MATHEMATICS
AS AN OPERATING
SYSTEM AND MODELS

JU. I. NEIMARK

It is suggested to consider mathematics as a language for describing the surrounding world and as a means of studying that world. The avenues of development of mathematics, its content, operating system, and models are also described.

Излагается взгляд на математику как на язык описания окружающего мира и средство его изучения. Описываются мотивы развития и содержание математики, ее операционной системы и моделей.

МАТЕМАТИКА КАК ОПЕРАЦИОННАЯ СИСТЕМА И МОДЕЛИ

Ю. И. НЕЙМАРК

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

ВВЕДЕНИЕ

Я хочу поделиться с Вами мыслями о математике. История математики насчитывает более 25 веков. За это время менялось ее содержание и стоящие перед ней цели и задачи. Математика древних греков, математика XVII – XIX веков и современная математика XX века на пороге XXI очень разные.

Древние греки учились 10 – 15 лет, чтобы умножать наши трехзначные числа, а теперь это легко делает ученик начальной школы. Их ум увяз в непостижимости бесконечности: быстроногий Ахилл не мог перегнать медлительной черепахи только потому, что ему нужно было для этого пробежать половину расстояния до нее, потом еще половину и так далее до бесконечности, а бесконечность действий осуществить невозможно (в противоречии с очевидностью). Не могли постичь греки и иррациональные числа: Что такое $\sqrt{2}$? Это длина гипотенузы прямоугольного треугольника с единичными катетами, а числа такого нет. Но они открыли теорему Пифагора, правильные многогранники, законы подобия и многое другое.

Великий Карл Гаусс (XVIII – XIX века) годами вычислял движения небесных тел, а сегодня это делает ЭВМ за секунды. Математики XVII – XIX веков ломали голову, решая алгебраические уравнения, вычисляя интегралы, интегрируя дифференциальные уравнения, не достигнув того, что сегодня с легкостью и быстротой делают ЭВМ. Но они придумали функции, комплексные числа, дифференциальное и интегральное исчисления, неевклидову геометрию Лобачевского и риманову геометрию и многое-многое другое.

Математика сегодня настолько разрослась,что представители разных ее направлений не понимают друг друга: она огромна. В прошлом веке Феликс Клейн [1] дал великолепное описание современной ему математики и написал чудесные книги [2] об элементарной математике с точки зрения высшей. В нашем веке Никола Бурбаки – псевдоним целой группы крупнейших математиков современности – проделал титаническую работу, создав многотомное описание архитектуры величественного здания современной математики [3, 4]. Но, возможно, его никто не прочитал целиком, как никто не читает целиком все пять больших и толстых томов Советской математической энциклопедии.

Невозможно перечитать громадное число статей и книг о математике. Отметим еще только книги Р. Куранта и Г. Робинсона “Что такое математика” [5], Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена “Наглядная геометрия” [6].

МАТЕМАТИКА – ЭТО ЯЗЫК

Математика настолько разрослась и стала настолько разнообразной, что едва ли поддается содержательному описанию, но ее можно охарактеризовать с функциональной точки зрения как язык естествознания и техники, как язык и инструмент познания окружающего нас мира и нас самих.

С русским надо говорить по-русски, с англичанином – по-английски, с французом – по-французски, а с природой – на математическом языке. Только на нем природа открывает нам свои тайны.

Возможно, впервые эту мысль в прошлом веке высказал великий физик Виллард Гиббс. Шло ученое заседание, на котором горячо дебатировался вопрос о роли языков и значении математики в преподавании. Одни отстаивали языки, другие говорили о важности математики. Дискуссия длилась долго. Вдруг обычно молчаливый В. Гиббс, основатель статистической физики, утверждавший, что скопище миллиардов молекул проще замысловатого движения одной молекулы, попросил слова и сказал: “Математика тоже язык”. После чего сел и не проронил ни слова.

Как же устроен математический язык? Прежде всего он язык абстрактный в противоположность нашим конкретным языкам, где каждое слово имеет свое конкретное значение. Представьте, что Вы идете по улице и видите на заборе надписи:

Глокая куздра икает справдо

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \frac{dx}{dt} > \frac{dy}{dt} > 0.$$

Вначале вам кажется первая фраза бессмысленной. Но затем вы начинаете понимать, что речь идет о куздре, которая икает и делает это справдо, а сама по себе – глокая. При этом, что такое *куздра*, *икает*, *справдо* и *глокая*, остается неясным, так же как и в следующих двух математических фразах, чему равны a и b или что за функции $x(t)$ и $y(t)$. Но смысл их совершенно ясен: так, вторая математическая фраза означает, что $x(t)$ растет со временем быстрее, чем $y(t)$.

Язык в широком смысле – это словарь, грамматика, рассказы, повести, пьесы и романы, написанные на этом языке. Что же в математическом языке является аналогом слов и грамматики, а что – рассказов и повестей? Аналогом слов и грамматики является математическая операционная система, а рассказов, повестей и прочего – математические модели.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИОННАЯ СИСТЕМА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Множество абстрактных элементов и действий с ними образуют то, что можно назвать операционной системой. Элементы – это числа, векторы, функции, матрицы, ..., действия (операции) – сложение, вычитание, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование, ...

У операционной системы есть четкие внутренние побудительные мотивы развития и цели: это расширение и выполнимость операций, и охват всего того, что мы хотим описать. Проиллюстрируем их беглым описанием истории становления и развития математической операционной системы, при этом мы будем придерживаться не хронологии событий, а логики их следования.

Все начиналось с целых чисел. Затем возникли действия с ними: сложение и обратное действие – вычитание; умножение и деление. Невыполнимость деления была преодолена введением дробных чисел, вычитания – отрицательных чисел.

Действительные числа – камень преткновения древних греков – получили обоснование, успокоившее математиков, только в сечениях рациональных чисел Дедекинда и сходящихся их последовательностей Вейерштрасса. Так пришли к действительным числам, с которыми всегда выполнимы операции сложения, вычитания, умножения, деления, нахождения предела, которые обозначаются соответственно знаками

$$+,\ -,\ \times,\ :,\ \lim$$

(исключения с делением на нуль и пределом неограниченно возрастающей последовательности не в счет: на то и исключения, хотя и их избегают в так называемом нетрадиционном математическом анализе).

После действительных чисел появились комплексные – как замыкание операции решения квадратных уравнений. С их введением любое алгебраическое уравнение стало разрешимым. Потом Гамильтон (1805 – 1865) придумал кватернионы как расширение комплексных чисел. Они не привились, но их частный случай – векторы и действия с ними (сложение, вычитание, скалярное и векторное произведения) вошли в широкий обиход математики.

Потребность в описании эволюционных процессов изменения привела к появлению переменных величин, а затем и функций от них, дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений.

Возникли множества и действия с ними (объединение, пересечение, дополнение, произведение) и многое-многое другое.

Как общий прием расширения операционной системы, помимо отмеченного уже расширения для выполнимости операций, можно указать перевод функций как операций в элементы, операций над функциями-элементами опять в элементы, с которыми, в свою очередь, также можно производить операции. Так операционная система пополнилась современным функциональным анализом и теорией операторов, причем операционная система обрела, исходя из своих внутренних законов развития, теорию линейных операторов раньше, чем она потребовалась физике для описания явлений микромира.

Помимо принципиальной выполнимости операций, огромное значение имеет ее фактическая выполнимость, простота и доступность этой выполнимости. Так, древние греки с трудом вычисляли произведение, например, наших чисел 473 и 328 потому, что записывали их в виде CDLXXIII и CCCXXVIII.

Оливер Хевисайд (1850 – 1925), не признанный своими современниками, сделал операцию интегрирования очень легко выполнимой и сводимой к делению на комплексное число p. Это позволило ему решить очень много задач, не решенных ранее. Он был великим ученым: предсказал наличие в верхних слоях атмосферы ионизированного слоя, отражающего радиоволны; подсчитал излучение движущегося электрона; указал формулу $E = mc^2$, известную в науке как знаменитая формула Эйнштейна.

Современные ЭВМ и методы вычислений и программирования в обсуждаемом плане следует рассматривать как новые эффективные средства реализации трудных операций математической операционной системы.

Математической моделью, с формальной точки зрения, можно назвать любую совокупность элементов и связывающих их операций. С содержательной точки зрения интересны модели, являющиеся изоморфным отображением реальных или реализуемых объектов, процессов и явлений. С математическими моделями непосредственно связан математический метод познания отображаемых моделью объектов.

Математическими моделями являются, например, квадратные уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Их элементами являются x, p и q, причем p и q предполагаются известными и называются параметрами, а x – неизвестное.

Соотношение между элементами s, g, t и 2:

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

также математическая модель, ее можно рассматривать как отображение явления свободного падения тела в поле силы тяжести.

Соотношение между элементами a, b и c, выражаемое формулой

$$a + b = c,$$

– это математическая модель. Она изоморфно отображает операцию объединения двух куч камней с их числами a и b в общую кучу камней, которых окажется $c = a + b$. В этом смысле операция сложения отвечает объединению двух куч в одну, а модель $a + b = c$ изоморфна этому слиянию. При этом,не объединяя кучи и не считая в ней камней, можно предсказать, что их будет ровно c.

Этот элементарный пример поясняет общий математический метод познания. Он состоит в построении для изучаемого объекта, процесса или явления изоморфной математической модели (на основе элементов и операций операционной системы), в изучении этой математической модели (для чего требуется выполнимость используемых в ней операций) и переносе в силу изоморфизма результатов, полученных для модели, на исходный изучаемый объект.

В этом направлении математика не только создала свои разнообразные внутренние модели алгебры, геометрии, функции комплексного переменного, дифференциальных уравнений, теории меры и др., но и помогла естествознанию в построении великих математических моделей механики, электродинамики, термодинамики, химической кинетики, микромира, пространства–времени и тяготения, вероятностей, передачи сообщений, управления, логического вывода и др. В создании своих моделей математика часто опережала потребности естествознания и техники.

Реализация описанного универсального математического метода познания и есть, по-видимому, основная цель и задача современной математики. Она включает в первую очередь построение новых неведомых математических моделей, в частности в биологии, для познания жизни и деятельности мозга, мироздания и микромира, новых фантастических технологий и техники, а также познание экономических и социальных явлений опять же с помощью математических моделей. Не следует забывать и о дальнейшем расширении и обогащении операционной системы и ее реальных возможностей, гигантски усиливаемых вычислительными методами, вычислительными машинами и средствами программирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выбрана эта тема для статьи потому, что она интересна мне и, думаю, не менее интересна Вам. Но, кроме этого, мне представляется, что она содержит соображения, полезные для преподавания математики. Трактовка математики как языка может облегчить ее восприятие и помочь преодолеть ее кажущуюся оторванность от изумительного, красочного реального мира. Ведь и наш замечательный русский язык сам по себе – всего лишь сочетания звуков или букв, и сколь скучен он был бы, если бы не служил нашему общению, чтению и постижению мира. Естественное для средней школы восприятие математики как вычислений, аксиом и доказательств теорем, то есть не содержательной стороны, а оторванного от нее важнейшего, но все же инструментария, не способствует пониманию реальной ее роли и значения в нашей жизни. Содержание статьи, возможно, поможет Вам вскрыть внутреннюю логику математики и ее связи с естествознанием и техникой, способствуя желательному их единству, поможет выявить роль внутренних и внешних стимулов ее развития, приведших к величайшим достижениям и успехам. В дальнейшем на конкретном материале я надеюсь это проиллюстрировать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX веке. М.; Л.: Гостехиздат, 1937.

2. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Том 1. Арифметика, алгебра, анализ; Том 2. Геометрия. М.: Наука, 1987.

3. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Очерки по истории математики. М.: Иностранная литература, 1963. С. 245 – 259.

4. *Бурбаки Н.* Элементы математики. Книги I – VI, Теория множеств, Алгебра, Общая топология, Функции действительного переменного, Топологические векторные пространства, Интегрирование. Отдельные издания той же серии: Коммутативная алгебра, Группы и алгебры Ли, Спектральная теория, Дифференцируемые и аналитические многообразия. М.: Наука; Иностранная литература; Мир, 1959 – 1986.

5. *Курант Р.*, *Робинсон Г.* Что такое математика. М.: Просвещение, 1967.

6. *Гильберт Д.*, *Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.