $(x, f(g(x)))$. Построение выполняем в таком порядке: строим графики функций $y = f(x) = \sin x$ и $y = g(x) = x^2$; проводим биссектрису первого и третьего координатных углов ($y = x$); проводим через точку A прямую, параллельную оси OY, до пересечения с графиком функции $y = g(x) = x^2$ (получаем точку A_1);

[1] Материал этого раздела предназначен для учителей.

проводим через точку A_1 прямую, параллельную оси OX, до пересечения с биссектрисой (получаем точку A_2); проводим через точку A_2 прямую, параллельно оси OY, до пересечения с графиком $y = f(x) = \sin x$ (получаем точку A_3); проводим через точку A_3 прямую, параллельную оси OX, до пересечения с продолжением отрезка AA_1. Полученная в пересечении точка $A_4(x, \sin x^2)$ и будет точкой графика функции $y = f(g(x)) = \sin x^2$. Аналогично строятся и остальные точки графика.

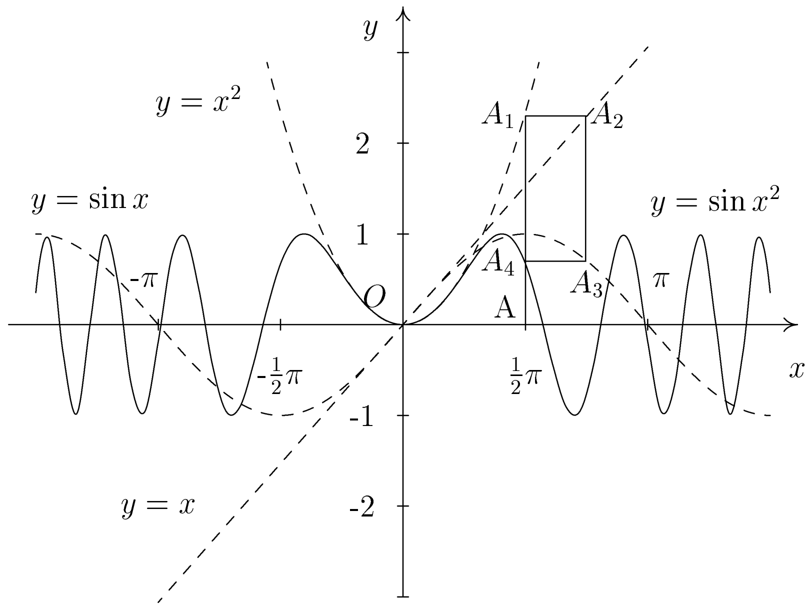

Рис.21 $y = \sin x^2$

3 Графическое решение уравнений

Мы рассмотрели несколько способов построения графиков функций. Перейдем теперь к графическому решению уравнений. Как уже отмечалось, этот метод решения является приближенным и требует проверки. Хотя часто из графика можно увидеть: имеет или не имеет данное уравнение решение; если имеет, то сколько решений; найти решения хотя бы приближенно.

Правило 3.1 *Чтобы найти решение уравнения $f(x) = 0$ нужно построить график функции $y = f(x)$ и найти точки* ***пересечения*** *этого графика с осью Ox.*

Пример 3.1. Решить графически уравнение

$$x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Решение. Строим график функции (рис. 22)

$$y = x^3 - 3x + 2$$

(см. рис. 18, на котором построен график функции $y = x^3 - 3x$). Ищем точки пересечения данного графика с осью Ox. Видно, что это точки -2, 1. Делая проверку убеждаемся, что, действительно, уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$ имеет данные числа корнями. Других корней нет. Чтобы это показать, нужно представить данную функцию в виде

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Корень $x = 1$ является двухкратным корнем уравнения. График это тоже отражает: в точке $(1, 0)$ он касается оси Ox.

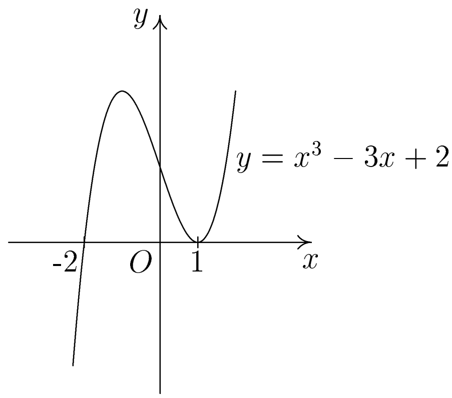

Рис. 22. Уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$

Часто бывает целесообразно уравнение записывать в виде $f(x) = c$.

Правило 3.2 *Чтобы найти решение уравнения $f(x) = c$, нужно построить график функции $y = f(x)$, найти его точки* ***пересечения*** *с прямой $y = c$, тогда решения уравнения будут являться* ***абсциссами*** *этих точек пересечения.*

Таким образом, если нам нужно решить уравнение $f(x) = c$ для нескольких значений постоянной c, мы должны построить график функции $y = f(x)$ только один раз и, меняя c (т.е. меняя прямые $y = c$), найти решения нужного нам уравнения.

Пример 3.2. Ответить на вопрос: сколько корней может иметь уравнение

$$x^3 - 3x = c\ ?$$

Решение. Строим график функции $y = x^3 - 3x$ (см. рис. 23). Из графика мы видим, что при $c = -2$ и $c = 2$ данное уравнение имеет два решения. При $c \in (-2, 2)$ уравнение имеет 3 решения. При $c > 2$ или $c < -2$ уравнение имеет одно решение. Случай $c = -2$ разобран в предыдущем примере. Случай $c = 2$ разбирается аналогично.

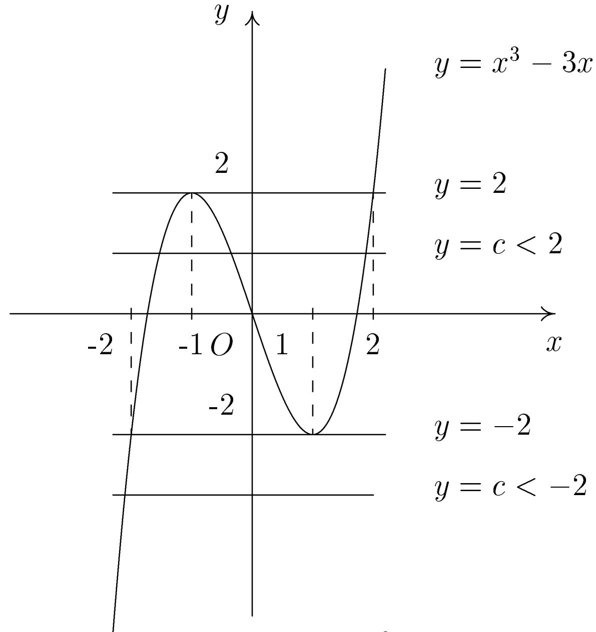

Рис. 23. Уравнение $x^3 - 3x = c$

Правило 3.3 *Для того, чтобы решить уравнение вида $f_1(x) = f_2(x)$, нужно построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Тогда решениями данного уравнения являются* ***абсциссы*** *точек пересечения этих графиков.*

Это правило бывает полезным, когда нам известны графики обеих функций (или мы можем их легко построить).

Пример 3.3. Сколько корней имеет уравнение

$$\operatorname{tg} x = 2x$$

на промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?

Решение. Строим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2x$ на промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Из графика (рис. 24) видно, что уравнение $\operatorname{tg} x = 2x$ имеет три корня: один из них $x = 0$, а два других $\pm c$ расположены симметрично относительно начала координат. Они могут быть найдены только приближенно: $c \approx 67°$.

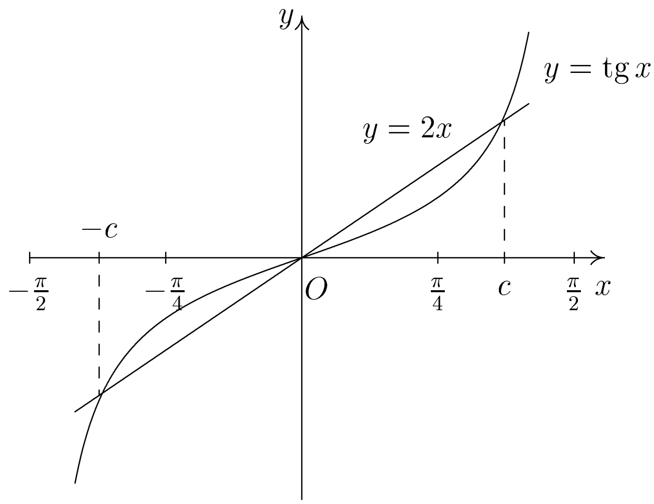

Рис. 24. Уравнение $\operatorname{tg} x = 2x$

Пример 3.4. Определить, сколько решений имеет уравнение

$$\cos^3 x = 1 - \frac{2}{\pi}x.$$

Решение. Строим сначала график функции $y = \cos^3 x$ следующим образом. Представляем эту функцию в виде

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

График функции $y = \frac{1}{4}\cos 3x$ получается из графика функции $y = \cos x$ сжатием вдоль оси Ox в три раза, а затем сжатием вдоль оси Oy в четыре раза. График функции $y = \frac{3}{4}\cos x$ получается из графика функции $y = \cos x$ сжатием вдоль оси Oy в $\frac{4}{3}$ раза. Затем полученные графики нужно сложить (рис. 25).

График функции $y = 1 - \frac{2}{\pi}x$ есть прямая линия, проходящая через точки $(0, 1)$ и $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Точек пересечения этих графиков — 5. Три из них можно найти точно: $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\pi, -1)$, поэтому решениями первоначального уравнения являются числа 0, $\frac{\pi}{2}$, π (в этом нас убеждает и проверка). Еще две точки мы можем найти лишь приближенно: из графика видно, что абсцисса первой такой точки равна $c \approx 30°$, а вторая точка имеет абсциссу приближенно равную $150°$.

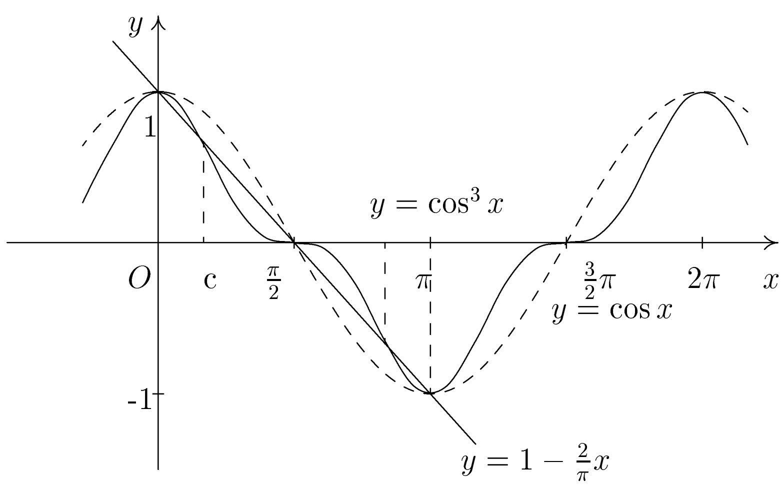

Рис. 25. Уравнение $\cos^3 x = 1 - \frac{2}{\pi}x$

Вне отрезка $[0, \pi]$ уравнение решений не имеет, так как при $x < 0$ функция $1 - \frac{2}{\pi}x > 1$, а при $x > \pi$ справедливо неравенство $1 - \frac{2}{\pi}x < -1$.

А для функции $\cos^3 x$ мы имеем, что $|\cos^3 x| \leqslant 1$.

Список литературы

[1] Мельников И.И., Сергеев И.Н. *Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах.* М.: МГУ, 1994.

[2] Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. *Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.* М.: МГУ, 1991.

[3] Пойа Д. *Математическое открытие.* М.: Наука, 1976.

[4] Соминский И.С. *Элементарная алгебра. Дополнительный курс.* М.: Наука, 1967.

[5] Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. *Как научиться решать задачи.* М.: Просвещение, 1989.

[6] Цыпкин А.Г., Пинский А.И. *Справочник по методам решения задач по математике.* М.: Наука, 1989.

[7] Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. *Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену.* М.: Айрис Рольф, 1997.

[8] Чистяков В.Д. *Старинные задачи по элементарной математике.* Минск: Вышейшая школа, 1978.

[9] Шарыгин И.Ф. *Факультативный курс по математике.* М.: Просвещение, 1989.

Содержание

Учебное издание

Математика: Преобразование графиков функций. Графическое решение уравнений

Модуль № 1 для 11 класса

Учебно-методическая часть

Составитель: Симона Глебовна Мысливец

Редактор: О.Ф.Александрова

Корректура автора

Подписано в печать 25.12.2006. Формат 60x84/16.

Бумага газетная. Печать ризографическая.

Усл. печ. л. 1,8.

Тиражируется на электронных носителях

Адрес в Internet: zensh.ru/resourses

Отдел информационных ресурсов управления информатизации КрасГУ

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 22-05, e-mail: info@lan.krasu.ru

Издательский центр Красноярского государственного университета

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: rio@lan.krasu.ru