И.А. ПАЛИЙ

Задачник по теории вероятностей

СОДЕРЖАНИЕ

I. КОМБИНАТОРИКА

1.1 (18). Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 6, 7, 8, если каждую цифру в любом числе использовать не более 1 раза? ■ 720.

Сколько среди этих чисел будет четных? ■ 480.

1.2 (18). Сколько существует пятизначных чисел? ■ 90000.

Сколько среди них таких, которые начинаются цифрой 2 и заканчиваются цифрой 4? ■ 1000.

Которые не содержат цифры 5? ■ 52488.

Которые делятся на 5? ■ 18000.

1.3 (12). У Тани есть 20 марок, у Наташи – 30. Сколькими способами можно обменять одну Танину марку на одну Наташину? ■ 600.

Две Таниных на три Наташиных? ■ 771400.

1.4 (18). Сколько чисел, заключающихся между 1000 и 9999, содержат цифру 3? ■ 3168.

1.5 (18). Сколько чисел, больших 5000000, можно составить из цифр 7, 5, 4, 4, 3, 3, 1? ■ 360.

1.6 (18). Сейф запирается цифровым замком, циферблат которого состоит из ста клавиш с цифрами, расположенными по окружности. Для того чтобы открыть сейф, необходимо нажать какие–то три клавиши, причем известно, что между любыми двумя искомыми клавишами располагаются не менее десяти клавиш. Сколько комбинаций из трех клавиш необходимо перепробовать, чтобы заведомо открыть сейф?

■ 469200 – если порядок нажатия клавиш существенен, 78200 – если нет.

1.7 (12). Нужно послать 6 писем. Сколькими способами это можно сделать, если для доставки писем имеются три курьера? ■ 729.

1.8 (18). 10 кресел поставлены в ряд. Сколькими способами на них могут сесть два человека? ■ 90.

Сколькими способами эти два человека могут сесть рядом? ■ 18.

Сколькими способами они могут сесть так, чтобы между ними было, по крайней мере, одно пустое кресло? ■ 72.

1.9 (18). 5 мальчиков и 5 девочек рассаживаются на 10 подряд расположенных мест, причем мальчики садятся на нечетные места, а девочки на четные. Сколькими способами они могут это сделать?

■ 14400.

1.10 (18). В классе 12 девочек и 10 мальчиков. Сколькими способами можно построить их в одну шеренгу, если в ней как все девочки, взятые отдельно, так и все мальчики, взятые без девочек, должны стоять по росту?
■ C_{22}^{12}.

1.11 (18). В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них? ■ 2160.

1.12 (18). 20 пассажиров собираются совершить поездку в двухэтажном автобусе, который вмещает 12 пассажиров внизу и 8 наверху. При этом 4 пассажира не желают ехать внизу, а 5 – наверху. Сколькими способами можно рассадить их по местам в автобусе, если порядок размещения пассажиров по местам как внизу, так и наверху не учитывается?

1.13 (18). В девяти коробках нужно разместить 4 предмета. Сколькими способами можно это сделать, если:

а) в каждой коробке должно быть не более одного предмета? ■ 3024;

б) в каждой коробке может быть любое число предметов? ■ 6561.

1.14 (18). Компания из 20 мужчин разделяется на 3 группы. В первую входят три человека, во вторую – 5, в третью – 12. Сколькими способами они могут это сделать? ■ 7054320.

1.15 (18). Сколькими способами из пяти супружеских пар можно отобрать четырех человек, если:

а) в число отобранных должны входить двое мужчин и две женщины?

■ 100;

б) никакая супружеская пара не должна входить в это число? ■ 80.

1.16 (18). Из двенадцати кандидатов тренер отбирает 5 и составляет из них баскетбольную команду. Два кандидата могут играть центровыми, четверо – только в защите, а остальные – только в нападении. Предполагается, что баскетбольная команда состоит из одного центрового, двух защитников и двух нападающих. Сколькими способами тренер может составить команду? ■ 180.

1.17 (18). Из группы в 20 солдат каждую ночь выделяется наряд, состоящий из трех человек. Сколько ночей подряд командир может выделять наряд, не совпадающий ни с одним предыдущих? ■ 1140.

Сколько раз, при этом, в наряд пойдет какой–то определенный солдат? ■ 171.

1.18 (18). В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп, если в подгруппу входит не менее двух человек? ■ 502.

1.19. Из двадцати человек, которые должны сдавать экзамены, 10 должны явиться к девяти часам утра, остальные к одиннадцати. Если 7 человек определенно хотят быть в первой группе, 5 – во второй, а две подружки не возражают быть в любой из групп, но только обязательно вместе, то сколькими способами староста может распределить студентов по группам? ■ 26.

1.20 (12). Сколько всего способов разложить 10 одинаковых монет по двум карманам? ■ 11.

Сколько среди них таких, когда оба кармана не пусты? ■ 9.

Те же вопросы, если карманов 3. ■ 66; 36.

Сколько есть способов разложить 10 разных монет по двум карманам? ■ 1024.

Сколько среди них таких, когда оба кармана не пусты? ■ 1022.

Те же вопросы, если карманов 3. ■ 59049; 55980.

1.21 (18). Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова *«перестановка»*? ■ 119750400;

Сколько из них начинается с буквы *«к»* и оканчивается на *«а»*? ■ 1814400.

1.22 (18). Найти число перестановок, образованных из всех цифр числа 2233344455. ■ 25200.

1.23 (18). Предприятие может предоставить работу по одной специальности четырем женщинам, по другой – пяти мужчинам, по третьей – трем работникам, независимо от их пола. Сколькими способами можно заполнить эти вакансии, если имеются 18 претендентов – 8 женщин и 10 мужчин? ■ 1481760.

В задачах 1.24 – 1.26 *«словом»* называется любое размещение букв.

1.24 (18). Доказать, что число трехбуквенных слов, которые можно образовать из букв, составляющих слово *«гипотенуза»*, равно числу всех возможных перестановок букв, составляющих слово *«призма»*.

■ $A_{10}^{3} = 6!$

1.25 (18). Сколько слов, состоящих из двух гласных и двух согласных, можно образовать из слова *«функция»*? ■ 432.

1.26 (2). Сколько перестановок можно образовать из слова *«зоология»*? ■ 6720.

Сколько таких слов, в которых буквы «О» стоят рядом? ■ 720.

1.27 (7). Сколько всего есть матриц, в которых 3 строки и 5 столбцов, если элементы матрицы выбираются из множества $\{0, 1\}$?■ 32768.

Сколько среди них матриц с попарно различными строками? ■ 29760**.**

1.28 (23). Цветочница продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз? ■ 1365.

1.29 (18). Сколькими способами можно расставить на полке 7 книг, если: а) две определенные книги всегда должны стоять рядом? ■ 1440;
б) эти две книги не должны стоять рядом? ■ 3600.

1.30 (18). Сколькими различными способами из восьми книг можно отобрать несколько, но не менее трех? ■ 219.

1.31 (18). На окружности выбрано 10 точек. Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? ■ 45. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках? ■ 120. Сколько выпуклых десятиугольников?
■ 1.

Сколько самопересекающихся десятиугольников? ■ 181439.

1.32 (18). Сколько существует диагоналей у выпуклого двадцатиугольника? ■ 170.

Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, в котором можно провести 35 различных диагоналей? ■ 10.

1.33 (18). Сколькими способами три различных подарка A, B и C можно вручить трем из пятнадцати лиц, если никто не должен получить более одного подарка? ■ 2730.

Если подарок A должно получить вполне определенное лицо? ■ 182.

1.34 (18). Между тремя лицами – A, B, C – нужно распределить 15 различных предметов, причем A должен получить 2 предмета, B – три, а C – 10. Сколькими способами можно выполнить это распределение? ■ 30030.

1.35 (18). Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр, причем никакая цифра не входит в число более одного раза? ■ 28800. Сколько среди них таких, в которых как четные цифры, взятые отдельно, так и нечетные цифры, взятые отдельно, расположены в порядке убывания? ■ 800.

1.36 (18). Сколько различных маршрутов может избрать пешеход, решив пройти 9 кварталов, 5 из них – на запад и 4 – на север? ■ 126.

1.37 (12). В библиотеке есть 5 учебников геометрии, 7 учебников тригонометрии, 4 учебника алгебры. Сколько полных комплектов учебников можно составить? ■ 4. Сколько всего различных способов комплектования, если все экземпляры учебников считать различными?
■ 2419200.

1.38. В студенческой столовой на обед предлагаются: 3 салата, 2 первых блюда, 4 вторых, в том числе котлеты и рыба, 3 напитка, в том числе томатный сок. Сколькими способами студент может составить обед из четырех блюд: салат, первое, второе, напиток, если котлет он опасается, а рыбу запивает только томатным соком? ■ 42.

1.39 (18). В течение десяти недель студенты сдают 10 экзаменов, в том числе два по математике. Сколькими способами можно распределить экзамены по неделям так, чтобы экзамены по математике не следовали один за другим? ■ 2903040.

1.40 (18). Студенту необходимо сдать 4 экзамена в течение десяти дней. Сколькими способами можно составить ему расписание экзаменов? ■ 5040.

1.41 (18). Сколько сигналов можно поднять на мачте, имея 4 флага различных цветов, если каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флагов? ■ 60.

1.42 (18). Концерт состоит их трех песен и двух скрипичных пьес. Сколькими способами можно составить программу концерта так, чтобы он начинался и оканчивался исполнением песни, и чтобы скрипичные пьесы не исполнялись одна за другой? ■ 12.

1.43 (18). В соревнованиях по баскетболу команды A и B играют между собой несколько игр до тех пор, пока одна из команд не выиграет четыре игры. Составляется последовательность наименований команд, выигравших игры; например, последовательность $ABABBB$ означает, что первую и третью игры выиграла команда A, остальные – команда B. Сколько таких последовательностей можно составить? ■ 70.

1.44 (4). В приемной у зубного врача ожидают своей очереди две женщины и 10 мужчин. Для них имеется 8 экземпляров последнего номера журнала и 4 экземпляра утренней газеты. Сколькими способами могут они распределить газеты и журналы между собой, если обе женщины непременно хотят читать одно и то же? ■ 255.

1.45 (18). Сколькими способами можно расположить в один ряд 5 красных, 4 черных и 5 белых мячей так, чтобы мячи, лежащие на краях, были одного цвета? ■ 72072.

1.46 (23). В один из комитетов парламента нужно отобрать трех членов, причем выбрать нужно из пяти консерваторов, трех лейбористов и четырех либерал-демократов. Сколько различных комитетов можно составить? ■ 220. Тот же вопрос, если в комитет должен входить по крайней мере один либерал-демократ? ■ 164. Если лейбористы и консерваторы не могут одновременно входить в комитет? ■ 115.

Если в комитет должен войти по крайней мере один консерватор и хотя бы один лейборист? ■ 105.

1.47 (23). Сколько существует различных четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи могут присутствовать цифры 0, 1, 2, 3, 6, причем 0 на первом месте стоять не может? ■ 500. Сколько среди них четных чисел (цифру 0 считать четной)? ■ 300. Сколько чисел состоят из двух четных и двух нечетных цифр? ■ 180. Те же вопросы, если все цифры в числе должны быть различны ■ 96; 60; 60..

1.48 (23). Доказать равенство: $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$.

1.49. Ведущий игры «Что? Где? Когда?» предлагает приз тому телезрителю, который угадает ход игры по турам. Сколько разных предсказаний можно составить, если в каждом туре победитель получает одно очко, а игра ведется до шести побед одной из двух сторон? ■ 924.

1.50 (2). Имеется n шариков, которые случайным образом разбрасывают по m лункам. Сколько всего есть способов разбросать шарики по лункам? ■ m^n.

Сколько среди них таких, что в первую лунку попадет k_1 шариков, во вторую – k_2 и т.д., в m-ю лунку – k_m шариков, если $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$?

■ $n!/(k_1!k_2!\dots k_m!)$.

Сколько всего способов распределить шарики по лункам, если учитывать только, сколько шариков попало в каждую лунку? ■ C_{n+m-1}^n.

1.51 (24). В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Сколько всего есть способов заказать 4 пирожных? ■ 210. Сколько среди них есть способов заказать пирожные одного вида? ■ 7. Разных видов? ■ 35. По два пирожных разных видов? ■ 21.

1.52 (24). Из множества $1,2,\ldots,n$ последовательно без возвращения выбирают два числа. Сколько всего таких наборов, в которых второе число большего первого? ■ $n(n-1)/2$. Если выбирают три числа, сколько всего наборов, в которых числа следуют в порядке возрастания? ■ C_n^3.

1.53* (11). Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей? ■ 126. Меньше предыдущей?
■ 210.

1.54* (18). Сколькими способами можно выписать в один ряд 9 троек и 6 пятерок так, чтобы никакие две пятерки не стояли рядом? ■ 210.

1.55*. Одному страстному любителю Спортлото «5 из 36» приснился вещий сон – последовательность цифр 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 7, 9, из которых складываются 5 очередных счастливых номеров. Сколько карточек должен заполнить любитель, чтобы гарантировать получение счастливой комбинации? ■ 228.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1.53. Любые k различных цифр можно расположить в порядке возрастания или в порядке убывания единственным образом.

1.54. Если пятерки не стоят рядом, пару 53 можно считать единым элементом. Тогда всего $C_9^6 + C_9^5 = C_{10}^6 = 210$ способов (пятерка может стоять и не стоять на последнем месте).

1.55. Так как всего цифр 9, в карточке должны быть зачеркнуты четыре двузначных числа и одно однозначное. Пусть однозначным числом будет 1. Цифры 4, 7, 9 могут быть только последними цифрами двузначных чисел. Чтобы полностью определить искомые четыре двузначных числа, нужно выполнить пять действий: указать первую цифру числа, оканчивающегося на 4; назвать первую цифру числа, оканчивающегося на 7; задать первую цифру числа, оканчивающегося на 9; определить первую и вторую цифры четвертого двузначного числа. Эти действия задаются перестановкой цифр 1, 1, 2, 3, 3. Например, перестановка 13231 определяет следующие четыре числа: 14, 39, 27, 31. Всего таких перестановок $5!/(2!2!1!)$. Аналогично подсчитывается число вариантов, когда однозначное число равно 2, 3, 4, 7, 9.

II. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ. СОБЫТИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ.

2.1 (5). Относительно каждой из групп событий ответить на следующие вопросы: образуют ли эти события пространство элементарных исходов описанного эксперимента; если образуют, то являются ли они равновозможными; если не образуют, то являются ли они несовместными?

1. Эксперимент – бросание правильной монеты; событие $A_1=\{\text{герб}\}$, $A_2 = \{\text{цифра}\}$. ■ Да, да.

2. Эксперимент – бросание неправильной (например, погнутой) монеты. Те же события A_1, A_2. ■ Да, нет.

3. Эксперимент – бросание двух правильных монет; B_1 = {*два герба*}, B_2 = {*две цифры*}. ■ Нет, да.

4. Эксперимент – бросание двух правильных монет . События: B_1= = {*два герба*}, B_2 = {*две цифры*}, B_3 = {*один герб и одна цифра*}. ■ Да, нет.

5. Эксперимент – бросание двух правильных монет. События: B_1 = = { *герб на первой монете*}, B_2 = {*герб на второй монете*}. ■ Нет, нет.

6. Эксперимент – бросание правильного игрального кубика. События: C_1 = {1 *или* 2 *очка*}; C_2 = {2 *или* 3 *очка*}; C_3 = {3 *или* 4 *очка*}; C_4 = {4 *или* 5 *очков*}; C_5 = {5 *или* 6 *очков*}. ■ Нет, нет.

7. Эксперимент – бросание двух правильных игральных кубиков. События: D_1 = {*две шестерки* }; D_2 = {*ни одной шестерки* }; D_3 = {*на одном кубике* 6 *очков*, *на другом не шесть очков* }. ■ Да, нет.

8. Эксперимент – передача трех сообщений по каналу связи. События: E_1 = {*хотя бы одно сообщение искажено*}; E_2 = {*хотя бы одно сообщение не искажено*}. ■ Нет, нет.

9. Эксперимент – передача трех сообщений по каналу связи. События: E_1 = {*все три сообщения переданы без ошибок*}; E_2 = {*все три сообщения*

передáны с ошибками}; E_3 = {*два сообщения переданы с ошибками, одно без ошибок.* ■ Нет, да.

10. Эксперимент – передача трех сообщений по каналу связи. События: E_1 = {*в первом сообщении есть ошибка*}; E_2 = {*во втором сообщении есть ошибка*}; E_3 = {*в третьем сообщении есть ошибка*}. ■ Нет, нет.

11. Эксперимент – извлечение наугад одной карты из полной колоды. События: F_1 = {*червонная масть*}; F_2 = {*трефовая масть*}; F_3 = {*бубновая масть*}; F_4 = {*пиковая масть*}. ■ Да, да.

12. Эксперимент – извлечение наугад двух карт из полной колоды. События: G_1 = {*обе карты черной масти*}; G_2 = {*среди вынутых карт есть дама треф*}; G_3={*среди вынутых карт есть туз пик*}. ■ Нет, нет.

13. Эксперимент – два выстрела по цели. События: H_1 = {*ни одного попадания*}; H_2 = {*одно попадание*}; H_3 = {*два попадания*}. ■ Да, нет.

14. Эксперимент – эксплуатируются два прибора в течение некоторого времени. События: K_1 = {*первый прибор вышел из строя, второй нет*}; K_2 = {*второй прибор вышел из строя, первый нет*}; K_3={*оба прибора вышли из строя*}; K_4 = {*один прибор не вышел из строя*}. ■ Нет, нет.

В задачах 2.2 – 2.15 дано описание эксперимента. Требуется построить пространство элементарных исходов Ω. Желательно построить несколько различных пространств.

2.2 (18). Бросают три монеты.

2.3 (18). Из букв слова «плюс» выбирают две буквы.

2.4 (18). Из колоды в 52 игральные карты вынимают карты одну за другой до появления первого туза.

2.5 (18). Монету бросают до тех пор, пока либо выпадет герб, либо четыре раза подряд выпадает цифра.

2.6 (18). По жребию из 25 радиоприемников отбирают 3 и затем проверяют. Проверка показывает, исправен приемник, или нет.

2.7 (18). Кубик бросают до тех пор, пока не выпадет два очка.

2.8 (18). У каждого из 25 человек спрашивают день рождения.

2.9 (18). Селекционер скрещивает две породы, каждая из которых обладает парой генов (a, A), каждая из родительских особей передает потомку один из генов; два гена – один отцовский и один материнский – составляют пару генов потомства.

2.10 (18). Бросают монету, а после этого кубик.

2.11 (18). Отрезок делят на три равные части. На этот отрезок наудачу брошены три точки.

2.12. Студент обращается к своему другу с просьбой дать конспект лекций по теории вероятностей: нужно переписать три лекции, которые он нечаянно проспал.

2.13 (18). Два шара – красный и синий – помещают в два ящика, занумерованных числами 1 и 2:

а) оба шара можно положить в один ящик;

б) никакой ящик не должен быть пустым.

2.14 (18). Из пяти различных книг *А*, *В*, *С*, *Д* и *Е* отбирают три. Сколько элементарных исходов соответствуют наборам книг:

а) включающих *А*; б) не включающих *А*; в) включающих *В* и *С*;

г) включающих либо *Д*, либо *В*?

2.15 (18). В семье четверо детей. Отмечают пол каждого ребенка. Сколько элементарных исходов соответствуют семьям, имеющим трех мальчиков и одну девочку? Семьям, в которых первый ребенок девочка?

В задачах 2.16 – 2.21 нужно построить пространство элементарных исходов Ω по описанию эксперимента и подмножества, соответствующих указанным событиям.

2.16 (24). Игральную кость подбрасывают дважды. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших в первый и второй раз. События: *А* = {*оба раза выпало число очков*, *кратное трем*}; *В* = {*ни разу не выпало число* 6}; *С* = {*оба раза выпало число очков*, *большее трех*}; *Д* = {*оба раза выпало одинаковое число очков*}.

2.17 (24). Монету подбрасывают три раза. Наблюдаемый результат – появление герба (*Г*) или цифры (*Ц*) на верхней стороне монеты. События: *А* = {*герб выпал один раз*}; *В* = {*ни разу не выпала цифра*}; *С* = {*выпало больше гербов*, *чем цифр*}; *Д* = {*герб выпал не менее чем два раза подряд*}.

2.18 (24). Монету подбрасывают до первого появления герба. Наблюдаемый результат – общее число подбрасываний. События: A = = {*герб выпал при третьем подбрасывании*}; B = {*герб выпал не ранее*, *чем при третьем подбрасывании*}.

2.19* (24). Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного времени и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат – пара чисел (X, Y), где X – время прихода Петра, Y – время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). События: A = {*Петр пришел после* 11 *часов* 45 *минут*}; B = {*Петр пришел после Ивана*}; C = {*Петр пришел раньше Ивана и не дождался его*}; D = {*Иван пришел до* 11 *часов* 45 *минут*}; E = {*встреча не состоялась*}; F = {*Ивану не пришлось ждать Петра*, *встреча состоялась*}; G = {*встреча состоялась*}; H = {*встреча состоялась после* 11 *часов* 30 *минут*}; I = {*тот*, *кто пришел первым*, *пришел до* 11 *часов* 30 *минут*}.

2.20 (24). Из ящика, содержащего 10 деталей, из которых 3 бракованных, наудачу последовательно и без возвращения извлекают по одной детали до появления бракованной, после чего опыт прекращается. Событие: A = {*придется произвести третье по счету извлечение детали*}.

2.21 (24). Два баскетболиста A и B по очереди бросают мяч в корзину до первого попадания. Выигрывает тот, кто первый забросит мяч в корзину. События: A_i = {*баскетболист A попадает при своем i*–м *броске*};

B_k = {*баскетболист B попадает при своем k*–м *броске*}; A = {*выигрывает A*}; B = = {*выигрывает B*}. Баскетболист A бросает первым.

2.22 (5). На плоскость наудачу бросают точку. События A и B состоят в том, что точка попадает соответственно в круг A и в круг B. какой смысл имеют события: $\overline{A},\ \overline{B},\ A+B,\ \overline{A+B}, AB,\ \overline{AB},\ A\setminus B,\ B\setminus A,\ (A+B)\setminus(AB)$?

■ $\overline{A}$ = {*точка не попала в круг A*}; $\overline{B}$ = {*точка не попала в круг B*}; AB = {*точка попала в оба круга*}; $A + B$ = точка попала хотя бы в один из кругов. $\overline{A+B}$ = {*точка не попала ни в один из кругов*}; $A\setminus B$ = {*точка попала в круг A, но не попала в круг B*}; $B\setminus A$ = {*точка попала в круг B, но не попала в круг A*}; $(A+B)\setminus(AB)=$

= {*точка попала в точности в один из кругов*}.

2.23 (5). Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события:

A = {*обнаружен ровно один объект*}; B = {*обнаружен хотя бы один объект*}; C = {*обнаружено не менее двух объектов*}; D = {*обнаружено ровно два объекта*}; E = {*обнаружено ровно три объекта*}; F = {*обнаружены все четыре объекта*}.

Указать, в чем состоят события: 1) A+B; 2) AB; 3) B+C; 4) BC; 5) D+E+F; 6) BF. Совпадают ли события BF и CF? BC и D?

■ B; A; B; C; C; F; $BF = CF$; $BC \neq D$.

2.24 (5). Ниже указаны события, которые могут произойти в некоторых экспериментах. Требуется назвать противоположные события.

1. Передают два сообщения по каналу связи. Событие A = {*оба сообщения переданы правильно*}.

2. Вынимают один шар из урны, в которой два белых, три черных и четыре красных шара. Событие B = {*появление белого шара*}.

3. Передают пять сообщений. Событие C = {*не менее трех сообщений передано правильно*}.

4. Производят n выстрелов по мишени. Событие D = {*хотя бы одно попадание*}.

5. Производят осмотр технического устройства, состоящего из k узлов. Событие E = {*все узлы исправны*}.

6. Двое играют в шахматы. Событие F = {*выигрыш белых*}.

■ По крайней мере, одно сообщение искажено; появление черного или красного шара; не менее трех сообщений искажено; все n промахов; хотя бы один узел дефектный; выигрыш черных или ничья.

2.25 (24). Пусть событие A влечет событие B, $A \subset B$. Следует ли тогда, что $\overline{A} \subset \overline{B}$? ■ Нет, $\overline{B} \subset \overline{A}$.

2.26 . Около кафедры прикладной математики и вычислительной техники висит стенд с фотографиями сотрудников кафедры. Студент Шалунов пририсовывает наудачу выбранному сотруднику бороду и усы.

События: A = {*выбран кандидат наук*}; B = {*выбран мужчина в галстуке и в очках*}; C = {*выбран блондин*}; D = {*выбрана женщина*}.

1. При каких условиях $AB\overline{C} = A$?

2. Если известно, что среди сотрудников кафедры есть женщины, при каких условиях $A \backslash D = A$?

■ Все кандидаты наук – мужчины в галстуке и очках, не блондины. Среди кандидатов наук нет женщин.

2.27. Несколько студентов пришли повторно сдавать экзамен по теории вероятностей; наудачу выбирают одного из них. Пусть событие A означает, что выбрана девушка, B – выбранный студент не имеет других долгов.

1. При каком условии $AB = A$?

2. Когда будет выполняться равенство $\overline{A} = \overline{B}$? Будет ли оно иметь место, если среди девушек никто не имеет других долгов?

■ Все девушки не имеют других долгов. Когда все девушки не имеют других долгов, а все юноши имеют другие долги.

2.28 (5). Эксперимент состоит в бросании двух монет. События: A = {*герб на первой монете*}; B = {*цифра на первой монете*}; C = {*герб на второй монете*}; D = {*цифра на второй монете*}; E = {*хотя бы один герб*}; F = {*хотя бы одна цифра*}; G = {*один герб и одна цифра*}; H = {*ни одного герба*}; K = {*два герба*}. Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события: $A + C$; AC; FE; $C + E$; CE; BD; $E + K$; $\overline{K}$; $\overline{C}H$; $\overline{F}K$.

■ E; K; G; E; C; H; E; F; H; K.

2.29 (5). По каналу связи передают три сообщения. Каждое из них может быть передано правильно или искажено. Рассматриваются события: $A_к$ = {*к*-е *сообщение передано правильно*}; $\overline{A}_k$ = {*к*-е *сообщение* *искажено*}; $к$ = 1, 2, 3. Выразить с помощью алгебраических операций над событиями A_k; $\overline{A}_k$ следующие события: A = {*все три сообщения переданы правильно*}; B = {*все три сообщения искажены*}; C = {*хотя бы одно сообщение передано правильно*}; D = {*хотя бы одно сообщение искажено*}; E = {*не менее двух сообщений переданы правильно*}; F = {*не более одного сообщения передано правильно*}; G = = {*только третье сообщение передано правильно*}. ■ $A_1A_2A_3$; $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; $A_1 + A_2 + A_3$; $\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$; $A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3$; $\overline{A}_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1\overline{A}_3 + \overline{A}_2\overline{A}_3$; $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

2.30 (2). На рисунках 2.1 – 2.3 приведены схемы электрических цепей. События: $A_к$ = {*элемент к работает*}; C = {*в цепи нет разрыва*}. Выразить события C и $\overline{C}$ через события A_k и $\overline{A}_k$.

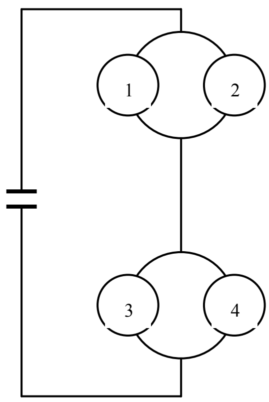

Рис. 2.1

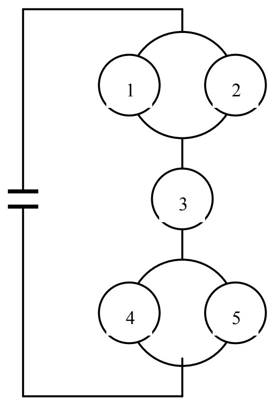

Рис. 2.2

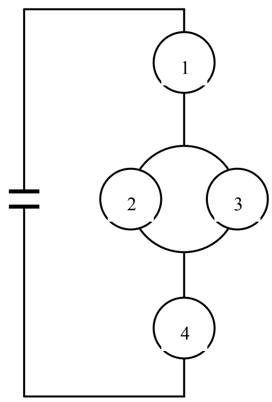

Рис. 2.3

■ $C = (A_1 + A_2)(A_3 + A_4)$; $C = (A_1 + A_2)A_3(A_4 + A_5)$;

$C = A_1(A_2 + A_3)A_4$.

2.31 (25). К механизмам управления автомобилем относятся рулевое управление и две тормозные системы. События: A = {*исправно рулевое управление*}; B_i = {*исправна i–я тормозная система*}; i = 1, 2. Выразить событие C = {*автомобиль работоспособен*}, если оно происходит в том случае, когда исправно рулевое управление и хотя бы одна тормозная система. ■ $C = A(B_1 + B_2)$.

2.32 (2). Точку бросают в квадрат Ω (рис. 2.4). События A, B и C означают соответственно попадание точки в области A, B и C. Что означают следующие события: 1. $A+B+C$; 2. ABC; 3. $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$; 4. $\overline{A}+\overline{B}+C$; 5. $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; 6. $A+B+\overline{C}$; 7. $AB+C$; 8. $\overline{A}\,\overline{B}C$; 9. $A\overline{B}+C$;

10. $(A+C)B$ 11. $A\overline{BC}$; 12. $\overline{ABC}$?

В каждом случае требуется воспроизвести рис. 2.4 и заштриховать соответствующую область.

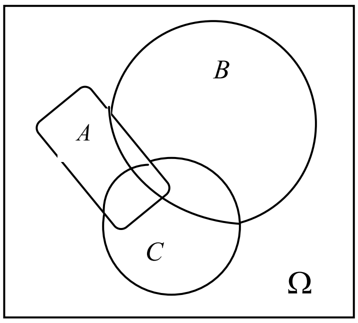

Рис. 2.4

2.33 (2). Эксперимент состоит в бросании трех монет. Пусть A_i = {*герб выпал на i–й монете*}, i = 1, 2, 3. Выразить через A_i и $\overline{A}_i$ следующие события: A = {*выпадение одного герба и двух цифр*}; B = {*выпадение не более одного герба*}; C = *гербов выпало меньше, чем цифр*}; D = {*выпадение хотя бы двух гербов*}; E = {*на первой монете выпал герб*, *на* *остальных – цифра*}; F = {*на первой монете выпала цифра и хотя бы на одной из остальных выпал герб*}.

■ $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$; $B = A + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; $C = B$; $D = \overline{B}$; $E = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; $F = \overline{A}_1(A_2 + A_3)$.

2.34 (2). Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Событие A_i = {*исправен i-й блок первого типа*}; i = 1, 2. B_k = {*исправен k-й блок второго типа*}; k = 1, 2, 3. Прибор работает, если исправен хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C = {*прибор работает*} через события A_i и B_k.

■ $C = (A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)$.

2.35 (2). Стрелок произвел три выстрела по мишени. Событие A_i = {*попадание в мишень при i-м выстреле*}; i = 1, 2, 3. Выразить через A_1, A_2, A_3 следующие события: A = {*хотя бы одно попадание*}; B = {*ровно одно попадание*}; C = {*хотя бы один промах*}; D = {*не менее двух попаданий*}; E = {*три промаха*}; F = {*три попадания*}; G = {*не больше одного попадания*}; H = {*ровно два промаха*}; K = {*попадание не раньше второго выстрела*}. Что означают следующие события: ABC; $A + \overline{B} + \overline{C}$; $\overline{D} \setminus E$; $K(\overline{G} \setminus F)$?

■ $A = A_1 + A_2 + A_3$; $B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$; $C = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$; $D = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3$; $E = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; $F = A_1A_2A_3$; $G = B + E$; $H = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$; $K = \overline{A}_1(A_2 + \overline{A}_2A_3)$; $ABC = B$; $A + \overline{B} + \overline{C} = \Omega$; $\overline{D} \setminus E = B$; $K(\overline{G} \setminus F) = \overline{A}_1A_2A_3$.

2.36* (24). Производят стрельбу по плоской прямоугольной мишени: $|X| \le 2,\ |Y| \le 1$. Элементарный исход – координаты точки попадания в декартовой системе координат. Промах в указанный прямоугольник исключен. События: A = {*абсцисса точки попадания не меньше ординаты*}; B = {*произведение координат точки неотрицательно*}; C = {*сумма модулей координат точки превышает единицу*}. Выявить пары совместных событий. ■ События попарно совместны.

2.37* (24). На отрезке $[a,\ b]$ наудачу ставят точку. Пусть x – координата точки. Затем на отрезке $[a,\ x]$ наудачу ставят еще одну точку с координатой y. Наблюдаемый результат – пара чисел $(x,\ y)$. События: A = {*вторая точка ближе к правому концу отрезка* $[a, b]$, *чем к левому*}; B = = {*расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка*}; C = {*первая точка ближе к левому концу отрезка*, *чем к правому*}; D = = {*первая точка ближе ко второй*, *чем к правому концу отрезка* $[a, b]$}. Выявить пары совместных событий.

■ A и C – несовместны.

В задачах 2.38 – 2.49 доказать справедливость тождеств.

2.38 (2). $(A+B)C = AC + BC$.

2.39 (2). $(A+B)(A+\overline{B}) = A$.

2.40 (2). $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B}) = AB$.

2.41 (24). $(\overline{A}+BC)(\overline{B}+AC)(\overline{C}+AB)=ABC+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

2.42 (24). $AC\setminus B=AC\setminus(BC)$.

2.43 (24). $A\setminus B+A\setminus C=A\setminus(BC)$.

2.44 (24). $A+A=A$; $AA=A$; $A+\varnothing=A$; $A\varnothing=\varnothing$; $A\Omega=A$; $A+\Omega=\Omega$.

2.45 (24). $A+\overline{A}=\Omega$; $\overline{\Omega}=\overline{\varnothing}$; $\overline{\varnothing}=\Omega$; $A\overline{A}=\varnothing$.

2.46 (24). $\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ (правила де Моргана). Обобщить правила де Моргана на произвольное число событий.

2.47 (24). $AB+C=(A+C)(B+C)$ – дистрибутивность сложения относительно умножения.

2.48 (24). $A\setminus B=A\overline{B}$.

2.49 (24). $(A+B)\setminus B=A\setminus AB=A\setminus B=A\overline{B}$.

Замечание: этот пример показывает, что «приведение подобных членов» в алгебре событий недопустимо.

2.50 (24). Пусть A, B и C – события, наблюдаемые в эксперименте, причем A и B несовместны. Показать, что события AC и BC также несовместны.

2.51 (24). Показать, что если $A\subset B$, то выполняются следующие соотношения: $AB=A$; $A+B=B$; $A\setminus B=\varnothing$.

Показать, что из справедливости любого из соотношений следует: $A\subset B$.

2.52 (24). Пусть A и B – события, наблюдаемые в эксперименте. Показать, что событие (A+B) можно разложить на сумму несовместных событий следующими способами:

а) $A+B=A+(B\setminus AB)$;

б) $A+B=AB+A\overline{B}+\overline{A}B$;

в) $A+B=A+B\overline{A}$.

В задачах 2.53 – 2.59 упростить выражения.

2.53 (2). $\overline{\overline{A}+\overline{B}}$. ■ AB.

2.54 (2). $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$. ■ A+B.

2.55 (2). $A\overline{B}+B\overline{C}+ABC$. ■ $A+B+C$.

2.56 (2). $A\cdot\overline{AB}+B$. ■ $A+B$.

2.57 (2). $(A+B)\overline{AB}$. ■ $A\overline{B}+\overline{A}B$.

2.58 (2). $\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+B\right)+\left(A+B\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$. ■ Ω.

2.59 (2). $\left(A+B\right)\left(\overline{A}+B\right)+\left(A+\overline{B}\right)\left(\overline{A}+\overline{B}\right)$. ■ Ω.

В задачах 2.60 – 2.65 доказать истинность утверждений.

2.60 (2). $AB+AC+BC\subset A+B+C$.

2.61 (2). $B\subset A\Rightarrow A\overline{B}+B=A$.

2.62 (2). $AB=\varnothing\Rightarrow(A+B)\overline{B}=A$.

2.63 (2). $A\subset B\Rightarrow AC\subset BC$.

2.64 (2). $AB=\varnothing\Rightarrow\overline{A}\,\overline{B}+B=\overline{A}$.

2.65*(2). $A\overline{B}+\overline{A}B\subset C\Rightarrow A\subset B\overline{C}+\overline{B}C$.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

2.19. Пространство Ω – множество точек квадрата. Координаты (x, y) каждой точки удовлетворяют неравенству $0 \le x, y \le 60$. Событие A составляют точки прямоугольника с координатами $45 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$.

Событию B благоприятствуют такие точки, для которых $x > y$; граница этого множества – диагональ $x = y$.

В событие C входят точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y - x > 15$ и т.д.

Множества, соответствующие описанным в условии задачи событию, изображены на рисунках 2.5а – 2.5и.

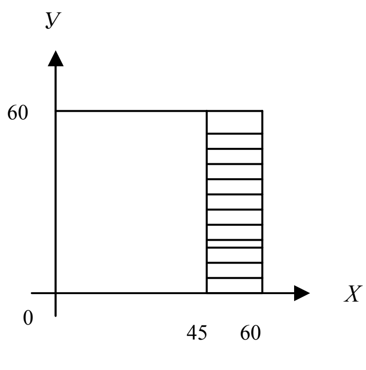

Рис. 2.5а – A

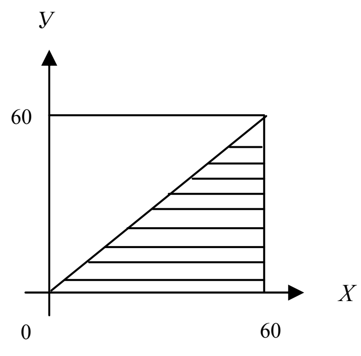

Рис. 2.5б – B

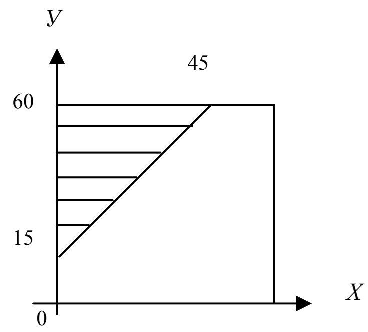

Рис. 2.5д – C

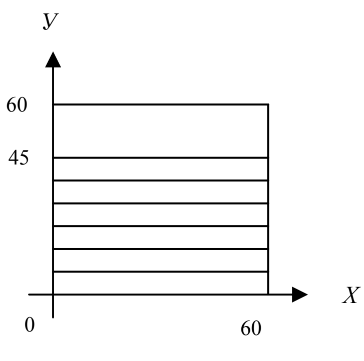

Рис. 2.5в – D

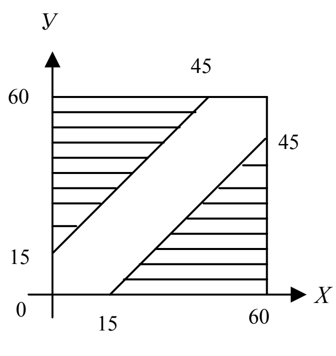

Рис. 2.5г – E

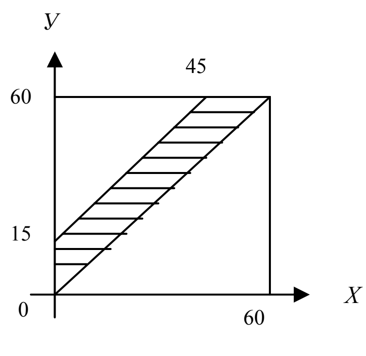

Рис. 2.5е – F

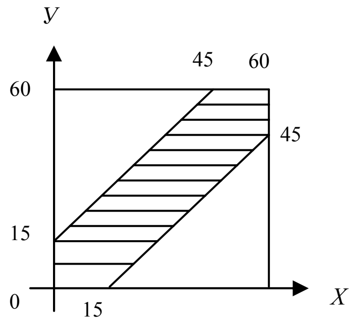

Рис. 2.5ж $-G$

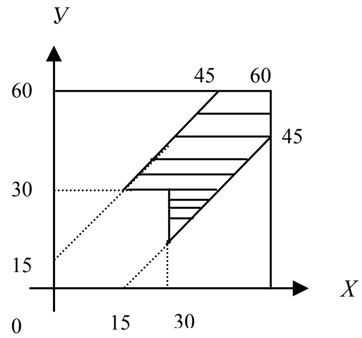

Рис. 2.5з $-H$

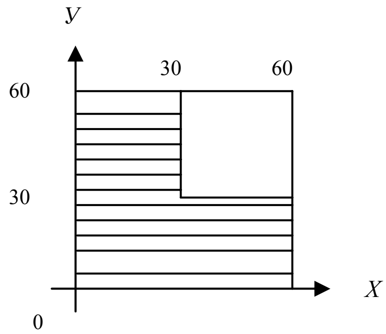

Рис. 2.5и $-I$

2.36. Аналитически множества A, B, C описываются так:

$$A = \{(x,\ y): x \ge y;\ -2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\};$$

$$B = \{(x,\ y): xy \ge 0;\ -2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\};$$

$$C = \{(x,\ y): |x| + |y| \ge 1;\ -2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\}.$$

Эти множества изображены на рисунках 2.6а – 2.6в.

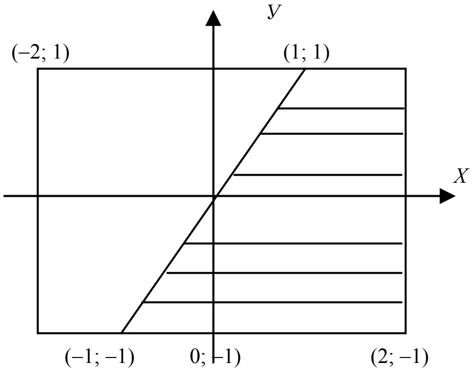

Рис. 2.6а $-A$

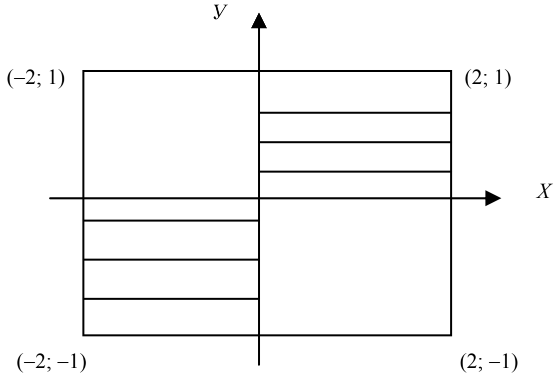

Рис. 2.6б $-B$

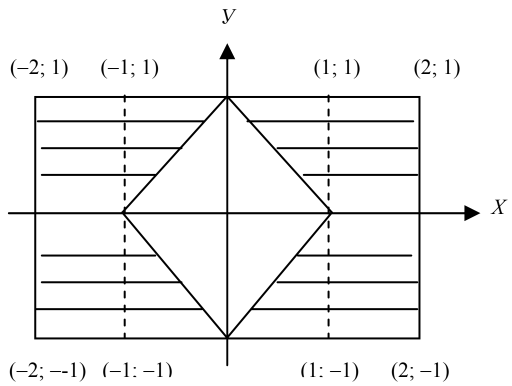

Рис. 2.6в – С

2.37. Ω – это множество точек треугольника, описываемое системой неравенств: $a \le x \le b,\ a \le y \le x$, следовательно:

$A = \{(x,\ y): a \le x \le b,\ c < y \le x\}$; где $c = (a+b)/2$.

$B = \{(x,\ y): a \le x \le b,\ x-(b-a)/2 < y \le x,\ y \ge a\}$;

$C = \{(x,\ y): a \le x \le c,\ a \le y \le x\}$;

$D = \{(x,\ y): a \le x \le b,\ 2x < b + y \le b + x,\ y \ge a\}$. (рис. 2.7а – 2.7г).

2.65. Пусть $A\overline{B} + \overline{A}B \subset C$ и $\omega \in A$. Если $\omega \in \overline{B} \Rightarrow \omega \in A\overline{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega \in C \Rightarrow \omega \in \overline{B}C$. Если $\omega \in B \Rightarrow \omega \notin A\overline{B} + \overline{A}B \Rightarrow \omega \notin C \Rightarrow \omega \in \overline{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega \in B\overline{C}$.

Любой элементарный исход, принадлежащий A, принадлежит также событию $B\overline{C} + B\overline{C}$, $A \subset B\overline{C} + \overline{B}C$.

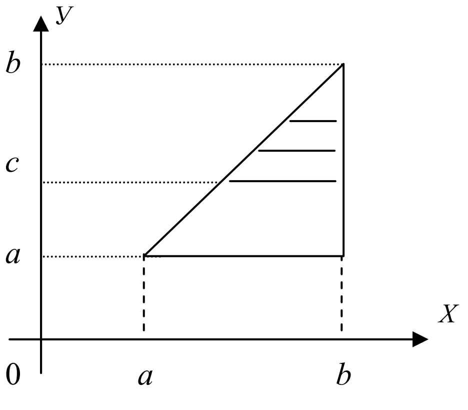

Рис. 2.7а – A

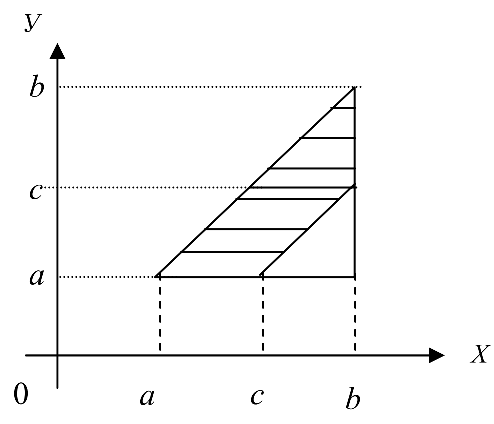

Рис. 2.7а – B

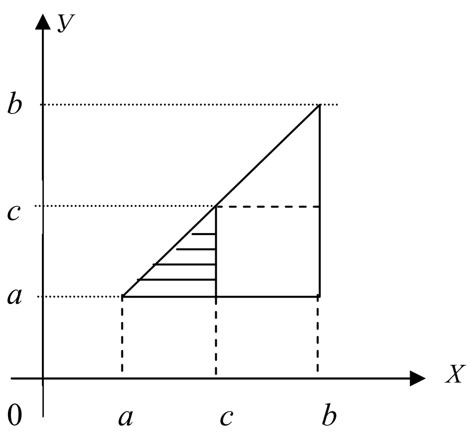

Рис. 2.7в – C

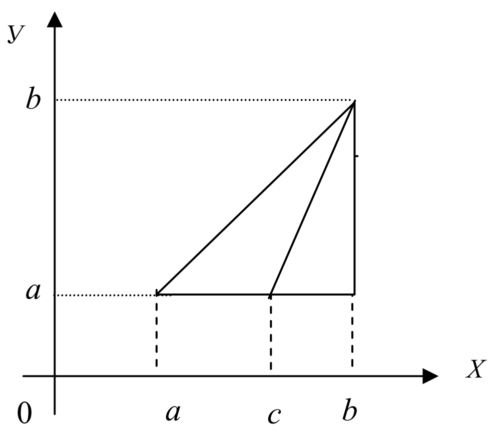

Рис. 2.7г – D

3. КЛАССИЧЕСКОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

3.1 (18). Числа от 1 до 15 написаны на 15 мячах по одному на каждом мяче. Выбирают один мяч.

A = {*число написанное на этом мяче*, *делится на* 5}; ■ 0,2;

B = {*число четное*}; ■ 0,467;

C = {*число нечетное*}; ■ 0,533;

D = {*число является точным квадратом*}; ■ 0,2;

E = {*число двузначное*}; ■ 0,4;

F = {*число простое*}; ■ 0,467;

G = {*число простое*, *причем число*, *меньшее его на два*, *тоже простое*}; ■ 0,267.

3.2 (18). Из чисел 1, 2, …, 10 выбирают два числа. A = {*их сумма четная*}; ■ 0,444.

3.3 (5). На девяти карточках написаны цифры 0, 1, …, 8. Две из этих карточек вынимают и выкладывают на стол в порядке появления, затем читают полученное число.

A = {*число четное*}; ■ 0,556;

B = {*число на второй карточке больше*, *чем на первой*}; ■ 0,5.

3.4 (25). Выбранная кость домино оказалась не дублем.

A = {*вторая взятая кость домино может быть приставлена к первой по правилам игры в домино*}; ■ 0,444.

3.5 (1). Четыре посетителя театра сдали свои шляпы в гардероб одновременно и получили от гардеробщицы номерки. Но после этого она перепутала все шляпы и повесила их наугад.

A = {*каждому из четырех лиц гардеробщица выдаст его собственную шляпу*}; ■ 0,0417;

B = {*ровно три лица получат свои шляпы*}; ■ 0;

C = {*ровно два лица получат свои шляпы*}; ■ 0,25;

D = {*ровно одно лицо получит свою шляпу*}; ■ 0,333;

E = {*ни одно из четырех лиц не получит своей шляпы*}; ■ 0,375.

3.6 (2). Выбрано двузначное число.

A = {*цифры числа одинаковы*}; ■ 0,1;

B = {*число простое и сумма его цифр равна пяти*}; ■ 0,022;

C = {*число составное и имеет простой делитель, больший десяти*}; ■ 0,367;

3.7 (2). Какова вероятность того, что в выбранном трехзначном числе две цифры одинаковые, а третья отлична от них? ■ 0,27.

3.8 (18). Трехзначное число образовано выбором трех неповторяющихся цифр из цифр 1, 2, 3, 4, 5.

A = {*это число − четное*}; ■ 0,4; B = {*нечетное*}; ■ 0,6;

C = {*это число делится на* 5}; ■ 0,2.

3.9 (29). Производится отбор с повторениями трех цифр из множества 0, 1, 2, …, 9.

A = {*все цифры различны*}; ■ 0,72;

B = {*все цифры одинаковы*}; ■ 0,01.

3.10 (25). На восьми одинаковых карточках написаны числа (по одному на каждой карточке) 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Берутся две карточки, A = {*образованная из двух полученных чисел дробь сократима*} ■ 0,357.

3.11 (25). Определить вероятность того, что выбранное целое число окончится единицей при:

а) возведении в квадрат; ■ 0,2;

б) возведении в четвертую степень; ■ 0,4;

в) умножения на фиксированное, но неизвестное целое число. ■ 0,04.

3.12 (2). Из последовательности чисел 1, 2, 3, …, n, выбирают одно за другим два числа. A = {*одно из них больше натурального* k, *а другое меньше* k}; $1 < k < n$ ■ $2(n-k)(k-1)/(n(n-1))$.

3.13 (2). Из множества 0, 1, 2, …, 9 выбрано число q, после чего составлено уравнение $x^2 + 4x + q = 0$. Найти вероятности событий:

A = {*корни уравнение действительны*}; ■ 0,5;

B = {*корни уравнения – рациональные числа*}; ■ 0,3;

C = {*корни уравнения иррациональны*}; ■ 0,2.

3.14 (5). В ящике имеется k одинаковых кубиков с номерами 1, 2, …, k. Из ящика l раз выбирают по одному кубику и записывают его номер, а затем кладут кубик обратно в ящик.

A = {*первый кубик имеет номер* 1, *второй* – 2, *третий* –3}. ■ $1/k^3$.

B = {*все записанные номера различны*}. ■ $A_k^l / k^l \left(l < k \right)$ или 0, если $l > k$.

3.15 (25). Черный и белый короли находятся соответственно на первой и третьей горизонталях шахматной доски. На одно из незанятых полей первой или второй горизонтали ставится белый ферзь. A = ={*образовавшаяся позиция матовая для черного короля, если положения королей равновозможны на любых полях указанных горизонталей*}. ■ 0,0958.

3.16 (2). На шахматную доску ставят две разноцветных фигуры. Какова вероятность того, что они не «бьют» друг друга?

а) для случая двух ладей. ■ 0,778; б) для случая двух ферзей. ■ 0,639;

в) для случая двух слонов. ■ 0,861.

3.17 (18). Бросают две монеты.

A = {*обе монеты упадут гербом кверху*}. ■ 0,25.

B = {*одна монета упадет кверху гербом, другая – цифрой*}. ■ 0,5.

3.18 (2). Игральная кость брошена три раза.

A = {*все выпавшие грани различны*}. ■ 0,556.

3.19 (10). Игральная кость бросается трижды. Пусть x – сумма выпавших очков. Что более вероятно: x=10, 11 или 12? ■ События: {x= = 10} и {x=11} – равновероятны.

3.20 (2). Игральная кость бросается дважды.

Пусть a – число очков, выпавших при первом бросании; b – при втором.

A = {*числа различны*}. ■ 0,833. B = {*числа нечетные*}. ■ 0,25.

$C = \{a < b\}$. ■ 0,417. $D = \{b=2a\}$. ■ 0,083.

E = $\{b = a^2\}$. ■ 0,0556. F = {a + b=5}. ■ 0,111.

$G = \{9 \le a + b \le 12\}$. ■ 0,278. $H = \{a - b=1\}$. ■ 0,139.

$K = \{ab=6\}$. ■ 0,111. L = {$a + b$ – *четно*}. ■ 0,5.

3.21 (2). Игральный кубик брошен k раз $(k \le 6)$.

A = {*на верхней грани появятся все числа* 1, 2, ..., k *по одному разу*};

■ $k!/6^k$.

3.22 (4). Два игрока – A и B – по очереди бросают две игральные кости. Если сумма выпавших очков равна семи, выигрывает A, если восьми – B. У кого из игроков больше шансов на выигрыш? ■ A.

3.23 (18). Дважды бросается пара игральных костей.

A = {*число очков, выпавшее на каждой кости во втором бросании, отличается от числа очков, выпавшего при первом бросании*}. ■ 0,694.

3.24 (2). В урне n белых и m черных шаров. Из нее извлекают один шар.

A = {*извлеченный шар– белый*}. ■ $n/(n+m)$.

3.25 (2). В урне n белых и m черных шаров. Вынутый шар оказался белым. Из урны берут еще один шар.

A = {*этот шар также белый*}. ■ $((n-1)/(n+m-1)$.

3.26 (5). В урне n белых и m черных шаров. Из урны извлекают два шара. A = {*эти шары одного цвета*}. ■ $\dfrac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$.

B = {*шары разного цвета*}. ■ $\dfrac{2mn}{(n+m)(n+m-1)}$.

3.27 (2). В урне 10 шаров. Вероятность того, что два извлеченных шара окажутся белыми, равна 2/15. Сколько в урне белых шаров? ■ 4.

3.28 (2). Имеются две урны. В первой урне a белых и b черных шаров. Во второй c белых и d черных. Из каждой урны извлекают по шару.

A = {*оба шара – белые*}. ■ $ac/[(a+b)(c+d)]$.

B = {*оба шара одного цвета*}. ■ $(ac+bd)/[(a+b)(c+d)]$.

3.29 (2). Выбирается по одной букве из слов «дама» и «мама».

A = {*буквы одинаковы*}. ■ 0,375.

3.30. буквы, составляющие слово «ОТРОК», написаны на пяти карточках, помещенных затем в конверт. Из конверта одну за другой извлекают три карточки.

A = {*три вынутые буквы образуют слово* (*не обязательно существительное*)}. ■ 0,267.

B = {*буквы образуют существительное*}. ■ 0,233.

C = {*из выложенных букв можно сложить, по крайней мере, одно слово*}. ■ 0,7.

D = {*из вынутых букв можно сложить* 3 *слова* (*не обязательно существительных*)}. ■ 0,4.

E = {*из вынутых букв можно сложить одно слово*}. ■ 0,3.

Те же вопросы, если карточка после извлечения возвращается в конверт. ■ 0,160; 0,128; 0,432; 0,240; 0,192.

3.31 (25). Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на 6 секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв. ■ 0,000129.

3.32 (16). Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Определить вероятность того, что извлеченный кубик будет иметь:

а) три окрашенные грани. ■ 0,008.

б) две окрашенные грани. ■ 0,096.

с) одну окрашенную грань. ■ 0,384. г) все грани окрашенные. ■ 0.

3.33 (4). Рассмотреть всевозможные семьи с двумя детьми. Для каждой такой семьи возможны 4 исхода: *ММ*, *МД*, *ДМ*, *ДД*. Если рождение мальчика и девочки равновероятно, то ровно в половине семей число мальчиков совпадает с числом девочек. Справедливо ли это отношение для семей с четырьмя детьми? ■ Нет.

3.34 (18). 7 человек становятся один за другим случайным образом.

A = {*два определенных человека станут рядом*}. ■ 0,286.

B = {*они не станут рядом*}. ■ 0,714.

3.35 (25). Десять книг расставлены на одной полке. A = {*две определенные книги окажутся разделенными тремя книгами*}. ■ 0,133.

3.36 (25). Все номера автомобилей четырехзначные, начиная с 0001, не повторяющиеся, равновозможные. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины:

а) не содержат одинаковых цифр; ■ 0,504;

б) имеет две одинаковые цифры; ■ 0,432;

с) имеет три одинаковые цифры; ■ 0,036;

г) содержит две пары одинаковых цифр; ■ 0, 027;

д) состоит из одинаковых цифр; ■ 0,0009;

е) не содержит двух и более пятерок; ■ 0, 948.

3.38 (24). На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо.

A = {*появится число* 123}. ■ 0,0167.

B = {*появится число, не содержащее цифры* 3}. ■ 0,4.

C = {*появится число, состоящее из последовательных цифр*}.■ 0,3.

D = {*появится четное число*}. ■ 0,4.

E = {*появится число, содержащее хотя бы одну из цифр* – 2 *или* 3}.

■ 0,9.

3.39 (24). Выбирается пятизначное число.

A = {*число одинаково читается как слева направо, так и справа налево, как, например* 13531}. ■ 0,01.

B = {*число кратно пяти*}. ■ 0,2.

C = {*число, состоит из нечетных цифр*}. ■ 0,0347.

3.40. Имеется два множества букв: {*б*, *к*, *с*} и {*о*, *у*}. Из первого множества выбирается буква и помещается во второе. Затем из второго множества выбирается буква и помещается в первое. A = {*из трех букв первого множества можно будет составить трехбуквенное существительное*}. ■ 0,444.

3.41. Из трех букв слова *КОРЫТО* выбирают три буквы.

A = {*из трех выбранных букв можно сложить одно слово*}. ■ 0,2.

B = {*складываются два слова*}. ■ 0,1.

C = {*складываются три слова*}. ■ 0,1.

Все слова трехбуквенные существительные.

3.42. Независимо выбирается по одной букве из множеств $\{г, л, м\}$ и $\{о, у\}$, а затем подсчитывается число трехбуквенных существительных, которые можно составить из оставшихся трех букв. Например, если остались *г*, *о*, *л*, то можно составить два слова – *ГОЛ* и *ЛОГ*. Если известно, что из оставшихся трех букв составляются два слова, то какова вероятность, что из второго множества была выбрана буква *о*? ■ 0,333.

3.43. Числовое множество состоит из трех чисел 2, двух чисел 5, нескольких чисел 10. Из этого множества выбирают одно число. Условная вероятность выбрать 10 при условии, что выбранное число делится на 2, равна 2/3. Сколько всего чисел 10? ■ 6.

Какова вероятность выбрать 10? ■ 0,545.

3.44 (18). В ящике находится 5 книг. Мальчик 5 раз берет из ящика по одной книге, каждый раз возвращая книгу обратно.

A = {*все* 5 *выбранных книг были различны*}. ■ 0,0384.

B = {4 *книги были различны*}. ■ 0,384.

C = {*по крайней мере*, *две книги были различны*}. ■ 0,9984.

3.45 (2). В некоторый день недели во всех классах школы должно быть по 6 уроков. В этот день случайным образом ставятся в расписание 3 урока одного учителя и два урока другого.

A = {*эти учителя не будут заняты одновременно*}. ■ 0,2.

3.46. По условиям некоторой телевизионной игры участник получает суперприз, если правильно угадает последовательность из нулей и единиц, содержащую 5 элементов. Участнику предоставляется возможность ответить на 5 вопросов, за каждый правильный ответ он получает подсказку. Подсказки таковы:

1. В последовательности можно выделить 3 подряд идущих нуля или единицы;

2. Сумма чисел, стоящих на нечетных местах, нечетна;

3. Третья цифра последовательности совпадает с первой;

4. Вторая и пятая цифры различны; 5. Единиц больше, чем нулей.

Каковы шансы на суперприз, если игрок:

а) не дал ни одного правильного ответа. ■ 0,03125.

б) ответил только на первый вопрос. ■ 0,0625.

в) ответил на первый и второй вопросы. ■ 0,125.

г) ответил на второй и пятый вопросы. ■ 0,143.

д) ответил на первые три вопроса. ■ 0,2.

е) ответил на первые четыре вопроса. ■. 0,333.

ж) ответил на последние четыре вопроса. ■ 0,5.

з) ответил на все вопросы. ■ 1.

3.47. Из букв слова *ЗАДАЧА* выбирают три буквы (без возвращения).

$A = \{$*среди выбранных букв две буквы «а»*$\}$. ■ 0,45;

B = {*среди выбранных букв*, *по крайней мере*, *одна буква «а»*}.

■ 0,95;

C = {*среди выбранных букв нет буквы «а»*}.■ 0,05.

3.48 (18). Из партии, содержащей 20 радиоприемников, среди которых 6 неисправных, для проверки отбирают 3 приемника.

A = {*все отобранные приемники исправны*} ■ 0,319.

B = {*все отобранные приемники неисправны*}. ■ 0,0175.

C = {*среди отобранных приемников два исправных*}. ■ 0,479.

3.49 (26). В клубе 100 членов, среди них 50 законоведов и 50 лгунов. Число членов, не являющихся ни законоведами, ни лгунами, ровно 20. Жеребьевкой выбирается комитет из пяти членов.

A = {*в комитет входят ровно* 3 *законоведа*}. ■ 0,319.

B = {*в комитет входят ровно* 3 *лгуна*}. ■ 0,319.

C = {*в комитет входят* 3 *законоведа*, *которые являются лгунами*}.

■ 0,049.

3.50 (25). В лотерее из 200 билетов 50 выигрышных. Найти вероятность получить хотя бы один выигрыш на 5 билетов. ■ 0,836.

Сколько билетов необходимо приобрести, чтобы вероятность выигрыша была не меньше чем 0,5? ■ Не менее трех билетов.

3.51 (24). В лотерее выпущено n билетов, из которых m выигрышных. Куплено k билетов.

A = {*из k билетов хотя бы один выигрышный*}. ■ $1 - C_{n-m}^{k} / C_{n}^{k}$.

B = { *из k билетов ровно один выигрышный* }. ■ $C_m^1 C_{n-m}^{k-1} / C_n^k$.

C = { *из k билетов ровно l выигрышных*}. ■ $C_m^l C_{n-m}^{k-l} / C_n^k$.

3.52 (25). В генуэзской лотерее разыгрывается 90 номеров, из которых выигрывают 5. По условию можно ставить ту или иную сумму на любой из 90 номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров, причем для получения выигрыша должны выиграть все выбранные номера. Какова вероятность выигрыша в каждом из пяти указанных случаев?

■ 0,0556; 0,0025; $8{,}5 \times 10^{-5}$; $1{,}9 \times 10^{-6}$; $2{,}3 \times 10^{-8}$.

3.53 (1). Среди 25 экзаменационных билетов 5 *«хороших»*. Два студента по очереди берут по одному билету.

A = {*первый студент взял «хороший» билет*}. ■ 0,2.

B = {*второй студент взял «хороший» билет*}. ■ 0,2.

C = {*оба студента взяли «хорошие» билеты*}. ■ 0,0333.

3.54 (4). Для обслуживания рейса самолета требуются три стюардессы, которых выбирают по жребию из 20 девушек, претендующих на эти места; 7 из них – блондинки, остальные – брюнетки.

A = {*среди выбранных трех стюардесс*, *по крайней мере*, *одна блондинка и одна брюнетка*}. ■ 0,718.

3.55 (18). Из пяти супружеских пар отбирают четырех человек.

A = {*среди отобранных не будет семейной пары*}. ■ 0,381.

3.56 (18). Комиссия из трех человек выбирается из группы, содержащей 20 человек.

A = {*определенный человек войдет в комиссию*}. ■ 0,15.

B = {*он не войдет в комиссию*}. ■ 0,85.

3.57 (26). В связке галстуков 10 зеленых, 6 красных и 4 желтых галстука. Трое мужчин выбирают себе галстук.

A = {*они выберут галстуки одинакового цвета*}. ■ 0,126.

3.58 (2). Полная колода карт (52 листа) делится на две равные части.

A = {*в каждой части по два туза*}. ■ $C_4^2 C_{48}^{24} / C_{52}^{26}$.

B = {*в одной из частей будет ровно один туз*}. ■ $8C_{48}^{25} / C_{52}^{26}$.

C = {*в одной из частей не будет ни одного туза*}. ■ $2C_{48}^{26} / C_{52}^{26}$.

3.59 (25). Из колоды в 36 карт извлекают три карты.

A = {*сумма очков в этих картах равна* 21} (валету соответствует 2 очка, даме – 3, королю – 4, тузу – 11, а остальным картам соответственно от шести до десяти). ■ 0,079.

3.60 (25). Из колоды в 52 карты извлекают три карты.

A = {*извлечены тройка*, *семерка*, *туз*}. ■ 0,0029.

3.61 (26). Из колоды в 52 карты извлекают 4 карты.

A = {*все выбранные карты бубновой масти*}. ■ $2{,}64\times10^{-3}$.

B = {*все выбранные карты одной масти*}. ■ 0,0106.

C = {*в выборке окажется хотя бы один туз*}. ■ 0,281.

D = {*выбраны валет, дама и* 2 *короля*}. ■ $3{,}55\times10^{-4}$.

E = {*среди выбранных карт есть король пик*}. ■ 0,0769.

F = {*три карты имеют красную масть*}. ■ 0,25.

G = {*все карты – короли*}. ■ $3{,}69\times10^{-6}$.

H = {*в выборке представлены ровно две масти*}. ■ 0,331.

K = {*в выборке представлены три масти*}. ■ 0,584.

L = { *в выборке представлены все масти* }. ■ 0,105.

M = {*выбранные карты – десятка, валет, дама, король разных мастей*}. ■ $8{,}86\times10^{-5}$.

N = {*карты образуют две пары, например, два короля и две десятки, два валета и две шестерки и т.д.*}. ■ $1{,}04\cdot10^{-2}$.

3.62 (2). В урне 2 белых, три синих и 5 черных шаров. Извлечены три шара.

A = {*все шары разного цвета*}. ■ 0,25.

3.63 (2). В урне 5 белых и 5 черных шаров. Все шары последовательно извлечены и расположены в ряд.

A = {*цвета шаров чередуются*}. ■ 0,00794.

В урне n белых и n черных шаров.

B = {*цвета шаров чередуются*}. ■ $2n!n!/(2n)!$.

3.64 (18). *Из букв слова БАРАБАН* выбирают две буквы.

A = {*выбраны буквы «б» и «а»*}. ■ 0,286.

3.65 (2). Из урны, содержащей k шаров, извлекают с возвращением k шаров.

A = {*все шары извлекаются по одному разу*}. ■ $(k-1)!/k^{k-1}$.

3.66 (24). Числа 1, 2, …, 9 записываются в случайном порядке.

A = {*числа будут записаны в порядке возрастания*}. ■ $0{,}276\times 10^{-5}$.

B = {*в ряду чисел будет* 12}. ■ 0,111.

C = {*числа* 3, 6 *и* 9 *будут стоять рядом в произвольном порядке*}.

■ 0,0833.

D = {*на четных местах будут стоять четные числа*}.■ 0,00794.

E = {*сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковых расстояниях от концов, будет равна* 10}. ■ 0,00106.

3.67 (19). Найти вероятность p_n того, что в группе из n человек ($n \le$ $\le$ 365) хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения.

■ $p_n = 1 - 365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-n+1)/365^n$.

Оценить значение p_n для n = 23. ■ 0,507.

Оценить значение p_n для n = 60. ■ 0,994.

Для простоты положить, что 29 февраля не является днем рождения кого-нибудь из рассматриваемой группы людей.

3.68 (19). Вероятность того, что, по меньшей мере, у двух человек из некоторой группы совпадают дни рождения, меньше 0,5. Каково наибольшее возможное число людей в этой группе? ■ 22.

3.69 (19). Вы задались целью найти человека, день рождения которого совпадает с вашим. Сколько незнакомцев вам надо опросить, чтобы вероятность встречи такого человека была не меньше чем 0,5?

■ 253.

3.70 (24). Бросают 10 одинаковых игральных костей.

A = {*хотя бы на одной кости выпадает* 6 *очков.*} ■ 0,838.

B = {*ни на одной кости не выпадает* 6 *очков*}. ■ 0,162.

C = {*ровно на трех костях выпадает* 6 *очков*}. ■ 0,155.

3.71 (18). Бросаются 4 кубика.

A = {*на двух кубиках выпало одинаковое число очков*, *на двух других разное*}. ■ 0,556.

B = {*на двух кубиках одно число очков*, *на двух других – другое*}.

■ 0,0694.

C = {*на всех четырех кубиках выпадает разное число очков*}.

■ 0,278.

3.72 (27). Игроки A и B бросают 5 костей. Если 3 или более из них упадут одинаковой стороной вверх, выигрывает B, в противном случае – A. Каковы шансы игроков? ■ $p_A = 0{,}787$.

3.73 (18). 8 водителей приезжают в город и оставляют свои машины на трех автомобильных стоянках. Каждый водитель вбирает стоянку для своей машины случайным образом.

A = {*5 водителей остановятся на одной стоянке, два на другой и один на третьей*}. ■ 0,154.

3.74 (24). 10 вариантов контрольной работы, написанных на отдельных карточках, перемешиваются и распределяются среди восьми студентов.

A = {*варианты с номерами* 1 *и* 2 *останутся неиспользованными*}.

■ 0,0222.

B = {*варианты* 1 *и* 2 *получат студенты, сидящие рядом*} ■ 0,156.

C = {*выданы варианты с последовательными номерами*}.

■ 0,0667.

3.75 (2). $2n$ команд разбиты на две подгруппы по n команд. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды:

а) попадут в разные подгруппы; ■ $n/(2n-1)$;

б) попадут в одну подгруппу; ■ $(n-1)/(2n-1)$.

3.76 (24). 6 пассажиров поднимаются в лифте семиэтажного дома. Движение лифта начинается с цокольного этажа.

A = {*на первых трех этажах не выйдет ни один из пассажиров*}.

■ 0,0348.

B = {*все пассажиры выйдут на первых шести этажах*}.■ 0,397.

C = {*на пятом, шестом и седьмом этажах выйдут по два пассажира*}. ■ 0,00076.

D = {*все пассажиры выйдут на одном этаже*}. ■ $0{,}55 \times 10^{-4}$.

E = {*все пассажиры выйдут на разных этажах*}. ■ 0,0428.

Подразумевается, что каждый из пассажиров с равной вероятностью может выйти на любом из семи этажей.

3.77 (1). Из всех возможных отображений множества $\{1, 2, ..., n\}$в себя выбирается одно отображение.

A = {*выбранное отображение переводит каждый из n элементов в единицу*}. ■ n^{-n}.

B = {*элемент i имеет k прообразов*}. ■ $C_n^k \cdot (n-1)^{n-k} \cdot n^{-n}$.

C = {*элемент i переводится в j*}. ■ n^{-1}.

D = {*выбранное отображение переводит элементы* i_1, i_2, ..., i_k в элементы j_1, j_2, ..., j_k соответственно}. ■ n^{-k}.

3.78 (16). N человек рассаживаются за круглым столом $(N \geq 2)$.

A = {*два фиксированных лица окажутся рядом*}.■ $2/(N-1)$.

Как изменится ответ, если N человек рассаживаются в произвольном порядке вдоль одной скамьи? ■ $2/N$.

3.79 (24). В комнату, где стоят m стульев $(m \leq n-2)$, входят n человек и рассаживаются так, что все стулья оказываются занятыми.

A = {*два определенных лица окажутся без места*}.

■ $(n-m)(n-m-1)/(n(n-1))$.

B = {*k определенных лиц будут сидеть*}. ■ C_{n-k}^{m-k} / C_n^m.

3.80* (24). Один из студентов группы, пришедший сдавать экзамен по теории вероятностей, плохо посещал семинарские занятия и не научился решать задачи на тему о вероятности сложных событий. К экзамену он успел подготовить ответы на вопросы 10 билетов из 25 и рассуждал так: поскольку большую часть билетов он не знает, то для увеличения шансов сдать экзамен ему следует пропустить впереди себя k человек (k = 25), а затем уже тянуть билет.

Найти значение априорной вероятности p_k того, что этому студенту достанется известный ему билет, если он подойдет к экзаменатору $(k-1)$-м по счету.

■ p_k= 0,4; вероятность p_k не зависит от k.

3.81* (25). В ящике лежат 15 теннисных мячей, из которых 9 мячей – новые. Для первой игры берут три мяча; после игры их возвращают в ящик. Для второй игры также берут три мяча.

A = {*все мячи, взятые для второй игры, новые*}. ■ 0,089.

3.82* (24). В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных.

A = {*пирожные одного вида*}. ■ 0,0333.

B = {*пирожные разных видов*}. ■ 0,167.

C = {*по два пирожных различных видов*}. ■ 0,1.

3.83* (30). (Парадокс второго туза). 52 карты сдают на четверых. Один из игроков объявляет, что среди 13 сданных ему карт есть туз.

A = {среди остальных его карт также имеется туз} ■ 0,3696.

Предположим, что игрок объявил, о наличии среди его карт туза пик.

B = {среди остальных его карт также имеется туз} ■ 0,5612.

3.84* (26). 7 яблок, 3 апельсина и 5 лимонов раскладываются в три пакета, по 5 штук фруктов в каждом.

A = {*в каждом из пакетов по одному апельсину*}. ■ 0,275.

B = {*случайно выбранный пакет не содержит апельсинов*}. ■ 0,264.

3.85* (16). В некоторых сельских местностях России существовало когда-то следующее гадание. Девушка зажимает в руке 6 травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу. Подруга связывает эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все 6 травинок оказываются связанными в одно кольцо, то это должно означать, что девушка в текущем году выйдет замуж.

A = {*травинки при завязывании образуют кольцо*}. ■ 0,533.

Тот же вопрос для случая $2n$ травинок. ■ $2^{n-1}(n-1)!/(2n-1)!!$.

3.86* (5). В урне a белых шаров, b черных, c синих шаров. Из урны последовательно извлекают по одному все шары.

A = {*белый шар появится раньше синего*}. ■ $a/(a+c)$.

3.87* (25). У кассы кинотеатра стоят в очереди $2n$ человек. Среди них n человек имеют деньги только 100–рублевого достоинства, а остальные 50–рублевого. Билет стоит 50 рублей. Каждый покупатель покупает по одному билету. В начальный момент в кассе нет денег.

A = {*ни один покупатель не будет ждать сдачу*} . ■

$1/(n+1)$.

3.88* (24). Среди m человек распределяют n различных предметов; каждый может получить любое число предметов.

A = {*все предметы достанутся одному человеку*}. ■ $1/m^{n-1}$.

B = {*определенное лицо не получит ни одного предмета*}.

■ $((m-1)/m)^n$.

C = {*определенные* m_1 *лиц получает по одному предмету*}.

■ $(m-m_1)^{n-m_1} A_n^{m_1} / m^n$.

D = {n_1 *предметов достанутся одному из участников*}.

■ $C_n^{n_1}(m-1)^{n-n_1} / m^{n-1}$.

E = {*первый человек получает* n_1 *предметов*, *второй* – n_2, m-ый – n_m *предметов*}, $n_1+n_2+...+n_m=n$. ■ $C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} ... C_{n_m}^{n_m} / m^n$.

F = {*один человек получит* n_1 *предметов*, *один* – n_2 *предметов*,..., *один* – n_m *предметов*} $n_1+n_2+...+n_m=n$.

■ $m! C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} ... C_{n_m}^{n_m} / m^n$.

3.89* (16). Каждая из n палок ломается на две части – длинную и короткую. Затем $2n$ полученных обломков объединяются в n пар.

A = {*в каждой паре обломки одной палки*}. ■ $1/(2n-1)!!$.

B = {*в каждой паре есть длинный и короткий обломки*}.

■ $n!/(2n-1)!!$.

3.90* (27). На автомобильной стоянке 12 мест расположены в один ряд. На стоянке находится 8 автомашин, 4 свободных места примыкают друг к другу. Является ли такое расположение свободных мест указанием на отсутствие случайности? ■ Да.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

3.80. Примем за элементарный исход номер билета, выбранного студентом. Исходы равновозможны.

3.81. $n = C_{15}^3 C_{15}^3$; $m_A = C_6^3 C_9^3 + C_6^2 C_9^1 C_8^3 + C_6^1 C_9^2 C_7^3 + C_9^3 C_6^3$.

3.82. Элементарный исход – сочетание с повторениями из семи элементов по четыре; $n = f_7^4 = C_{10}^6 = 210$; $m_1 = 7$; $m_2 = C_7^4 = 35$; $m_3 = C_7^2$.

3.83. $n_1 = C_{52}^{13} - C_{48}^{13}$; $n_2 = C_{51}^{12}$; $m_1 = C_{52}^{13} - C_{48}^{13} - 4C_{48}^{12}$; $m_2 = C_{51}^{12} - C_{48}^{12}$.

3.84. Элементарный исход можно описать так: какие именно 5 фруктов положены в первый наудачу выбранный пакет; какие 5 фруктов положены во второй наудачу выбранный пакет; какие 5 фруктов положены в оставшийся пакет. Тогда:

$n = C_{15}^5 C_{10}^5 C_5^5$; $m_A = C_{12}^4 C_3^1 C_8^4 C_2^1 C_4^4 C_1^1$; $m_B = C_{12}^5 C_{10}^5 C_5^5$.

3.85. Пусть верхние концы травинок уже связаны. Число способов связать нижние концы так, чтобы образовалось кольцо, равно:

$$m = (2n-2)(2n-4)\times \ldots \times 4 \times 2 = 2^{n-1}(n-1)!.$$

Способ связывания можно описать так: перенумеруем нижние концы травинок и зададим в произвольном порядке пары номеров связанных концов.

3.86. Перенумеруем белые и синие шары. Элементарный исход – номер первого из вынутых пронумерованных шаров, исходы равновозможны.

3.87. Укажем общее решение, когда в очереди стоят $m+n$ человек; у n из них есть 50–рублевые банкноты, другие m имеют 100–рублевые банкноты.

Найдем число способов размещения $m+n$ человек в очереди $(m<n)$ так, чтобы ни один покупатель не ждал сдачи. Обозначим это число m_1. Каждый способ размещения покупателей можно записать в виде последовательности из m единиц и n нулей, где единица на i-ом месте означает, что i-ый человек имеет 100-рублевую банкноту, а нуль означает наличие 50-рублевой банкноты. Таких последовательностей $C_{m+n}^{n} = C_{m+n}^{m}$ штук. Например, если $n=4$, $m=2$, то $C_6^4 = 15$.

Чтобы каждый покупатель не ждал сдачи, любой отрезок последовательности, левый конец которого совпадает с началом последовательности, должен содержать нулей не меньше, чем единиц.

Когда $m = 2,\ n = 4$, таким свойством обладают, например, последовательности 001100, 010100, 000101.

Наоборот, если число единиц превосходит число нулей, кому-то придется сдать сдачу. Если последовательность начинается с единицы, первый покупатель ждет сдачу. В случае последовательности 011000 сдачу ждет третий покупатель.

Подсчитаем в общем случае число последовательностей, когда кому-нибудь не повезет; обозначим это число m_2. Просмотрим такую последовательность с начала до того места, когда первый раз число единиц превзойдет число нулей (дойдем до первого человека, которому придется ждать). Эту часть последовательности оставим без изменения, а в остальном куске все единицы заменим нулями, а все нули – единицами. Например, последовательность 100010 превратим в последовательность 111101, а последовательность 011000 станет последовательностью 011111.

Если в неизмененном куске последовательности было x нулей и, следовательно, $(x+1)$ единиц, то в измененной части единиц будет $(n-x)$, а нулей – $(m-x-1)$. Всего во вновь полученной последовательности $(m-1)$ нулей и $(n+1)$ единиц.

Мы показали, что каждой последовательности, описывающей случай с ожиданием сдачи, соответствует последовательность из $(n+1)$ единиц и

$(m-1)$ нулей. Ясно, что это соответствие взаимно однозначно. Например, последовательности 111110 соответствует последователь-
ноть 100001, последовательности 011111 соответствует сочетание 011000 и т.д. Значит, число m_2 равно числу последовательностей с $(n+1)$ единицами и $(m-1)$ нулями, т.е. $m_2 = C_{m+n}^{m-1} = C_{m+n}^{n+1}$. Отсюда $m_1 = C_{m+n}^{n} - m_2 = C_{m+n}^{m} - C_{m+n}^{m-1}$.

Искомая вероятность равна: $1 - C_{m+n}^{m-1} / C_{m+n}^{m}$.

Если $m = n$, получается ответ на вопрос задачи – $1/(n+1)$.

3.88. Каждому предмету поставим в соответствие номер человека, получившего этот предмет. Тогда исход – последовательность из n чисел, каждое их которых может быть любым числом от 1 до m, число исходов равно m^n.

3.89. Перенумеруем обломки. Элементарный исход – неупорядоченный набор пар номеров соединенных обломков.

$n = (2n-1)(2n-3)...3 \cdot 1 = (2n-1)!!;\ m_A = 1;$

$m_B = n(n-1)...2 \cdot 1 = n!;$

3.90. $P(A) = 9 / C_{12}^{8} = 0{,}018$ – очень маленькая вероятность.

18. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Ниже приводятся тестовые задачи для представленных в данном сборнике задач разделов элементарного курса теории вероятностей. Если не указано иного, нужно выбрать правильный ответ из нескольких предложенных.

18.1. КОМБИНАТОРИКА

18.1.1. Найти логическое соотношение между словом и формулой:

МАТЕМАТИКА $\dfrac{10!}{3!2!2!1!1!1!}$;

ОТНОШЕНИЕ $\dfrac{9!}{2!2!2!1!1!1!}$.

Выбрать правильную формулу для слова *МНОЖЕСТВО* согласно установленной логической связи.

1. $\dfrac{9!}{3!3!3!}$; 2. $\dfrac{9!}{3!2!2!1!1!}$; 3. $\dfrac{9!}{3!3!1!1!1!}$; 4. $\dfrac{9!}{2!2!2!2!1!}$; 5. $\dfrac{9!}{2!1!1!1!1!1!1!1!}$.

18.1.2. Сколько всего способов поделить 10 разных конфет между двумя детьми, чтобы каждый ребенок получил по 5 конфет. Следует учитывать, что конфеты разные.

1. 2; 2. C_{10}^5; 3. A_{10}^5; 4. 2^5; 5. 5^2.

18.1.3. Сколько всего способов отобрать 4 фрукта из двух одинаковых яблок, двух одинаковых груш, двух одинаковых апельсинов, чтобы в выборке присутствовали все виды фруктов?

Следует учитывать, что яблоки (апельсины, груши) неотличимы друг от друга.

1. $C_2^1 C_2^1 C_2^1$; 2. C_6^4; 3. A_6^4; 4. 3; 5. 6.

18.1.4. Установить логическое соответствие:

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}:\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ ...,\ \{3,\ 4,\ 5\} \Rightarrow C_5^3$;

$\{a,\ b,\ c, \cdots, d\}:\{a,\ b,\ c\}, \cdots \{a,\ b,\ d\},\ ...,\ \{c,\ d,\ e\} \Rightarrow C_4^3$.

Выбрать правильную формулу из пяти предложенных:

$$\{\nabla,\ ®,\ \oplus,\ A,\ B\}:\{\nabla, ®\},\ \{\nabla,\ \oplus\},\ ...,\ \{A,\ B\} \Rightarrow ?$$

1. C_5^3; 2. C_3^2; 3. C_5^2; 4. C_{10}^1; 5. 2·5.

18.1.5. Сколько существует взаимно однозначных отображений $f : A \to B$, если A и B – конечные множества с одинаковым числом элементов, $|A| = |B| = n$?

1. 2^n; 2. $n!$; 3. n^n; 4. $(n-1)!$; 5. n^{n-1}.

18.1.6. Сколько существует последовательностей длины 10, каждый элемент которых – это цифра из множества $\{0,\ 1\}$?

1. 10^2; 2. C_{10}^2; 3. 2^{10}; 4. 10!; 5. A_{10}^2.

18.1.7. Сколько всего способов распределить 10 различных подарков между двумя людьми так, чтобы каждый человек получил по крайней мере один подарок?

1. 1024; 2. 1022; 3. 90; 4. 45; 5. 11.

18.1.8. Сколько имеется шестизначных чисел, состоящих из трех четных и трех нечетных цифр? При этом все цифры различны, и четные цифры, взятые отдельно, расположены в числе в порядке убывания, нечетные цифры, взятые отдельно, расположены в числе в порядке возрастания?

1. 151200; 2. 136080; 3. 72000; 4. 2000; 5. 720.

18.1.9. Сколько имеется шестизначных чисел, состоящих из трех четных и трех нечетных цифр, если все цифры различны, а как четные цифры, взятые отдельно, так и нечетные цифры, взятые отдельно, расположены в числе в порядке возрастания?

1. 2000; 2. 1400; 3. 800; 4. 720; 5. 600.

18.1.10. Выбрать правильную цепочку ответов ДА и НЕТ на следующие пять утверждений:

а). $C_5^3 = C_5^2$; б). $A_5^3 = A_5^2$; в). $C_n^k = C_{2n}^{2k}$; г). $A_{10}^3 = P_6$; д). $C_n^{n-2} = A_n^2 / 2$.

1. НЕТ, НЕТ, НЕТ, ДА, ДА; 2. ДА, НЕТ, ДА, НЕТ, ДА;

3. ДА, НЕТ, НЕТ, ДА, НЕТ; 4. ДА, НЕТ, НЕТ, ДА, ДА;

5.Да, ДА, НЕТ, ДА, ДА.

18.2 ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ.

СОБЫТИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

18.2.1. Определить, какие из множеств являются пространствами элементарных исходов данного эксперимента. Эксперимент – бросание игрального кубика.

$A_1 = \{1,\ 3,\ 5,\ \textit{четное число}\}$; $A_2 = \{\textit{простое число}, 6\}$;

$A_3 = \{\textit{число четное, число простое}\}$; $A_4 = \{\textit{четное число, нечетное число}\}$; $A_5 = \{\textit{простое число, квадрат, } 6\}$.

1. A_1 и A_2; 2. A_2 и A_3; 3. A_3 и A_3; 4. A_4 и A_5; 5. A_1 и A_4.

18.2.2. Определить, какие из множеств являются пространствами элементарных исходов данного эксперимента. Эксперимент – бросание двух игральных кубиков.

$A_1 = \{(x,\ y),\ 1 \le x,\ y \le 6\}$; $x, y,$ – натуральные числа.

$A_2 = \{(x,\ y)$, где x – сумма выпавших очков, y – произведение выпавших очков$\}$;

$A_3 = \{(x,\ y)$, где $2 \le x \le 12$; $1 \le y \le 36\}$; $x, y,$ – натуральные числа.

$A_4 = \{$*сумма выпавших очков – простое число*; *сумма выпавших очков делится на два*; *сумма выпавших очков делится на три*$\}$;

$A_5 = \{$*сумма выпавших очков не делится ни на два, ни на три*; *сумма выпавших очков делится на два*; *сумма выпавших очков делится на три*$\}$.

1. A_1 и A_2; 2. A_1 и A_3; 3. A_2 и A_4; 4. A_3 и A_5; 5. A_1 и A_5.

18.2.3. Эксперимент – бросание трех монет.

$A_1 = \{$*все монеты выпали одной и той же стороной*; *все монеты выпали разными сторонами*$\}$;

$A_2 = \{$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$\}$, *где каждое число – возможная разность между числом выпавших гербов и числом выпавших цифр*$\}$;

$A_3 = \{$*3Г*, *2Г*, *2Ц*, *3Ц*, *где запись 3Г*, *например*, *означает*, *что все три монеты выпали гербом кверху*$\}$;

$A_4 = \{$*3Г*, *3Ц*, *1Г*, *1Ц*$\}$;

$A_5 = \{$*произведение числа выпавших гербов и числа выпавших цифр – четное число*; *произведение числа выпавших гербов и числа выпавших цифр – нечетное число*$\}$.

1. A_1 и A_2; 2. A_3 и A_4; 3. A_4 и A_5; 4. A_1 и A_3. 5. A_2 и A_5.

18.2.4. На плоскость наудачу бросается точка. События *А* и *В* состоят в том, что точка попадает соответственно в круг *А* и круг *В*, известно, что круги пересекаются. Указать пары несовместных событий.

1. AB и $A\overline{B}$; 2. A и B; 3. A и $\overline{B}$; 4. $A+B$ и AB; 5. $A \setminus B$ и $A\overline{B}$;

18.2.5. На плоскость наудачу бросается точка. События *А* и *В* состоят в том, что точка попадает соответственно в круг *А* и круг *В*. Известно, что круги не пересекаются. Указать пары несовместных событий.

1. $A+B$ и $\overline{A}\,\overline{B}$; 2. $A+B$ и $A\overline{B}$; 3. $A+B$ и AB; 4. $\overline{AB}$ и $\overline{A+B}$;

5. $\overline{A} \setminus B$ и $\overline{B} \setminus A$.

18.2.6. Упростить выражение $\overline{A\overline{B}} + B$.

1. $\overline{A}$; 2. $\overline{A} + B$; 3. $\overline{AB}$; 4. $\overline{A+B}$; 5. $\overline{A}B$.

18.2.7. Упростить выражение $(A+B)(\overline{AB})$.

1. $\overline{A}+\overline{B}$; 2. $\overline{A}B+\overline{B}$; 3. $\overline{A+B}$; 4. $A\overline{B}+\overline{A}B$; 5. $\varnothing$.

18.2.8. Упростить выражение $(\overline{A}+B)\left(\overline{A+B}\right)$.

1. $\overline{A}$; 2. $\overline{A}\overline{B}$; 3. $\overline{AB}$; 4. $\overline{A}B$; 5. $\varnothing$.

18.2.9. Упростить выражение $(A \setminus B) \setminus \overline{C} + (A \setminus B) \setminus C$.

1. $A\overline{B}$; 2. $\overline{A}\overline{B}$; 3. $(\overline{AB})$; 4. $\overline{A}B$; 5. $A\overline{B}C$.

18.2.10. Упростить выражение $[(A \setminus B)+(B \setminus A)]AB$.

1. AB; 2. $A+B$; 3. $\overline{A+B}$; 4. $(A+B)\setminus AB$; 5. $\varnothing$.

18.2.11. Пусть $AB = \varnothing$; A, $B \neq \varnothing$. Какие из следующих утверждений истинны?

a) $A+B=A$; *b*) $A \setminus B = A$; c) $B \setminus A = A$; *d*) $B \setminus A = B$; *e*) $AC = BC$.

1. *a* и *c*; 2. *b* и *e*; 3. *c* и *d*; 4. *b* и *d*; 5. *a* и *e*.

18.2.12. Пусть $AB = \varnothing$; A, $B \neq \varnothing$. Какие из следующих утверждений истинны?

a) $A \setminus B = \varnothing$; *b*) $B \setminus A = \varnothing$; *c*) $A \setminus B = B \setminus A$; *d*) $A\overline{B}+\overline{A}B = A+B$;

e) $B \subseteq \overline{A}$.

1. *a* и *c*; 2. *b* и *e*; 3. *c* и *d*; 4. *b* и *d*; 5. *d* и *e*.

18.2.13. Пусть $AB = \varnothing$; A, $B \neq \varnothing$; $A+B \neq \Omega$. Какие из следующих утверждений истинны?

a) $A \subseteq \overline{B}$; *b*) $\overline{A} \subseteq B$; *c*) $B \subseteq \overline{A}$; *d*) $\overline{B} \subseteq A$; *e*) $\overline{A}\overline{B} = \varnothing$.

1. *a* и *c*; 2. *b* и *e*; 3. *c* и *d*; 4. *b* и *d*; 5. *a* и *e*.

18.2.14. Пусть $AB = \varnothing$; $A,\ B \neq \varnothing$; $A + B \neq \Omega$. Какие из следующих утверждений истинны?

$a)$ $(\overline{AB}) = \varnothing$; $b)$ $\overline{AB} = \Omega$; c) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$; $d)$ $(A+B) \setminus A = B$;

$e)$ $\overline{A} \setminus B = \varnothing$.

1. a и c; 2. b и e; 3. c и d; 4. b и d; 5. a и e.

18.2.15. Пусть $AB = \varnothing$; $A,\ B \neq \varnothing$. Какие из следующих утверждений истинны?

$a)$ $\overline{A}B = \overline{B}A$; $b)$ $\overline{B}A = A$; $c)$ $\overline{A} \setminus \overline{B} = \varnothing$; $d)$ $\overline{B} \setminus \overline{A} = \varnothing$. $e)$ $AB \subseteq \overline{A+B}$;

1. a и c; 2. b и e; 3. c и d; 4. a и b; 5. e и c.

18.2.16. Пусть $AB \neq \varnothing$; $A + B \neq \Omega$. Какие из следующих утверждений заведомо не верны?

$a)$ $A \setminus B = \varnothing$; $b)$ $(\overline{AB}) = \varnothing$; $c)$ $A + B \neq \varnothing$; $d)$ $\overline{A+B} \neq \varnothing$; $e)$ $\overline{A} + \overline{B} = \varnothing$.

1. a и c; 2. b и e; 3. a и e; 4. b и d; 5. c и d.

18.2.17. Пусть $AB \neq \varnothing$; $A + B \neq \Omega$. Какие из следующих утверждений заведомо не верны?

$a)$ $\overline{A} + B = \varnothing$; $b)$ $\overline{A}B = \varnothing$; $c)$ $A\overline{B} = \varnothing$. $d)$ $B \setminus A = \varnothing$; $e)$ $\overline{A} \setminus (AB) = \varnothing$.

1. a и c; 2. b и e; 3. c и d; 4. b и d; 5. a и e.

18.2.18. Пусть $AB \neq \varnothing$; $A + B \neq \Omega$. Какие из следующих утверждений заведомо верны?

$a)$ $\overline{A} \setminus B = \varnothing$; $b)$ $A \setminus (AB) = \varnothing$; $c)$ $(AB) \setminus A = \varnothing$; $d)$ $(AB) \setminus B = \varnothing$;

$e)$ $B \setminus (AB) = \varnothing$.

1. a и c; 2. b и e; 3. c и d; 4. b и d; 5. a и e.

18.2.19. Пусть $AB \neq \varnothing$. Какие из следующих утверждений заведомо не верны?

$a)$ $A \subset B$; $b)$ $A \subset AB$; $c)$ $B \subseteq AB$; $d)$ $AB \subseteq A \setminus B$; $e)$ $AB \subseteq \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$.

1. a и c; 2. b и e; 3. c и d; 4. b и d; 5. a и e.

18.2.20. Какие из утверждений заведомо верны, если $\omega \in AB$?

$a)$ $\omega \notin A$ или $\omega \notin B$; $b)$ $\omega \in A$ или $\omega \in B$; c) $\omega \in A \setminus B$; $d)$ $\omega \in A + B$;

$e)$ $\omega \in A \setminus B + B \setminus A$.

1. a и c; 2. b и e; 3. c и d; 4. b и d; 5. a и e.

18.2.21. Какие из следующих утверждений заведомо не верны, если $\omega \in \overline{A + B}$?

$a)$ $\omega \in \overline{A}$; $b)$ $\omega \in AB$; $c)$ $\omega \notin B$; $d)$ $\omega \in \overline{A} \setminus B$; $e)$ $\omega \notin \overline{A}$.

1. a и c; 2. b и e; 3. c и d; 4. b и d; 5. a и e.

18.2.22. Пусть $A \subset B$; $A,\ B \neq \varnothing$. Какое из утверждений истинно?

1. $AB = A$; 2) $A + B = \overline{B}$; 3); $A \setminus B = A$; 4) $\overline{A} = B$; 5) $B \setminus A = A$.

18.2.23. Пусть $A \subset B$; $A,\ B \neq \varnothing$. Какое из утверждений истинно?

1. $AB = B$; 2) $A + B = B$; 3); $B \setminus A = B$; 4) $\overline{B} = A$; 5) $B \setminus A = A$.

18.2.24. Пусть $A \subset B$; $A,\ B \neq \varnothing$; $B \neq \Omega$. Какие из следующих утверждений истинны?

$a)$ $A(B+C)=A(A+C)$; $b)$ $B(AC)=BC$; $c)$ $B(A+C)=A+C$;

$d)$ $A(B+C)=A$; $e)$ $B+C=A+C$.

1. *a* и *b*; 2. *a* и *d*; 3. *b* и *e*; 4. *c* и *d*; 5. *c* и *d*.

18.2.25. Пусть $A\setminus B=\varnothing$; $A,\ B\neq\varnothing$. Какие из утверждений истинны?

$a)$ $A\subseteq B$; $b)$ $B\subseteq A$; $c)$ $\overline{A}\subseteq\overline{B}$; $d)$ $\overline{B}\subseteq\overline{A}$; $e)$ $AB=\varnothing$.

1. *a* и *c*; 2. *b* и *e*; 3. *c* и *d*; 4. *a* и *d*; 5. *a* и *e*.

18.2.26. Пусть $A\setminus B=\varnothing$; $A,\ B\neq\varnothing$; $A\neq B$. Какие из утверждений истинны?

$a)$ $A+B=A$; $b)$ $A+B=B$; $c)$ $AB=\varnothing$; $d)$ $AB=A$; $e)$ $AB=B$.

1. *a* и *c*; 2. *b* и *e*; 3. *c* и *d*; 4. *a* и *e*; 5. *b* и *d*.

18.2.27. Пусть $A\setminus B=C\neq\varnothing$. Какие из утверждений заведомо верны?

$a)$ $AB+AC=A$; $b)$ $A+B+C=ABC$; $c)$ $A\subseteq C$; $d)$ $A+B=A+C$;

$e)$ $C\subseteq A$.

1. *a* и *c*; 2. *b* и *e*; 3. *c* и *d*; 4. *b* и *d*; 5. *a* и *e*.

18.3. КЛАССИЧЕСКОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

18.3.1. На 15 карточках написаны целые числа от 1 до 15, по одному на каждой карточке. Наугад выбирается одна карточка. Какова вероятность, что число, написанное на этой карточке, четное?

1. $\frac{1}{2}$; 2. $\frac{7}{15}$; 3. $\frac{8}{15}$; 4. $\frac{1}{7}$; 5. $\frac{1}{8}$.

18.3.2. На пяти факультетах университета – юридическом, экономическом, историческом, филологическом, естественнонаучном учатся 2000 студентов. Наудачу выбирают одного из них. Какова вероятность, что этот студент учится на экономическом факультете?

1. $\frac{1}{5}$; 2. $\leq \frac{1}{5}$; 3. $\geq \frac{1}{5}$; 4. $\frac{400}{2000}$; 5. Точный ответ дать невозможно.

18.3.3. Наудачу выбирают двузначное число. Какова вероятность, что первая цифра числа делится на 2?

1. $\frac{4}{100}$; 2. $\frac{4}{90}$; 3. $\frac{4}{10}$; 4. $\frac{1}{2}$; 5. $\frac{4}{9}$.

18.3.4. Игральный кубик брошен два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 8?

1. $\frac{3}{36}$; 2. $\frac{1}{3}$; 3. $\frac{6}{36}$; 4. $\frac{5}{36}$; 5. $\frac{7}{36}$.

18.3.5. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Наугад извлекают один кубик. Какова вероятность, что этот кубик будет иметь хотя бы одну окрашенную грань?

1. $\frac{1}{1000}$; 2. $\frac{8}{1000}$; 3. $\frac{384}{1000}$; 4. $\frac{488}{1000}$; 5. $\frac{512}{1000}$.

18.3.6. Игральный кубик брошен два раза. Какова вероятность, что хотя бы однажды число выпавших очков было больше 5?

1. $\frac{25}{36}$; 2. $\frac{12}{36}$; 3. $\frac{11}{36}$; 4. $\frac{10}{36}$; 5. $\frac{1}{36}$.

18.3.7. Верно ли, что в случае классического вероятностного пространства:

a) все элементарные исходы равновозможны;

b) число элементарных исходов не может быть больше 1000000;

c) любая вероятность – это всегда рациональное число;

d) вероятность элементарного исхода – самая маленькая из вероятностей случайных событий;

e) если в множестве Ω содержатся не менее двух элементарных исходов, то всегда можно указать событие *A* такое, что $p(A) = 0{,}5$.

1. ДА, ДА, ДА, ДА, НЕТ; 2. ДА, НЕТ, ДА, ДА, ДА;

3. ДА, НЕТ, ДА, ДА, НЕТ; 4. ДА, НЕТ, НЕТ, ДА, НЕТ;

5. НЕТ, НЕТ, ДА, ДА, НЕТ.

18.3.8. В урне 5 белых и *m* черных шаров. Вероятность того, что оба извлеченных шара окажутся черными, равна (3,5)/11. Сколько в урне черных шаров?

1. 4; 2. 5; 3. 6; 4. 7; 5. 8.

18.3.9. Из партии, содержащей 20 радиоприемников, случайным образом для проверки отбирают три приемника. Партия содержит 6 неисправных приемников. Какова вероятность, что среди отобранных будут как исправные, так и неисправные приемники.

1. $\frac{2}{20}$; 2. $\frac{546}{1140}$; 3. $\frac{210}{1140}$; 4. $\frac{756}{1140}$; 5. $\frac{594}{1140}$.

18.3.10. Брошены два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 8, если известно, что выпали разные грани?

1. $\frac{5}{36}$; 2. $\frac{4}{36}$; 3. $\frac{6}{30}$; 4. $\frac{5}{30}$; 5. $\frac{4}{30}$.

18.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

18.4.1. Точка брошена в круг радиуса 1. Найти вероятность, что она не попадет внутрь данного вписанного квадрата.

1. $\frac{\pi}{2}$; 2. $\frac{2}{\pi}$; 3. $\frac{\pi-2}{\pi}$; 4. $\frac{2-\pi}{\pi}$; 5. $\frac{1}{\pi}$.

18.4.2. В треугольник с вершинами в точках $(-1,\ 0)$; $(0,\ 1)$; $(1,\ 0)$ наудачу брошена точка $(x,\ y)$. Найти вероятность того, что координаты точки удовлетворяют неравенству $2x + y \leq 0$.

1. $\frac{1}{3}$; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $\frac{1}{4}$; 4. $\frac{2}{3}$; 5. $\frac{3}{4}$.

18.4.3. На отрезок AB длиной 2 наудачу ставят две точки: M и N. Найти вероятность того, что площадь круга, построенного на диаметре MN не превзойдет π.

1. $\frac{3}{4}$; 2. $\frac{1}{2}$; 3. $\frac{1}{4}$; 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18.4.4. Точка $(p,\ q)$ наудачу выбирается из треугольника с вершинами $(0,\ 0)$; $(0,\ 3)$; $(3,\ 0)$. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ окажутся действительными и одного знака.

1. $\frac{47}{54}$; 2. $\frac{20}{27}$; 3. $\frac{7}{27}$; 4. $\frac{7}{54}$; 5. $\frac{1}{4}$.

18.4.5. Найти вероятность того, что сумма двух наудачу взятых чисел из отрезка $[-1,\ 1]$ больше 1/2, а их произведение отрицательно.

1. $\frac{1}{16}$; 2. $\frac{1}{8}$; 3. $\frac{7}{32}$; 4. $\frac{1}{4}$; 5. $\frac{7}{16}$.

18.4.6. Стержень длины *a* наудачу разломан на три части. Найти вероятность того, что длина большего куска будет меньше, чем *a*/2.

1. $\frac{3}{8}$; 2. $\frac{1}{4}$; 3. $\frac{5}{8}$; 4. $\frac{1}{2}$; 5. $\frac{3}{4}$.

18.4.7. На отрезок *AB* длины 1 наудачу брошена точка *C*. Найти вероятность того, что произведение длин отрезков *AC* и *CB* не меньше 1/4.

1.0; 2. $\frac{1}{8}$; 3. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 4. $\frac{1}{4}$; 5.1.

18.4.8. На отрезок *AB* длины 1 наудачу брошена точка *C*. Найти вероятность того, что каждый из отрезков *AC* и *CB* больше 2/5.

1. $\frac{1}{5}$; 2. $\frac{2}{5}$; 3. $\frac{\sqrt{2}}{5}$; 4. $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 5. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

18.4.9. На отрезок *AB* длины 1 наудачу брошена точка *C*. Найти вероятность того, что отношение длин большего и меньшего отрезков, на которые *C* делит *AB*, не меньше 2.

1. $\frac{\sqrt{2}}{3}$;   2. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$;   3. $\frac{1}{3}$;   4. $\frac{2}{3}$; 5. $\frac{1}{2}$.

18.4.10. На отрезок AB длины 1 наудачу брошены точки M и N, которые разбивают AB на отрезки AM, MN, NB. Какова вероятность, что сумма длин отрезков AM и NB больше 3/4?

1. $\frac{1}{4}$; 2. $\frac{7}{16}$;   3. $\frac{9}{16}$;   4. $\frac{7}{32}$;   5. $\frac{9}{32}$.

18.5. ВЕРОЯТНОСТЬ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ВЕРОЯТНОСТИ СУММ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ СОБЫТИЙ.

18.5.1. Ниже приведены четыре формулы. Какие из них верны, если A и B – некоторые события и $A \subseteq B$?

$a)$ $p(A/B) = p(B/A)$; $b)$ $p(A/B) = p(A) : p(B)$;

$c)$ $p(A/B) = p(AB) : p(B)$; $d)$ $p(A/B) = p(A) : p(A+B)$.

1. Верны все формулы; 2. Верна только вторая формула;

3. Верна только третья формула; 4. Верны вторая, третья, четвертая формулы; 5. Верны вторая и четвертая формулы.

В каждом из последующих заданий 18.5.2 – 18.5.31 приводятся по две величины – одна в столбце A и другая в столбце B. Нужно сравнить эти величины и выбрать один из ответов: A, если величина в столбце A не меньше величины в столбце B; B, если величина в столбце B не меньше величины в столбце A; C, если величины равны; D, если заданной информации недостаточно для однозначного ответа.

Всюду далее p означает вероятность некоторого события, A и B – произвольные случайные события (A, $B \subset \Omega$; A, $B \neq \varnothing$); $\overline{A}$ – событие, противоположное событию A.

	Столбец A	Столбец B
18.5.2.	p	p^2
18.5.3.	p	$\sqrt{p}$
18.5.4.	p	$1/p$
18.5.5.	$p(A)$	$p(\overline{A})$
18.5.6.	$p(A)+p(\overline{A})$	$p(B)+p(\overline{B})$
18.5.7.	$p(A+B)$	$p(A)+p(B)$
18.5.8.	$p(A/B)$	$p(B/A)$
18.5.9.	$p(AB)$	$p(A)p(B)$
18.5.10.	$p(\overline{A}B)+p(A\overline{B})$	$p(A+B)$

В заданиях 18.5.11 – 18.5.17 известно, что $A \subseteq B$

18.5.11.	$p(A)$	$p(A+B)$
18.5.12.	$p(A)$	$p(AB)$
18.5.13.	$p(A)$	$p(B \setminus A)$
18.5.14.	$p(A/B)$	$p(A)$
18.5.15.	$p(A \setminus B)$	$p(A)$
18.5.16.	$p(B \setminus A)$	$p(A \setminus B)$
18.5.17.	$p(B/A)$	1

В заданиях 18.5.18 – 18.5.26 известно, что A и B несовместны

18.5.18.	$p(AB)$	0,5
18.5.19.	$p(A)p(B)$	0,5

18.5.20.	$p(AB)$	$p(A)p(B)$
18.5.21.	$p(A+B)$	$p(A)+p(B)$
18.5.22.	$p(A \setminus B)$	$p(A)$
18.5.23.	$p(A \setminus B)$	$p(B)$
18.5.24.	$p(A/(A+B)$	$p(A)$
18.5.25.	$p(A/B)$	$p(B)$
18.5.26.	$p(A\overline{B})+p(AB)$	$p(A)$

В заданиях 18.5.27 – 18.5 31 известно, что *A* и *B* независимы

18.5.27.	$p(AB)$	$p(AB/A)$
18.5.28.	$p(A/B)\ p(B/A)$	$p(AB)$
18.5.29.	$p(A/B)$	$p(B/A)$
18.5.30.	$p(A)+p(B)$	1
18.5.31.	$p(\overline{A}B)+p(A\overline{B})$	$p(A+B)$

18.5.32. Какие из следующих формул тождественно верны (*A*, *B*, *C* – случайные события).

a) $p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A)p(B)$; *b*) $p(A/B)=p(A):p(B)$;

c) $p\left[(A+B)/A\right]=p\left[(A+B)/B\right]$; *d*) $p\left[A/(A+B)\right]=p(A):(p(A)+p(B))$;

e) $p(ABC)=p(A)p(B/A)p(C/AB)=p(B)p(A/B)p(C/AB)=$

$=p(C)p(A/C)p(B/AC)$.

1. *a* и *c*; 2. *b* и *e*; 3. *c* и *e*; 4. *d* и *a*; 5. *c* и *d*.