Агентство образования администрации Красноярского края
Красноярский государственный университет
Заочная естественно-научная школа при КрасГУ

МАТЕМАТИКА

УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Модуль № 2 для 10 класса

Учебно-методическая часть

Красноярск 2006

Математика: Модуль №2 для 10 класса. Учебно-методическая часть./ Сост.: Т.А Осетрова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных и информационных технологий, КрасГУ. – Красноярск, 2006 — 41 с.

ISBN 5-7638-0702-2

Печатается по решению Дирекции
Краевого государственного учреждения дополнительного образования
Заочная естественно-научная школа
при Красноярском государственном университете

ISBN 5-7638-0702-2

Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть — и далее подтвердить это, — что, следуя этому методу, мы достигнем цели.

Лейбниц.

ВВЕДЕНИЕ

Прежде, чем мы приступим к обсуждению темы этого задания, мне хотелось бы привести здесь слова известного венгерского математика и педагога Джорджа Пойа:

> "1. Процесс решения задачи представляет собой поиск выхода из затруднения или пути обхода препятствия, — это процесс достижения цели, которая первоначально не кажется сразу доступной.
>
> 2. Решение задач — практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь. Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи — то решайте их!
>
> 3. В глубине души человек стремится к большему: ему хотелось бы обладать универсальным методом, позволяющим решить любую задачу. Этой великой мечте суждено остаться мечтой. Тем не менее, такие недостижимые идеалы не остаются бесполезными — пока никто не достиг полярной звезды, но многие, глядя на неҷ находили правильный путь."

Отправимся и мы в наш путь. Ещҷ в младших классах начальной школы вы познакомились с понятием "уравнение". Сначала вы научились решать самые простые уравнения — линейные. Со временем задача "решить уравнение"становилась все более сложной — вы знакомились с методами решения квадратных уравнений, биквадратных и других, более сложных, уравнений. Однако рациональные уравнения — это лишь малая часть всех тех уравнений, которые научились составлять, а главное — решать, за свою тысячелетнюю историю люди. В этом задании мы рассмотрим ещҷ два вида уравнений — уравнения с модулем и иррациональные уравнения, также относящиеся к классу алгебраических уравнений.

Прежде всего, вспомним несколько определений.

Определение 1 *Равенство*

$$f(x) = g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые выражения, содержащие неизвестную величину x, называется уравнением.

Определение 2 *Множество всех x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$, называется областью допустимых значений уравнения (1).*

Определение 3 *Корнем или решением уравнения (1) называется значение неизвестной x, принадлежащее области допустимых значений уравнения и удовлетворяющее уравнению, т.е. обращающее его в верное числовое равенство. Решить уравнение — это значит найти все его корни.*

Определение 4 *Два уравнения*

$$f_1(x) = g_1(x) \quad \text{и} \quad f_2(x) = g_2(x)$$

называются равносильными или эквивалентными, если совпадают множества их решений или оба они не имеют решений.

Из определения равносильности уравнений следует, что вместо того, чтобы решать данное уравнение, можно решать уравнение, ему равносильное.

Определение 5 *Замена уравнения равносильным уравнением или замена уравнения равносильной системой уравнений (неравенств) называется равносильным переходом.*

Как правило, в процессе решения уравнения путем различных преобразований стараются заменить его более простым уравнением или системой уравнений, но далеко не всегда подобный переход от сложного к простому является равносильным. Возможны следующие два случая.

I. При переходе к новому уравнению может произойти потеря корней. Ясно, что такой переход не допустим, так как решить уравнение — это значит найти все его корни. Поэтому при переходе к новому уравнению надо тщательно следить за тем, чтобы такая потеря не могла произойти.

II. Новое уравнение может содержать корни, не являющиеся корнями исходного уравнения, так называемые посторонние корни. Такие корни можно выделить проверкой, т.е. подстановкой всех корней нового уравнения в исходное. Более того, если при решении уравнения не удалось избежать действий, которые могут привести к появлению посторонних корней, то нужно обязательно делать проверку, иначе решение считают неполным, даже если на самом деле посторонние корни и не появились.

В подтверждение сказанного рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$x(4-x) = x(x-2).$$

Решение. Если обе части уравнения разделить на x, то получим уравнение

$$4 - x = x - 2,$$

имеющее единственное решение $x = 3$, в то время как исходное уравнение имело два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$. Следовательно, сокращение обеих частей уравнения на общий множитель, содержащий неизвестную, может привести к потере корней уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$4 - x = x - 2.$$

Решение. Если обе части уравнения умножить на x, то получим уравнение

$$x(4-x) = x(x-2),$$

имеющее два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$, в то время как исходное уравнение имело единственное решение $x = 3$. Следовательно, при домножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестную, могут появиться посторонние корни.

Заметим, что одни и те же преобразования уравнения могут приводить к уравнению, как равносильному, так и не равносильному данному.

Пример 3. Решить уравнение

$$3x + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-2} = 3.$$

Решение. Если в левой части уравнения привести подобные члены, то получим уравнение

$$3x = 3,$$

имеющее решение $x = 1$, в то время как исходное уравнение решений не имеет, так как выражения $\dfrac{1}{x-1}$ и $\dfrac{2}{2x-2}$ не имеют смысла при $x = 1$, т.е. 1 не входит в область допустимых значений исходного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$$2x + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-2} = 4.$$

Решение. Если в левой части уравнения привести подобные члены, то получим уравнение

$$2x = 4.$$

Это уравнение имеет решение $x = 2$. Полученное значение является решением и исходного уравнения.

Контрольный вопрос 1. Какие уравнения называются равносильными?

Контрольный вопрос 2. Какие преобразования уравнений могут привести к потере корней?

Контрольный вопрос 3. Какие преобразования уравнений могут привести к появлению посторонних корней?

1 Уравнения с модулем

1.1 Основные определения

Начиная разговор о каком-либо математическом понятии, необходимо дать точное определение данного понятия. Поэтому, прежде чем мы приступим к обсуждению методов решения уравнений с модулем, дадим необходимые определения.

Определение 6 *Модулем или абсолютной величиной действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, равное числу x, если $x \geq 0$, и числу $(-x)$, если $x < 0$.*

Таким образом,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Определение 7 *Уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, называется уравнением с модулем.*

Согласно этому определению из двух уравнений $|x| = 5$ и $x = |-5|$ уравнением с модулем является только первое.

Давно известно, что "повторение — мать учения", поэтому нелишним будет вспомнить сейчас свойства абсолютной величины. Если же, против ожидания, вам не удалось это сделать, прочитайте их:

1.$|a| = |-a|$;
2.$|a| \geq a$ и $|a| \geq -a$; или $-|a| \leq a \leq |a|$
3.$|ab| = |a| \cdot |b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
4.$|a+b| \leq |a| + |b|$, причем $|a+b| = |a| + |b|$, если $ab \geq 0$;
5.$|a-b| \geq \Big||a| - |b|\Big|$;
6.$|a|^2 = a^2$.

1.2 Метод интервалов

Существует несколько способов решения уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля. Один из них — это, так называемый, метод интервалов. Он состоит в следующем. Для того чтобы решить уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, необходимо освободиться от знака модуля, используя его определение. Для этого следует:

1) найти критические точки, т.е. значения неизвестной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

2) разбить область допустимых значений уравнения на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

3) на каждом из этих промежутков уравнение записать без знака модуля, а затем решить его.

Объединение решений, найденных на всех промежутках, и составляет все решения исходного уравнения.

Воспользуемся этим методом при решении конкретных уравнений.

Пример 1.1. Решить уравнение

$$|x+4| = 2x - 10.$$

Решение. 1. Решим уравнение $x + 4 = 0$ и найдем критическую точку $x = -4$.
2. Разобьем область допустимых значений данного уравнения, т.е. всю числовую ось, на два промежутка: $(-\infty, -4)$ и $[-4, +\infty)$.

3. При $x < -4$ выражение под знаком модуля отрицательно и, следовательно, $|x+4| = -(x+4)$. Поэтому на промежутке $(-\infty, -4)$ исходное уравнение можно заменить равносильным $-(x+4) = 2x - 10$. Решение этого уравнения $x = 2$, однако оно не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому исходное уравнение на данном промежутке решений не имеет.

При $x \geq -4$ выражение под знаком модуля неотрицательно и, следовательно, $|x+4| = x+4$. Поэтому на промежутке $[-4, +\infty)$ исходное уравнение можно записать $x+4 = 2x-10$. Решение этого уравнения $x = 14$, оно принадлежит рассматриваемому промежутку и, следовательно, является решением исходного уравнения.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение $x = 14$.

Это уравнение можно решать и другим способом. Возведчм обе части исходного уравнения в квадрат:

$$x^2 + 8x + 16 = 4x^2 - 40x + 100.$$

Преобразуем это уравнение и получим:

$$x^2 - 16x + 28 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня $x_1 = 14$ и $x_2 = 2$. Однако второй корень решением исходного уравнения не является, так как выражение $2x - 10$, стоящее в правой части уравнения, при $x = 2$ отрицательно, в то время как левая часть уравнения при любых значениях x неотрицательна. Нетрудно проверить, что $x = 14$ является корнем исходного уравнения.

Пример 1.2. Решить уравнение

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0.$$

Решение. Критическая точка этого уравнения $x = 0$. Она разбивает числовую прямую на два промежутка: $(-\infty, 0)$ и $[0, +\infty)$.

На промежутке $(-\infty, 0)$ уравнение равносильно

$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Его корни: $x_1 = -2, x_2 = -3$ принадлежат данному промежутку.

На промежутке $[0, +\infty)$ уравнение равносильно

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Его корни: $x_3 = 2, x_4 = 3$ принадлежат этому промежутку.

Следовательно, множество всех решений исходного уравнения состоит из четырчх чисел: $-3, -2, 2, 3$.

Пример 1.3. Решить уравнение

$$|5 - 2x| + |x + 3| = 2 - 3x.$$

Решение. 1. Решим уравнения $5 - 2x = 0$ и $x + 3 = 0$ и найдем критические точки $x_1 = \frac{5}{2}$ и $x_2 = -3$.
2. Разобьем область допустимых значений данного уравнения на три промежутка: $(-\infty, -3)$, $[-3, \frac{5}{2})$ и $[\frac{5}{2}, +\infty)$.
3. При $x < -3$ выражение $5 - 2x$ положительно и, следовательно, $|5 - 2x| = 5 - 2x$, а выражение $x + 3$ отрицательно, поэтому $|x + 3| = -(x + 3)$. Таким образом, на промежутке $(-\infty, -3)$ исходное уравнение можно записать $5 - 2x - (x + 3) = 2 - 3x$. После приведения подобных членов это уравнение примет вид $0 \times x = 0$. Решение данного уравнения — все значения неизвестной x, принадлежащие промежутку $(-\infty, -3)$.

При $-3 \leq x < \frac{5}{2}$ выражение $5 - 2x$ положительно, а выражение $x + 3$ неотрицательно, т.е. $|5-2x| = 5-2x$ и $|x+3| = x+3$. Поэтому на промежутке $[-3, \frac{5}{2})$ исходное уравнение принимает вид $5 - 2x + x + 3 = 2 - 3x$. Решение этого уравнения $x = -3$, оно принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому является решением исходного уравнения.

При $x \geq \frac{5}{2}$ выражение $5 - 2x$ неположительно, а выражение $x + 3$ положительно, т.е. $|5-2x| = -(5-2x)$, а $|x+3| = x+3$. На промежутке $[\frac{5}{2}, +\infty)$ исходное уравнение можно записать $-(5 - 2x) + x + 3 = 2 - 3x$. Решение этого уравнения $x = \frac{2}{3}$ не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому оно не будет решением исходного уравнения .

Таким образом, решением исходного уравнения является промежуток $(-\infty, -3]$.

Данный метод решения уравнений с модулем универсальный, но не единственный.

1.3 Метод замены неизвестного

Иногда уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком модуля, можно решить довольно просто, используя метод замены неизвестного. Продемонстрируем данный метод на конкретном примере.

Пример 1.4. Решить рассмотренное в примере 1.2 уравнение

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

методом замены неизвестного. Решение.

Обозначим: $y = |x|$. По свойству модуля $|x|^2 = x^2$. Поэтому исходное уравнение может быть записано в виде:

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Это квадратное уравнение и его корни: $y_1 = 2, y_2 = 3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $|x| = 2$ и $|x| = 3$, решениями которых являются числа $x = \pm 2, x = \pm 3$.

1.4 Метод замены уравнения совокупностью систем

Рассмотрим ещч один метод решения подобных уравнений — метод замены уравнения совокупностью систем.

Методом замены уравнения совокупностью систем можно решать уравнения вида

$$|f(x)| = g(x), \tag{2}$$

причем данное уравнение можно заменять совокупностью систем двумя способами.

Первый способ. Уравнение (2) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Второй способ. Уравнение (2) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Если в уравнении (2) функция $f(x)$ имеет более простой вид, нежели функция $g(x)$, то имеет смысл исходное уравнение заменять первой совокупностью систем, а если более простой вид имеет функция $g(x)$, тогда исходное уравнение следует заменять второй совокупностью систем.

В частности, уравнение

$$|f(x)| = c, \tag{3}$$

при $c > 0$ равносильно совокупности уравнений

$$f(x) = c \;\text{ и }\; -f(x) = c;$$

при $c = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;
при $c < 0$ решений не имеет.

Воспользуемся данным методом при решении следующих уравнений.

Пример 1.5. Решить уравнение

$$2|x^2 + 2x - 5| = x - 1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2(x^2 + 2x - 5) = x - 1, \\ x - 1 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -2(x^2 + 2x - 5) = x - 1, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Решим первую систему. Корнями уравнения

$$2x^2 + 4x - 10 = x - 1$$

являются числа $x = \dfrac{3}{2}$ и $x = -3$, приччм второе число не принадлежит промежутку $[1, +\infty)$ и поэтому решением первой системы не является. Таким образом, первая система имеет единственное решение $x = \dfrac{3}{2}$.

Решим теперь вторую систему. Уравнение

$$-2x^2 - 4x + 10 = x - 1$$

имеет корни

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{113}}{4} \;\text{ и }\; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{113}}{4}.$$

Проверим, принадлежат ли найденные значения промежутку $[1, +\infty)$. Из неравенства

$$\frac{-5 + \sqrt{113}}{4} \geq 1$$

имеем следующую цепочку числовых неравенств:

$$\frac{\sqrt{113} - 5}{4} \geq 1 \Longleftrightarrow \sqrt{113} \geq 9 \Longleftrightarrow 113 \geq 81.$$

Последнее числовое неравенство верно, поэтому верно и исходное неравенство. Это означает, что число $\dfrac{-5 + \sqrt{113}}{4}$ является решением второй системы.

Число $\frac{-5-\sqrt{113}}{4}$ отрицательно, поэтому промежутку $[1, +\infty)$ не принадлежит и, следовательно, решением второй системы не является.

Итак, совокупность двух систем и, следовательно, исходное уравнение имеет два корня

$$\frac{3}{2} \text{ и } \frac{\sqrt{113}-5}{4}.$$

Пример 1.6. Решить уравнение

$$\left|\frac{x^2-6x-4}{x^2+6x-4}\right| = 1.$$

Решение. Знаменатель левой части уравнения содержит неизвестную, поэтому решение начинаем с определения области допустимых значений. Выражение x^2+6x-4 обращается в нуль при $x_1 = -3+\sqrt{13}$ и $x_2 = -3-\sqrt{13}$. Следовательно, область допустимых значений уравнения:

$$(-\infty, -3-\sqrt{13}) \cup (-3-\sqrt{13}, -3+\sqrt{13}) \cup (-3+\sqrt{13}, +\infty).$$

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\frac{x^2-6x-4}{x^2+6x-4} = 1 \text{ и } \frac{x^2-6x-4}{x^2+6x-4} = -1.$$

Первое уравнение после преобразования имеет вид

$$x^2-6x-4 = x^2+6x-4.$$

Его единственное решение $x = 0$. Преобразовав второе уравнение, получим

$$x^2-6x-4 = -x^2-6x+4.$$

Данное уравнение имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Таким образом, множество решений исходного уравнения состоит из трех чисел: $-2, 0, 2$.

Пример 1.7. Решить уравнение

$$\Big|2|x-1|-3\Big| = 5.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$2|x-1|-3 = 5 \text{ и } 2|x-1|-3 = -5$$

или
$$|x-1|=4 \text{ и } |x-1|=-1.$$
Второе решений не имеет. Первое же уравнение, в свою очередь, равносильно совокупности двух уравнений
$$x-1=4 \text{ и } x-1=-4,$$
корни которых $x_1=5$ и $x_2=-3$.

При решении уравнения, в котором под знаком модуля находится выражение, также содержащее модуль, можно сначала освобождаться от внутренних модулей, а затем в полученных уравнениях раскрывать оставшиеся модули.

Пример 1.8. Решить уравнение
$$\Big|x-|4-x|\Big|-2x=4.$$
Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем
$$\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ |x-(4-x)|-2x=4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4-x<0, \\ |x+(4-x)|-2x=4, \end{cases}$$
или
$$\begin{cases} x\le 4, \\ |2x-4|-2x=4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x>4, \\ -2x=0. \end{cases}$$
Вторая система совокупности решений не имеет. Первая система совокупности, в свою очередь, равносильна совокупности двух следующих систем:
$$\begin{cases} x\le 4, \\ 2x-4\ge 0, \\ (2x-4)-2x=4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\le 4, \\ 2x-4<0, \\ -(2x-4)-2x=4, \end{cases}$$
т.е. совокупности
$$\begin{cases} x\le 4, \\ x\ge 2, \\ -4=4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\le 4, \\ x<2, \\ -4x=0. \end{cases}$$
Единственным решением данной совокупности, а, следовательно, и исходного уравнения является число 0.

Иногда внимательный взгляд на уравнение позволяет значительно упростить процесс нахождения его корней.

Пример 1.9. Решить уравнение

$$\Big|2|x|-6\Big|=-4-x.$$

Решение. Левая часть данного уравнения неотрицательна для все значений x, следовательно, и правая его часть должна быть такой же. Отсюда имеем: $-4-x \geq 0$ или $x \leq -4$. Это означает, что $|x|=-x$ и исходное уравнение может быть записано: $|-2x-6|=-4-x$. Далее: так как $x \leq -4$, то $-2x-6 \geq 2$, следовательно, $|-2x-6|=-2x-6$ и исходное уравнение принимает вид: $-2x-6=-4-x$. Это уравнение имеет единственное решение $x=-2$, однако оно не удовлетворяет условию $x \leq -4$, поэтому не является решением исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение корней не имеет.

1.5 Графический метод

Существует ещч один метод решения уравнений с модулем. Он основан на геометрической интерпретации понятия абсолютной величины числа, а именно: модуль x равен расстоянию от точки с координатой x до точки с координатой 0 на числовой оси Ox. Используя геометрическую интерпретацию, легко решаются уравнения вида:

$$|x-a|=c, \tag{4}$$

$$|x-a|+|x-b|=c, \tag{5}$$

$$|x-a|-|x-b|=c, \tag{6}$$

где a, b, c числа.

Решить уравнение (4) — это значит найти все точки на числовой оси Ox, которые отстоят от точки с координатой a на расстояние c. При $c<0$ уравнение решений не имеет; при $c=0$ оно имеет один корень $x=a$ и при $c>0$ уравнение имеет два корня $x_1=a-c$ и $x_2=a+c$.

Решить уравнение (5) — это значит найти все точки на числовой оси Ox, для каждой из которых сумма расстояний от неч до точек с координатами a и b равна c. Аналогично интерпретируется решение уравнения вида (6).

Пример 1.10. Решить уравнение

$$|x-1|-|x-3|=2.$$

Решение. Для тогс чтобы решить данное уравнение, нужно на числовой оси Ox найти все такие точки, для каждой из которых разность расстояния от неч до точки с координатой 1 и расстояния от неч до точки с координатой 3 равна 2. Так как длина отрезка $[1,3]$ равна 2, то ясно, что любая точка с координатой $x \geq 3$ удовлетворяет данному уравнению, а любая точка с координатой $x < 3$ не удовлетворяет ему. Таким образом, решением исходного уравнения является множество всех чисел из промежутка $[3,+\infty)$.

Рассмотренный метод можно отнести к графическим методам решения уравнения. Все необходимые построения здесь производились на числовой оси. Рассмотрим теперь метод решения, в котором будут использовать построения на координатной плоскости. Этим методом, теоретически, можно решать уравнения с модулем любого вида, однако практическая реализация метода иногда бывает довольно сложной.

Суть метода состоит в следующем. Решить уравнение

$$f(x) = g(x),$$

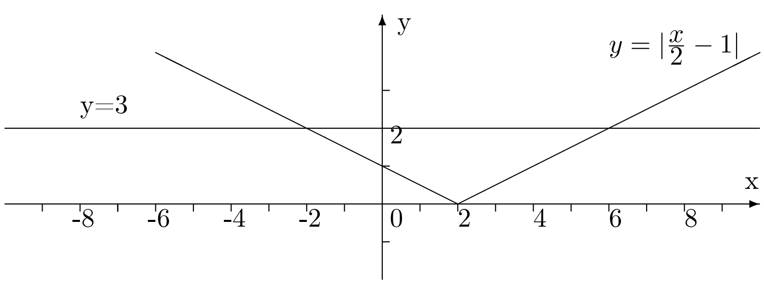
это значит найти все значения x, для которых значения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ равны, т.е. найти абсциссы всех точек пересечения графиков этих функций. Если же графики не имеют общих точек, то уравнение не имеет корней. Следует, однако, иметь в виду, что точное построение графиков функций практически невозможно, поэтому решение, найденное графическим способом требует проверки подстановкой.

Воспользуемся этим методом для решения уравнения вида (3).

Пример 1.11. Решить уравнение

$$\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 3.$$

Решение. Построим графики двух функций $y = |\frac{x}{2} - 1|$ и $y = 3$.



Из чертежа видно, что графики имеют две общие точки. Координаты одной точки: $x = -2, y = 3$. Координаты другой: $x = 6, y = 3$. Следовательно, исходное уравнение имеет два решения: $x_1 = -2, x_2 = 6$. Как уже говорилось, при таком методе значения корней уравнения определяются приблизительно, и только проверка позволит доказать, что найденные значения действительно являются корнями исходного уравнения. При подстановке $x_1 = -2$ и $x_2 = 6$ в уравнение получаем, соответственно, два верных числовых равенства: $|-2| = 2$ и $|2| = 2$.

Так как при графическом методе решения зачастую не удается найти точное значение корня, то применение данного метода бывает обосновано, если требуется найти не сами корни, а всего лишь определить их количество.

1.6 Уравнения с параметром

Вам уже известно, что буквенные величины, входящие в уравнение, могут быть неравноправными. Одни могут принимать все свои допустимые значения и тогда их называют постоянными или параметрами; другие буквенные величины называют неизвестными. При постановке задач, связанных с уравнениями, должно быть указано, какие из буквенных величин, входящих в уравнение, считать неизвестными, а какие — параметрами, иначе задача может стать неопределчнной. Поэтому обычно неизвестные величины в уравнениях обозначаются последними буквами латинского алфавита: x, y, z, а параметры — начальными: a, b, c, m, n и т.д. и в таких случаях уже не делают специальных указаний.

Пример 1.12. Решить уравнение

$$|x - 11| - |x + 1| = a$$

при различных значениях параметра a.

Решение. При решении данного уравнения воспользуемся методом интервалов. Критические точки этого уравнения: $x_1 = -1,\ x_2 = 11$. Они разбивают числовую ось на три промежутка: $(-\infty, -1),\ [-1, 11],\ (11, +\infty)$.

На промежутке $(-\infty, -1)$ уравнение может быть записано:

$$-(x - 11) + (x + 1) = a \quad \text{или} \quad 0 \times x = a - 12.$$

Очевидно, что при $a = 12$ решениями уравнения будут все числа из промежутка $(-\infty, -1)$, а при $a \neq 12$ уравнение на этом промежутке решений иметь не будет.

На промежутке $[-1, 11]$ уравнение принимает вид:

$$-(x-11)-(x+1)=a \quad \text{или} \quad -2x=a-10.$$

Решение этого уравнения $x=\dfrac{10-a}{2}$ принадлежит рассматриваемому промежутку, если выполняется неравенство

$$-1 \leq \frac{10-a}{2} \leq 11.$$

Это двойное неравенство можно записать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{10-a}{2} \geq -1, \\ \dfrac{10-a}{2} \leq 11. \end{cases}$$

Решение этой системы: $-12 \leq a \leq 12$. Только при таких значениях параметра найденное решение уравнения принадлежит рассматриваемому промежутку. Приччм, при $a=-12$ $x=11$, а при $a=12$ $x=-1$.

На промежутке $(11, +\infty)$ уравнение может быть записано:

$$(x-11)-(x+1)=a \quad \text{или} \quad 0 \times x = a+12.$$

Очевидно, что при $a=-12$ решениями уравнения будут все числа из промежутка $(11, +\infty)$, а при $a \neq -12$ уравнение на этом промежутке решений иметь не будет.

Ответ: при $a = 12$ решениями будут все числа из промежутка $(-\infty, -1]$;

при $a=-12$ решениями будут все числа из промежутка $[11, +\infty)$;

при $-12 < a < 12$ решение единственное: $x=\dfrac{10-a}{2}$;

при $a < -12$ решений не будет,

при $a > 12$ решений также не будет.

Пример 1.13. Сколько решений будет иметь уравнение

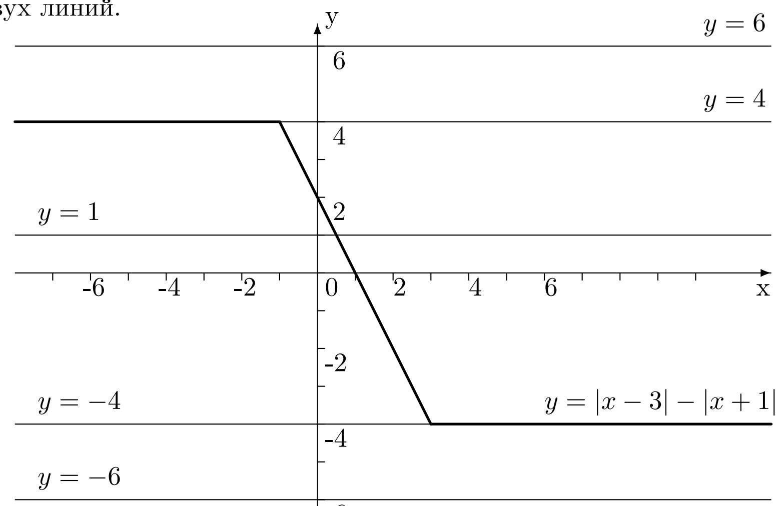
$$|x-3|-|x+1|=a$$

при различных значениях параметра a.

Решение. Воспользуемся графическим методом решения уравнения. Для этого построим графики двух функций: $y=|x-3|-|x+1|$ и $y=a$. Естественно, расположение графика функции $y=a$ на координатной плоскости xOy зависит от значения параметра a.

Сначала построим график функции $y = |x - 3| - |x + 1|$. Для этого определим точки, в которых выражения под знаком модуля обращаются в нуль: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Эти точки разбивают числовую ось Ox на три промежутка: $(-\infty, -1)$, $[-1, 3]$ и $(3, +\infty)$. На промежутке $(-\infty, -1)$ функция имеет вид $y = -(x - 3) + (x + 1)$, т.е. $y = 4$. На промежутке $[-1, 3]$: $y = -(x - 3) - (x + 1)$, т.е. $y = -2x + 2$. На промежутке $(3, +\infty)$: $y = (x - 3) - (x + 1)$, т.е. $y = -4$.

Равенство $y = a$ описывает не одну прямую, а целое семейство прямых. График функции $y = a$ — это прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку с координатами $(0, a)$. Очевидно, что при различных значениях параметра a эти координаты соответствуют всем точкам оси Oy. Нарисовать все такие прямые невозможно, да и не нужно. Будем изображать только те из них, расположение которых относительно графика функции $y = |x - 3| - |x + 1|$, дачт представление о количестве общих точек этих двух линий.



Из рисунка видно, что при $a < -4$ и при $a > 4$ графики функций $y = a$ и $y = |x-3|-|x+1|$ общих точек не имеют. При $-4 < a < 4$ графики функций пересекаются в одной точке. Если же $a = 4$ или $a = -4$, то общих точек будет множество: в первом случае это промежуток $(-\infty, -1]$, во втором — $[3, +\infty)$.

♦[1]

[1]Знаки ♦ и ♢ используются для обозначения начала и окончания изложения мате-

Пример 1.14. Сколько решений будет иметь уравнение (5)

$$|x-a|+|x-b|=c$$

при различных значениях параметров a, b и c?

Решение. При решении уравнения воспользуемся геометрической интерпретацией модуля.

Очевидно, что при $c<0$ данное уравнение решений не имеет.

Если $c=0$, то уравнение будет иметь решение только при $a=b$, причем оно будет единственным и равным a (или b, так как они равны). В случае, если $a \neq b$, тогда уравнение решений иметь не будет.

Рассмотрим теперь случай $c>0$. Если c равно расстоянию между точками a и b, т.е. $c=|a-b|$ и $a \neq b$, тогда для любой точки x, расположенной между a и b, сумма расстояний от x до a и от x до b равна расстоянию между a и b, т.е. c. Если величина c меньше расстояния между точками a и b, т.е. $0<c<|a-b|$, тогда уравнение решений иметь не будет. Рассмотрим теперь случай, когда $c>|a-b|$. Тогда на числовой оси Ox найдутся две точки, не принадлежащие отрезку $[a, b]$ (или $[b, a]$, если $b<a$), координаты каждой из которых удовлетворяют исходному уравнению, а именно:

$$x_1=\min(a, b)-\frac{c-|a-b|}{2},\ x_2=\max(a, b)+\frac{c-|a-b|}{2}.$$

Подытожим наши рассуждения относительно решений исследуемого уравнения:

если $a=b$, тогда при $c<0$ уравнение решений не имеет, при $c=0$ имеет единственное решение, а при $c>0$ решений будет два;

если $a \neq b$, тогда при $c<|a-b|$ уравнение решений не имеет, при $c=|a-b|$ уравнение будет иметь бесконечное множество решений и при $c>|a-b|$ будет иметь два решения. $\Diamond$

1.7 Системы уравнений с модулем

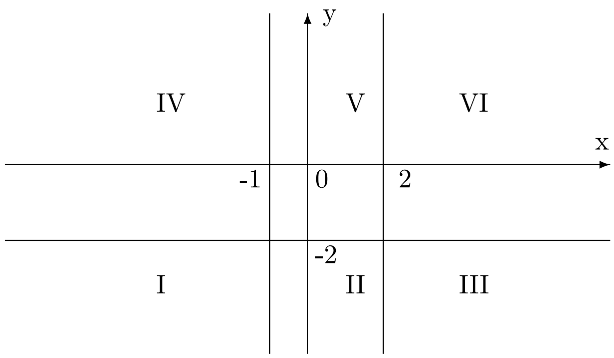
При решении систем уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля, можно использовать как аналитические, так и графические методы решения. Рассмотрим эти методы на конкретных примерах.

риала повышенной сложности

Пример 1.15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x+1| - |y+2| = -2, \\ |x-2| + 2y = 3. \end{cases}$$

Решение. Для решения данной системы будем использовать метод, являющийся аналогом метода интервалов. Для удобства решения введчм в рассмотрение плоскость xOy и построим прямые $x = -1, x = 2, y = -2$, на которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль. (Советуем всегда рисовать картинку.)



Эти прямые разбивают плоскость на 6 областей, задаваемыми следующими системами неравенств:

$$\begin{cases} x & \le -1, \\ y & \le -2, \end{cases} \qquad \text{(I)} \qquad \begin{cases} -1 \le x & \le 2, \\ y & \le -2, \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{cases} x & \ge 2, \\ y & \le -2, \end{cases} \qquad \text{(III)} \qquad \begin{cases} x & \le -1, \\ y & \ge -2, \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

$$\begin{cases} -1 \le x & \le 2, \\ y & \ge -2, \end{cases} \qquad \text{(V)} \qquad \begin{cases} x & \ge 2, \\ y & \ge -2. \end{cases} \qquad \text{(VI)}$$

Рассмотрим данную систему на каждой из этих областей.

Для x и y, принадлежащих области (I), имеем систему уравнений

$$\begin{cases} -(x+1) + (y+2) = -2, \\ -(x-2) + 2y = 3. \end{cases}$$

Решение этой системы — точка с координатами $x = 7, y = 4$; она не принадлежит рассматриваемой области и, следовательно, не является решением исходной системы.

Для x и y, принадлежащих области (II), имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)+(y+2) = -2, \\ -(x-2)+2y = 3. \end{cases}$$

Решение этой системы $x = -\frac{11}{3}, y = -\frac{4}{3}$ не принадлежит области (II) и также не является решением исходной системы.

Для x и y из области (III) имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)+(y+2) = -2, \\ (x-2)+2y = 3. \end{cases}$$

Еч решение $x = -15, y = 10$ также не годится.

Для x и y из области (IV) имеем систему

$$\begin{cases} -(x+1)-(y+2) = -2, \\ -(x-2)+2y = 3. \end{cases}$$

Еч решение $x = -1, y = 0$ принадлежит этой области и, следовательно, является решением исходной системы.

Для x и y из области (V) имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)-(y+2) = -2, \\ -(x-2)+2y = 3. \end{cases}$$

Еч решение $x = -1, y = 0$ принадлежит этой области и, следовательно, является решением исходной системы.

И, наконец, для x и y из области (VI) имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)-(y+2) = -2, \\ (x-2)+2y = 3, \end{cases}$$

решение которой $x = 1, y = 2$ не годится.

Таким образом, заданная система имеет единственное решение $(-1, 0)$.

В отдельных случаях решение таких систем уравнений упрощается, если использовать свойства абсолютной величины.

Пример 1.16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x+y| = 1, \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$$

Решение. Из данной системы следует равенство $|x+y| = |x|+|y|$, которое возможно лишь в случае $xy \geq 0$ (по свойству 4). Если $x \geq 0$ и $y \geq 0$, то данная система имеет вид

$$\begin{cases} x+y = 1, \\ x+y = 1, \end{cases}$$

что равносильно одному уравнению $x + y = 1$.

Если $x \leq 0$ и $y \leq 0$, то данная система имеет вид

$$\begin{cases} -(x+y) = 1, \\ (-x) + (-y) = 1, \end{cases}$$

что равносильно одному уравнению $x + y = -1$.

Таким образом, исходной системе удовлетворяет любая пара неотрицательных чисел, сумма которых равна $+1$, а также любая пара неположительных чисел, сумма которых равна -1.

Контрольный вопрос 4. Какие уравнения называются уравнениями с модулем?

Контрольный вопрос 5. Какие методы существуют для решения уравнений с модулем?

Контрольный вопрос 6. В ччм состоит метод интервалов?

Контрольный вопрос 7. В ччм состоит метод замены неизвестного?

2 Иррациональные уравнения

2.1 Основные определения

Определение 8 *Уравнение, содержащее неизвестную под знаком радикала, называется иррациональным уравнением.*

Согласно этому определению из двух уравнений

$$\sqrt{x+5} = x - 5 \text{ и } x + 5 = \sqrt{5}$$

иррациональным уравнением является только первое.

Следует иметь в виду, что операция извлечения корня неччтной степени определена для любого подкоренного выражения, а корни ччтной степени можно извлекать только из неотрицательных чисел. Радикалы ччтной степени, входящие в уравнение, понимаются в арифметическом смысле, т.е. значение корня ччтной степени всегда неотрицательно. У радикалов неччтной степени рассматривается их единственное значение, знак которого всегда совпадает со знаком подкоренного выражения. Поэтому, например, уравнение

$$\sqrt{x^2 - x - 1} + \sqrt{2x + 1} = -2$$

не имеет решений, так как при любом допустимом значении x левая часть уравнения неотрицательная, а его правая часть отрицательная.

2.2 Область допустимых значений уравнения. Сужение данной области

При решении уравнений, содержащих радикалы ччтной степени, полезно предварительно найти область (или множество) допустимых значений этого уравнения. Иногда решение на этом и завершается.

Пример 2.1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{2x + 3} = \sqrt{1 - x}.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения есть решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ 2x + 3 \geq 0, \\ 1 - x \geq 0. \end{cases}$$

Эта система противоречива. Действительно, решением неравенства

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

будет множество $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$. Решением неравенства $2x + 3 \geq 0$ — промежуток $[-\dfrac{3}{2}, +\infty)$. А решением неравенства $1 - x \geq 0$ — промежуток $(-\infty, 1]$. Нетрудно убедиться, что эти три промежутка не имеют общих точек. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Пример 2.2. Решить уравнение

$$x^3\sqrt{4x^2-12x+8}+(8-x)\sqrt{4-x^2}+x\sqrt{x-1}=x.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения есть решение системы неравенств

$$\begin{cases} 4x^2-12x+8\geq 0,\\ 4-x^2\geq 0,\\ x-1\geq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства системы является множество $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$. Решением второго неравенства является промежуток $[-2,2]$ и, наконец, решением третьего неравенства промежуток $[1,+\infty)$. Эти три множества имеют всего две точки пересечения: $x_1=1$ и $x_2=2$. Таким образом, множеством допустимых значений исходного уравнения будет множество $\{1\}\cup\{2\}$. Осталось выяснить, являются ли полученные числа решениями исходного уравнения. Подставим $x_1=1$ и $x_2=2$ в данное уравнение и увидим, что только при при $x=2$ оно обращается в верное числовое тождество. Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение $x=2$.

Иногда к множеству допустимых значений уравнения полезно присоединить условие совпадения знаков обеих частей уравнения.

Пример 2.3. Решить уравнение

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x+x^2.$$

Решение. Множество допустимых значений этого уравнения есть решение системы

$$\begin{cases} x-5\geq 0,\\ 2x-1\geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что правая часть уравнения при любом допустимом значении x положительна (так как $x\geq 5$). Поэтому присоединим к этой системе ещч одно условие

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}>0 \ \text{ или } \ x-5>2x-1.$$

Таким образом, решение данного уравнения должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} x-5\geq 0,\\ 2x-1\geq 0,\\ x-5>2x-1, \end{cases}$$

которая, как легко убедиться, противоречива. Следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Обратим внимание на то, что не всегда нужно спешить не только с решением уравнения, но и с определением его области допустимых значений. Иногда внимательный взгляд на уравнение позволяет сделать важные выводы, которые делают ненужной большую часть вычислений.

Пример 2.4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x}-\sqrt{x+2}.$$

Решение. Заметим, что квадратный корень есть число неотрицательное. Поэтому левая часть уравнения при всех x неотрицательна. Справа же стоит разность двух неотрицательных чисел, приччм вычитаемое всегда больше уменьшаемого, т.к. $x+2>x$ при всех x. Это означает, что правая часть при всех допустимых значениях x отрицательна, т.е. уравнение решений не имеет.

Нахождение области допустимых значений уравнения — это важный элемент решения, однако бывают случаи, когда нахождение этой области представляет собой процесс более трудочмкий, нежели решение самого уравнения. В этом случае следует отказаться от попытки определить область допустимых значений, но тогда обязательно должна быть проведена проверка для всех найденных решений.

2.3 Основные методы решения. Избавление от радикалов

Для того, чтобы решить иррациональное уравнение, определчнное на некоторой области допустимых значений, необходимо избавиться от иррациональности. Для этого можно использовать различные методы. Например, если уравнение содержит радикал некоторой степени, а подкоренное выражение представляет собой выражение в той же самой степени, то для освобождения от радикалов можно воспользоваться следующими свойствами степеней:

1. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$,
2. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$,
3. $(-a)^{2n}=a^{2n}$,
4. $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$.

Пример 2.5. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x + 3.$$

Решение. Выражение $x^2 - 2x + 1$ всегда неотрицательно, т.к. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Поэтому областью допустимых значений данного уравнения будет вся числовая прямая. Однако, так как левая часть уравнения неотрицательна, то такое же условие необходимо наложить на правую часть этого уравнения, а именно: $x + 3 \geq 0$. Таким образом, решения исходного уравнения должны принадлежать промежутку $[-3, +\infty)$. Так как $\sqrt{a^2} = |a|$ при любом a, следовательно, данное уравнение можно записать в виде

$$|x - 1| = x + 3.$$

Полученное уравнение с модулем имеет единственное решение $x = -1$.

Наиболее стандартным методом решения иррациональных уравнений является освобождение от радикалов путем последовательного возведения обеих частей уравнения в соответствующую степень. Если уравнение содержит несколько радикалов, то имеет смысл предварительно один радикал уединить, т.е. расположить его в одной части уравнения, а всч остальное перенести в другую часть. При возведении уравнения в неччтную степень получается уравнение, равносильное исходному; при возведении уравнения в ччтную степень получается уравнение, равносильное исходному при условии, что его корни удовлетворяют условию совпадения знаков обеих частей исходного уравнения.

Действительно, из равенства $a = b$ следуют равенства

$$a^{2n} = b^{2n},$$
$$a^{2n+1} = b^{2n+1}.$$

Обратно: из равенства

$$a^{2n+1} = b^{2n+1}$$

на множестве действительных чисел следует единственное равенство

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{b^{2n+1}} \text{ или } a = b.$$

Из равенства

$$a^{2n} = b^{2n}$$

следует равенство
$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \sqrt[2n]{b^{2n}} \text{ или } |a| = |b|.$$
Если при этом $ab \geq 0$, то из последнего равенства вытекает, что $a = b$ (так как случай $a = -b$ не удовлетворяет условию $ab > 0$).

Поэтому, если над иррациональным уравнением проводится преобразование, заключающееся в возведении обеих его частей в ччтную степень, то каждый из найденных корней полученного уравнения должен быть проверен: является ли он решением исходного уравнения. Проверка осуществляется непосредственной подстановкой в исходное уравнение каждого из корней полученного уравнения. Если подставляемое число превращает исходное уравнение в верное числовое равенство, то число удовлетворяет исходному уравнению, т.е. является его корнем; в противном случае это число является посторонним корнем. Проверка при таком преобразовании является обязательным элементом решения, без неч решение является неполным, даже если посторонние корни не появились.

Пример 2.6. Решить уравнение
$$\sqrt{3+x} = 3 - x.$$
Решение. Область допустимых значений данного уравнения определяется из условия $3+x \geq 0$, т.е. $x \geq -3$. Возведчм обе части уравнения в квадрат. Получаем:
$$3 + x = 9 - 6x + x^2 \text{ или } x^2 - 7x + 6 = 0$$
. Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 1, x_2 = 6$. Оба корня принадлежат области допустимых значений исходного уравнения, однако проверка показывает, что $x_2 = 6$ — посторонний корень ($\sqrt{9} \neq -3$), а $x_1 = 1$ удовлетворяет уравнению ($\sqrt{4} = 2$).

Однако не всегда проверку легко осуществить. Посторонние корни, которые могли появиться вследствие того, что в процессе решения исходное уравнение возводилось в ччтную степень, могут быть отброшены на основании следующего утверждения:

> если x_0 удовлетворяет уравнению, полученному из исходного возведением в ччтную степень его правой и левой частей, то, для того, чтобы x_0 являлся также и корнем исходного уравнения, необходимо и достаточно, чтобы при подстановке его в исходное уравнение левая и правая его части были бы числами одного знака (безусловно, предполагается, что при этом обе части его имеют смысл).

Пример 2.7. Решить уравнение

$$\sqrt{5+2x} = 4 - x.$$

Решение. Область допустимых значений данного уравнения определяется условием $x \geq -\frac{5}{2}$. Возведчм обе части уравнения в квадрат и получим:

$$5 + 2x = x^2 - 8x + 16 \ \text{ или } \ x^2 - 10x + 11 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 5+\sqrt{14}, x_2 = 5-\sqrt{14}$. Оба полученных корня принадлежат области допустимых значений уравнения, однако $x_1 = 5 + \sqrt{14}$ — посторонний корень, так как $4 - x_1 < 0$, в то время как $x_2 = 5 - \sqrt{14}$ удовлетворяет уравнению $(4 - x_2 > 0)$.

Возведение в степень обеих частей уравнения — один из стандартных способов избавления от иррациональности, но не единственный. Рассмотрим пример, показывающий, как иногда можно избавиться от квадратных радикалов, не возводя уравнение в квадрат (или почти не возводя).

Пример 2.8. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+5x+3} - \sqrt{x^2+3x+2} = 2x + 1.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на сумму корней, получим:

$$\begin{aligned}&(\sqrt{x^2+5x+3} - \sqrt{x^2+3x+2})(\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2}) = \\ &= (2x+1)(\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2}).\end{aligned}$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$2x + 1 = (2x+1)(\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2})$$

или

$$(2x+1)(\sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2} - 1) = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, следовательно, данное уравнение распадается на два уравнения, а именно:

$$1) 2x + 1 = 0; \quad 2) \sqrt{x^2+5x+3} + \sqrt{x^2+3x+2} = 1.$$

Решением первого уравнение будет $x_1 = -\frac{1}{2}$. Во втором уравнении можно, как обычно, уединить один радикал, возвести обе части в квадрат и т.д. А можно поступить иначе. Поскольку мы ищем лишь те корни этого уравнения, которые являются одновременно и корнями исходного, то эти корни должны удовлетворять уравнению, являющемуся их суммой, т.е. уравнению

$$\sqrt{x^2+5x+3} = x+1.$$

Возведчм теперь это уравнение в квадрат и получим:

$$x^2+5x+3 = x^2+2x+1,$$

откуда $x_2 = -\frac{2}{3}$. Проверка показывает, что оба корня являются корнями исходного уравнения. Проверка здесь необходима, поскольку ни из чего не следует, что при найденных значениях подкоренные выражения не будут отрицательными.

2.4 Метод замены неизвестного

Есть ещч один способ избавления от радикалов — это метод вспомогательных неизвестных. Введение нового неизвестного, относительно которого уравнение имеет более простой, легко приводимый к стандартному вид или даже просто упрощающее вид уравнения — важнейший метод решения уравнений любых типов.

Рассмотрим некоторые, наиболее часто встречающиеся замены при решении иррациональных уравнений.

Первая рассматриваемая замена: $y = \sqrt[k]{P(x)}$, где $P(x)$ — многочлен. Чаще всего встречаются задачи, в которых делается замена $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

Прежде, чем перейти к примерам — два совета.

Первый совет: новое неизвестное следует вводить сразу, при первой возможности.

Второй совет: после введения нового неизвестного получившееся уравнение следует полностью решить с этим неизвестным, отбросить, если таковые появились, лишние корни и лишь затем вернуться к первоначальному уравнению.

Пример 2.9. Решить уравнение

$$2x^2-6x+\sqrt{x^2-3x+6}+2 = 0.$$

Решение. Сделаем замену $y = \sqrt{x^2-3x+6}$. Тогда имеем $y \geq 0$ и

$$x^2-3x = y^2-6$$

. Получаем уравнение относительно y:

$$2y^2 + y - 10 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $y_1 = 2, y_2 = -\frac{5}{2}$. Однако y_2 не удовлетворяет условию $y \geq 0$, поэтому этот корень в дальнейшем не рассматриваем. Возвращаемся теперь к x:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 2.$$

Это уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: числа 1 и 2.

Пример 2.10. Найти произведение корней уравнения:

$$\sqrt{49x^2 + 32} - 2\sqrt[4]{49x^2 + 32} = 3.$$

Решение. Очевидно, что область допустимых значений данного уравнения — вся числовая прямая. Сделаем замену

$$y = \sqrt[4]{49x^2 + 32}.$$

Заметим, что $y \geq 0$. Так как

$$\sqrt{49x^2 + 32} = (\sqrt[4]{49x^2 + 32})^2,$$

то исходное уравнение можно записать как уравнение относительно y следующим образом:

$$y^2 - 2y = 3.$$

Это уравнение имеет два корня: $y_1 = 3, y_2 = -1$, приччм второй корень, очевидно, не подходит, так как не удовлетворяет условию $y \geq 0$. Таким образом, получаем следующее уравнение относительно x:

$$\sqrt[4]{49x^2 + 32} = 3.$$

Возведчм обе части уравнения в четвчртую степень и получим:

$$49x^2 + 32 = 81.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 1, x_2 = -1$. Подставим эти корни в исходное уравнение и увидим, что они оба ему удовлетворяют. Следовательно, произведение корней исходного уравнения равно -1.

♦

Иногда при решении иррациональных уравнений бывает полезна тригонометрическая замена.

Пример 2.11. Решить уравнение

$$x + \frac{2x}{\sqrt{2 + x^2}} = \sqrt{2}.$$

Решение. Покажем, что знак левой части уравнения совпадает со знаком x. Для этого запишем левую часть уравнения в виде:

$$x\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2 + x^2}}\right) = \sqrt{2}.$$

Так как выражение в скобках положительно для любого значения x, следовательно, при $x > 0$ вся левая часть уравнения положительна, а при $x < 0$ — отрицательна. Поскольку правая часть уравнения положительна, следовательно, значение неизвестной x также должно быть положительно, т.е. $x > 0$. Положим $x = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t$, где $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Сделав эту подстановку, получим тригонометрическое уравнение

$$\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t + \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t}{\frac{\sqrt{2}}{\cos t}} = \sqrt{2}$$

или

$$\sqrt{2}(\cos t - \sin t) = \sin 2t.$$

В указанных пределах изменения t, очевидно, что $\sin 2t > 0$. Поэтому должно быть: $\cos t - \sin t > 0$. Это условие выполняется только на промежутке $0 < t < \frac{\pi}{4}$, т.е. $\mathrm{tg}\,t < 1$. После возведения уравнения в квадрат при указанных ограничениях на $\mathrm{tg}\,t$ получим равносильное уравнение

$$2(1 - \sin 2t) = \sin^2 2t.$$

Сделаем замену неизвестной, обозначив $y = \sin 2t$. Получаем следующее квадратное уравнение относительно y:

$$y^2 + 2y - 2 = 0,$$

причцм новая неизвестная y должна удовлетворять условию $0 < y < 1$. Решим это уравнение и найдем его корни: $y_1 = \sqrt{3} - 1, y_2 = -\sqrt{3} - 1$.

Очевидно, что $0 < y_1 < 1$, а $y_2 < -1$, поэтому корень y_2 не подходит. Вернувшись к неизвестной t, получаем уравнение:

$$\sin 2t = \sqrt{3} - 1.$$

Так как $\sin 2t = \dfrac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$, то это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{2 \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{3} - 1.$$

Обозначим $z = \operatorname{tg} t$ и получим квадратное уравнение

$$z^2 - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} z + 1 = 0,$$

приччм $0 < z < 1$. Это уравнение имеет два корня:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\sqrt{3} - 1} \quad \text{и} \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\sqrt{3} - 1}.$$

Легко убедиться, что $z_1 > 1$, а $0 < z_2 < 1$, т.е. корень z_1 не подходит. Таким образом, получаем, что

$$\operatorname{tg} t = \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\sqrt{3} - 1}.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень

$$x = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\sqrt{3} - 1}. \qquad \Diamond$$

Достаточно распространчнным методом решения иррациональных уравнений является метод сведения иррационального уравнения к системе алгебраических уравнений. В принципе любое иррациональное уравнение путчм введения нескольких вспомогательных неизвестных можно заменить равносильной рациональной системой. Но к этому причму следует прибегать лишь в случае, когда получающаяся рациональная система может быть решена известными причмами.

Пример 2.12. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}.$$

Решение. Область допустимых значений данного уравнения определяется условием $x \geq 1$. Положив $y = \sqrt[3]{2-x}$ и $z = \sqrt{x-1}$, получаем равносильную рациональную систему

$$\begin{cases} 2 - x = y^3, \\ x - 1 = z^2, \\ y = 1 - z. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения системы x: $x = 1 + z^2$, а из третьего уравнения y: $y = 1 - z$. Подставим их в первое уравнение системы и получим следующее уравнение:

$$1 - z^2 = (1 - z)^3.$$

Преобразуем его:

$$(1-z)(1+z) = (1-z)^3 \Longleftrightarrow (1-z)(z^2 - 3z) = 0 \Longleftrightarrow z(1-z)(z-3) = 0.$$

Решив его, найдем корни: $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 3$. Все эти корни удовлетворяют условию $z \geq 0$ и, следовательно, годятся. Теперь из соотношения $x = 1 + z^2$ находим корни данного уравнения: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 10$.

Пример 2.13. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x} = 3.$$

Решение. Область допустимых значений этого уравнения — вся числовая прямая. Обозначим: $y = \sqrt[3]{3-x}, z = \sqrt[3]{6+x}$. Из определения y и z следует, что

$$y^3 + z^3 = (3 - x) + (6 + x) = 9.$$

Таким образом, для y и z имеем симметрическую систему

$$\begin{cases} y + z = 3, \\ y^3 + z^3 = 9. \end{cases}$$

Обозначим теперь: $u = y + z, v = yz$. Тогда

$$y^3 + z^3 = (y+z)(y^2 - yz + z^2) = (y+z)((y+z)^2 - 3yz) = u(u^2 - 3u).$$

Таким образом, система будет иметь вид:

$$\begin{cases} u = 3, \\ u(u^2 - 3v) = 9. \end{cases}$$

Решим ećų и найдем значения u и v:

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2. \end{cases}$$

Вернčмся к неизвестным y и z:

$$\begin{cases} y + z = 3, \\ yz = 2. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$y_1 = 1, z_1 = 2 \quad \text{и} \quad y_2 = 2, z_2 = 1.$$

Так как $x = z^3 - 6$, то неизвестная x также имеет два значения: $x_1 = 2, x_2 = -5$.

2.5 Системы иррациональных уравнений

При решении систем иррациональных уравнений используются те же самые методы, что и при решении любых других систем, а именно метод исключения неизвестных и метод замены неизвестных.

Пример 2.14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x + 3y} + \sqrt{5 - x - y} = 7, \\ 3\sqrt{5 - x - y} - \sqrt{2x + y - 3} = 1. \end{cases}$$

Решение. Обозначим:

$$u = \sqrt{2x + 3y}, \;\; v = \sqrt{5 - x - y}, \;\; w = \sqrt{2x + y - 3}.$$

Отсюда имеем:

$$u^2 = 2x + 3y, \;\; v^2 = 5 - x - y, \;\; w^2 = 2x + y - 3.$$

Можно проверить, что $u^2 + 4v^2 + w^2 = 17$. Таким образом, для u, v и w получаем систему

$$\begin{cases} 2u + v = 7, \\ 3v - w = 1, \\ u^2 + 4v^2 + w^2 = 17. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений находим:

$$u = \frac{7-u}{2}, \quad w = 3v - 1.$$

Подставляя эти выражения в третье уравнение, получим для v квадратное уравнение

$$53v^2 - 38v - 15 = 0,$$

корни которого: $v_1 = 1, \quad v_2 = -\frac{15}{53}$.

По условию $v \geq 0$, значит уравнение имеет единственное решение $v = 1$. Подставив найденное значение в выражения для v и w, получим: $u = 3, w = 2$. Вернчмся теперь к переменным x и y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ 5 - x - y = 1. \end{cases}$$

Отсюда $x = 3, y = 1$.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение $x = 3, y = 1$.

Контрольный вопрос 8. Какие уравнения называются иррациональными?

Контрольный вопрос 9. Назовите основные методы решения иррациональных уравнений и дайте их краткую характеристику.

Контрольный вопрос 10. Являются ли равносильными уравнения

$$\sqrt{(x+1)^2} = 5 \quad \text{и} \quad x + 1 = 5?$$

Контрольный вопрос 11. В каких случаях проверка является обязательным элементом решения иррационального уравнения?

2.6 Уравнения с параметрами

Пример 2.15. Решить уравнение

$$\sqrt{a + \sqrt{a+x}} = x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a + \sqrt{a+x} = x^2, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

которая в свою очередь равносильна системе

$$\begin{cases} a + x = (x^2 - a)^2, \\ x^2 - a \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение последней системы является уравнением четвчртой степени относительно x и уравнением второй степени относительно a. Переписав его в виде

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0,$$

разложим левую часть на множители. Дискриминант квадратного трчхчлена относительно a равен

$$(2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Далее: $\sqrt{(2x+1)^2} = |2x + 1| = 2x + 1$, так как $x \geq 0$. Следовательно, квадратное уравнение относительно a имеет два корня

$$a_1 = \frac{(2x^2 + 1) + (2x + 1)}{2}, \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{(2x^2 + 1) - (2x + 1)}{2}$$

и может быть записано в виде

$$(a - \frac{(2x^2 + 1) + (2x + 1)}{2})(a - \frac{(2x^2 + 1) - (2x + 1)}{2}) = 0$$

или

$$(a - (x^2 + x + 1))(a - (x^2 - x)) = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = a, \\ x^2 - a \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x = a, \\ x^2 - a \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

т.е. совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 - a = -x - 1, \\ -x - 1 \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - a = x, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Первая система совокупности решений не имеет. Рассмотрим вторую систему совокупности. Дискриминант квадратного уравнения в этой системе равен $1+4a$, значит при $a<-\dfrac{1}{4}$ уравнение решений не имеет. Таким образом, вторая система совокупности равносильна системе

$$\begin{cases} (x-\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2})(x-\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2})=0, \\ x\geq 0, \\ a\geq -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Заметим, что если $a>0$, то

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>0, \ \ x_2=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0,$$

т.е. второй корень не удовлетворяет условию $x\geq 0$ и должен быть отброшен. Если $-\dfrac{1}{4}\leq a\leq 0$, то

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>0, \qquad \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\geq 0,$$

приччм, если $a=-\dfrac{1}{4}$, то

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

при $a>0$ система имеет единственное решение $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$,

при $a=-1/4$ система также имеет единственное решение $x=\frac{1}{2}$,

а при $-1/4<a\leq 0$ решений будет два: $x_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$).

Ответ: при $a<-\dfrac{1}{4}$ исходное уравнение решений не имеет;

при $a=-\dfrac{1}{4}$ и при $a>0$ уравнение имеет единственное решение $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$;

при $-\dfrac{1}{4}<a\leq 0$ уравнение имеет два решения:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

И, в заключение, рассмотрим задачу, в которой требуется решить уравнение, являющееся одновременно и иррациональным уравнением и уравнением, содержащим неизвестную под знаком модуля.

Пример 2.16. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a.$$

Решение. В левой части уравнения находится корень ччтной степени, значение которого, как известно, неотрицательно. Поэтому левая часть уравнения при всех допустимых значениях неизвестного неотрицательна. Следовательно, при $a < 0$ уравнение решений не имеет. Рассмотрим теперь случаи, когда $a \geq 0$. При $a = 0$ уравнение принимает вид:

$$\sqrt{2|x| - x^2} = 0.$$

Это уравнение равносильно уравнению $2|x| - x^2 = 0$. Это уравнение — уравнение с модулем. Его можно решить любым из изложенных выше методов. Например: так как $x^2 = |x|^2$, то данное уравнение может быть записано в виде

$$2|x| - |x|^2 = 0, \Longleftrightarrow |x|(2 - |x|) = 0,$$

откуда находим три корня данного уравнения: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$.

Пусть теперь $a > 0$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению

$$2|x| - x^2 = a^2$$

или уравнению

$$|x|^2 - 2|x| + a^2 = 0.$$

Обозначим $y = |x|$. Дискриминант квадратного уравнения

$$y^2 - 2y + a^2 = 0$$

равен $4 - 4a^2$. Поэтому при $a > 1$ это уравнение решений не имеет, при $a = 1$ оно имеет единственное решение $y = 1$ и при $0 < a < 1$ уравнение имеет два решения: $y_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}, y_2 = 1 - \sqrt{1 - a^2}$, приччм оба они при таком значении a неотрицательны.

Вернчмся теперь к уравнению

$$|x|^2 - 2|x| + a^2 = 0.$$

Получаем:

при $a > 1$ уравнение корней не имеет,

при $a = 1$ оно имеет два корня: $x_1 = 1, x_2 = -1$

и при $0 < a < 1$ уравнение имеет четыре корня:

$x_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}, x_2 = -1 - \sqrt{1 - a^2}, x_3 = 1 - \sqrt{1 - a^2}, x_4 = -1 + \sqrt{1 - a^2}$.

Таким образом, исходное уравнение

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a$$

при $a < 0$ и $a > 1$ решений не имеет;

при $a = 0$ имеет три решения: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$;

при $0 < a < 1$ имеет четыре решения:

$$x_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}, \;\; x_2 = -1 - \sqrt{1 - a^2},$$
$$x_3 = 1 - \sqrt{1 - a^2}, \;\; x_4 = -1 + \sqrt{1 - a^2};$$

при $a = 1$ имеет два решения: $x_1 = 1, \;\; x_2 = -1$.

Итак, подведчм итоги. Мы рассмотрели уравнения с модулем, иррациональные уравнения, а также иррациональные уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля. Познакомились с различными методами решения таких уравнений и их систем. И памятуя о том, что "решение задач — практическое искусство, и для того, чтобы научить решать их — необходимо решать их", почаще практикуйтесь в решении самых разных уравнений, и простых, и сложных.

Успехов Вам!

Список литературы

[1] *Задачи по математике. Уравнения и неравенства.* М.: Наука, 1987.

[2] Пойа Д. *Математическое открытие.* М.: Наука, 1976.

[3] Потапов М.Л., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. *Конкурсные задачи по математике.* М.: Столетие, 1995.

[4] Шарыгин И.Ф. *Математика для поступающих в вузы.* М.: Дрофа, 1995.

[5] Шувалова Э.З., Агафонов Б.Г., Богатырчв Г.И. *Повторим математику.* М.: Высшая школа, 1969.

Математика: Уравнения с модулем. Иррациональные уравнения

Модуль № 2 для 10 класса

Учебно-теоретическая часть

Составитель: Татьяна Александровна Осетрова

Редактор: О.Ф.Александрова

Корректура автора

Подписано в печать 25.12.2006. Формат 60x84/16.

Бумага газетная. Печать ризографическая.

Усл. печ. л. 2,5.

Тиражируется на электронных носителях

Адрес в Internet: zensh.ru/resourses

Отдел информационных ресурсов управления информатизации КрасГУ

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 22-05, e-mail: info@lan.krasu.ru

Издательский центр Красноярского государственного университета

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: rio@lan.krasu.ru