ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

А. Г. ПОПОВ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

PSEUDOSPHERICAL SURFACES

A. G. POPOV

The basic concepts of pseudospherical surfaces theory and their applications in modern mathematical physics are discussed.

Изложены основные понятия теории псевдосферических поверхностей и обсуждаются их приложения в современной математической физике.

journal.issep.rssi.ru

Возникновение в геометрии псевдосферических поверхностей – поверхностей постоянной отрицательной кривизны $K \equiv -1$, относящееся к середине XIX века, стало этапным явлением в развитии математической мысли. Псевдосферическим поверхностям была отведена роль окончательного аргумента в доказательстве существования и наглядной образной интерпретации неевклидовой гиперболической геометрии, открытой великим русским математиком Н.И. Лобачевским в 1826 г. Последующее развитие математики тесно связало псевдосферические поверхности с такими фундаментальными понятиями современного естественнонаучного мировоззрения, как преобразование Бэклунда, теория сетей, солитоны, аттракторы, нелинейные уравнения математической физики и др. В настоящей статье мы обратимся к анализу концептуальных математических истоков – оснований, объективно породивших эти удивительные геометрические объекты, и проследим их прогрессивное влияние на последующее развитие широкого спектра перспективных направлений современной математики и физики.

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО И ЕЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Геометрия, открытая Лобачевским, явилась венцом многовековых попыток доказательства корректности принятой в привычной для нас евклидовой геометрии аксиомы о параллельных, известной также как V постулат Евклида: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая ее.* Исторически в мировоззренческом восприятии математиков приведенная аксиома воспринималась несколько сложным, перегруженным утверждением, лежащим в основе всей известной к тому времени геометрии. Поэтому довольно естественными на протяжении многих веков начиная фактически с начала нашей эры представлялись попытки доказательства V постулата Евклида как следствия других имеющихся аксиоматических утверждений. Исследованием этой проблемы, например, занимались древнегреческие математики Птолемей (II в.) и Прокл (V в.), Ибн аль-Хайсам из

Ирака (конец X – начало XI в.), таджикский мыслитель Омар Хайям (вторая половина XI – начало XII в.), а также плеяда европейских математиков: К. Клавий (1574 г.), П. Катальди (1603 г.), Дж. Борелли (1658 г.), Дж. Витале (1680 г.), Дж. Валлис (1693 г.), Дж. Саккери (1733 г.), А. Лежандр (1800 г.), Ф. Швейкарт (1818 г.), Ф. Тауринус (1825 г.).

Однако окончательный математически абсолютно строгий результат по "проблеме V постулата" принадлежит Н.И. Лобачевскому и заключается в том, что V постулат Евклида не может быть доказан на основе других принятых аксиоматических предположений евклидовой геометрии. И более того, допущение иного постулата, противоположного по смыслу аксиоме о параллельных, приводит к построению новой геометрии, столь же содержательной, как и евклидова. Научное сообщение об открытии новой геометрии было сделано Н.И. Лобачевским в Казанском университете в 1826 г., а сама работа "О началах геометрии" опубликована им в 1829–1830 гг. В основе новой геометрии, называемой теперь геометрией Лобачевского, вместо V постулата Евклида принята следующая аксиома: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее* (содержание этого положения символически показано на рис. 1, *А*).

Новую геометрию, которую Лобачевский называл воображаемой геометрией, уже сам автор рассматривал как возможную теорию пространственных отношений. Но окончательное утверждение геометрии Лобачевского как системы пространственных соотношений пришло позднее, когда были предложены ее наглядные интерпретации и тем самым полностью решен вопрос о ее реальном смысле.

Построение модельных интерпретаций геометрии Лобачевского на обычной плоскости связано с идеями А. Пуанкаре, Кели, Ф. Клейна. Остановимся подробно

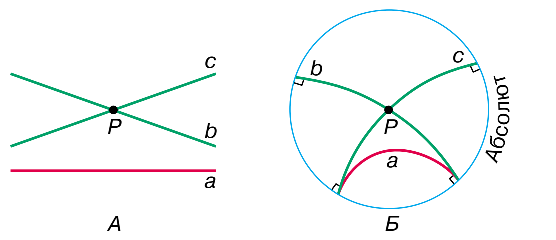


Рис. 1. Аксиома Лобачевского: через точку *P* вне данной прямой *a* можно провести по крайней мере две прямые *b* и *c*, не пересекающие данную прямую *a*. *А* – символическая иллюстрация аксиомы, *Б* – интерпретация аксиомы в модели плоскости Лобачевского в круге

на интерпретации Пуанкаре (1868 г.) (рис. 1, *Б*). Плоскостью Лобачевского Λ^2 в такой интерпретации является внутренность некоторого круга на евклидовой плоскости, прямыми на Λ^2 считаются дуги окружностей, перпендикулярных окружности данного круга – абсолюту, и его диаметры; движениями – преобразования, являющиеся композицией инверсий относительно окружностей, дуги которых служат прямыми. Примечательно, что в этой модели углы между прямыми на Λ^2 совпадают с соответствующими евклидовыми углами между дугами.

Открытие и последующее исследование геометрических объектов, наиболее полно и естественно представляющих неевклидову гиперболическую геометрию в трехмерном евклидовом пространстве, связаны с именами Ф. Миндинга, Э. Бельтрами, У. Дини и др., построивших и детально изучивших ряд поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны $K \equiv -1$, на которых реализуется внутренняя геометрия отдельных частей плоскости Лобачевского. Такие поверхности впоследствии стали называться псевдосферическими поверхностями по названию характерной поверхности из их класса – псевдосферы, впервые открытой российским математиком Миндингом в 1838 г. и исчерпывающе исследованной Бельтрами в 1868 г. в контексте ее связи с геометрией Лобачевского. Псевдосфера (рис. 2, *а*) играет ту же каноническую роль в геометрии Лобачевского, что и обычная сфера в евклидовой геометрии.

Прежде чем перейти к описанию конкретных псевдосферических поверхностей, предварительно обратимся к минимальному обсуждению необходимых понятий из общей теории поверхностей.

ЭЛЕМЕНТЫ АППАРАТА ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

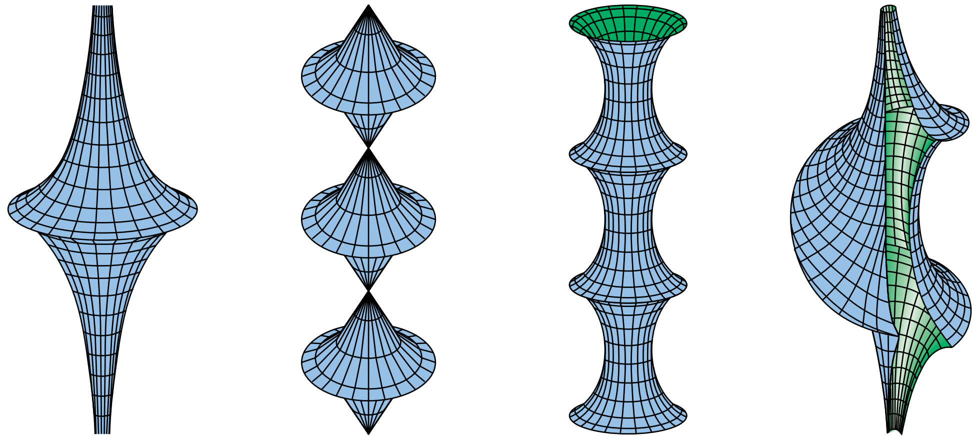
Обратимся к обсуждению двух классических подходов, используемых для описания поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3(x, y, z)$ – методу Монжа и методу Гаусса.

Основным соотношением в методе Монжа является уравнение, связывающее декартовы координаты точек поверхности:

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

При этом гауссова кривизна K поверхности – одна из ключевых ее внутригеометрических характеристик – определяется формулой

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \tag{2}$$



а б в г

Рис. 2. Классические псевдосферические поверхности: *а* – псевдосфера, *б* – волчки, *в* – катушки; *г* – фрагмент винтовой поверхности Дини (вид с разрезом)

использующей частные производные функции (1)

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Разрешить дифференциальное уравнение (2) относительно функции $z = f(x, y)$ означало бы описать в пространстве $\mathbf{E}^3$ все поверхности с априори заданной кривизной K по их форме и положению в пространстве. В общем случае (при произвольной кривизне) выполнить интегрирование уравнения (2) не представляется возможным. Однако наряду с этим полному исследованию поддаются частные случаи, когда кривизна поверхности является постоянной. Уравнение (2) при $K \equiv -1$ будет базовым соотношением, используемым ниже для получения явного вида псевдосферических поверхностей.

Другим важным подходом к исследованию поверхностей является метод Гаусса, в соответствии с которым общее аналитическое выражение поверхности S определяется заданием декартовых координат точек поверхности как функций двух параметров u и υ:

$$x = x(u, \upsilon), \quad y = y(u, \upsilon), \quad z = z(u, \upsilon).$$

Сама поверхность S при этом однозначно (с точностью до движения) определяется в пространстве $\mathbf{E}^3$ своим радиусом-вектором $\vec{r}(u, \upsilon)$: $\vec{r} = \vec{r}\{x(u, \upsilon), y(u, \upsilon), z(u, \upsilon)\}$ и вектором единичной нормали $\vec{n}(u, \upsilon)$.

Наряду с $\vec{r}(u, \upsilon)$ и $\vec{n}(u, \upsilon)$ в дифференциальной геометрии также для однозначного определения поверхности обычно используются первая и вторая квадратичные формы поверхности S:

$$\mathrm{I} = ds^2 = E du^2 + 2F du d\upsilon + G d\upsilon^2, \tag{3}$$

$$\mathrm{II} = L du^2 + 2M du d\upsilon + N d\upsilon^2, \tag{4}$$

отвечающие соответственно за ее внутреннюю и внешнюю геометрии. Отметим, что коэффициенты метрики (3) определяются исключительно радиусом-вектором $\vec{r}(u, \upsilon)$ и однозначным образом задают гауссову кривизну K поверхности S.

Поставим задачу об отыскании в пространстве $\mathbf{E}^3$ поверхности, определяемой некоторой метрикой (3) кривизны K. Такая задача называется задачей об изометрическом погружении метрики ds^2 в евклидово пространство $\mathbf{E}^3$. Разрешение данной задачи связано с интегрированием основных уравнений теории поверхностей:

уравнения Петерсона–Кодацци

$$L_\upsilon + \Gamma^1_{11} M + \Gamma^2_{11} N = M_u + \Gamma^1_{12} L + \Gamma^2_{12} M, \tag{5}$$

$$M_\upsilon + \Gamma^1_{12} M + \Gamma^2_{12} N = N_u + \Gamma^1_{22} L + \Gamma^2_{22} M, \tag{6}$$

уравнение Гаусса

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{F}\left[\frac{\partial}{\partial u}\Gamma^1_{12} - \frac{\partial}{\partial \upsilon}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}\right], \tag{7}$$

деривационные формулы

$$\vec{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\vec{r}_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}_\upsilon + L\vec{n}, \tag{8}$$

$$\bar{r}_{u\upsilon} = \Gamma^1_{12}\vec{r}_u + \Gamma^2_{12}\vec{r}_\upsilon + M\vec{n}, \tag{9}$$

$$\vec{r}_{\upsilon\upsilon} = \Gamma^1_{22}\vec{r}_u + \Gamma^2_{22}\vec{r}_\upsilon + N\vec{n}, \tag{10}$$

$$\vec{n}_u = \frac{1}{EG - F^2}[(FM - GL)\cdot\vec{r}_u + (FL - EM)\cdot\vec{r}_\upsilon], \tag{11}$$

$$\vec{n}_\upsilon = \frac{1}{EG - F^2}[(NF - GM)\cdot\vec{r}_u + (FM - EN)\cdot\vec{r}_\upsilon]. \qquad (12)$$

Первая группа уравнений (уравнения Петерсона–Кодацци и Гаусса (5)–(7)) связывает коэффициенты первой и второй квадратичных форм (3), (4). Вторая группа уравнений (8)–(12) (деривационные формулы) задает по уже известным коэффициентам E, F, G, L, M, N радиус-вектор $\vec{r}(u, \upsilon)$ и вектор единичной нормали $\vec{n}(u, \upsilon)$ поверхности S, то есть окончательно определяет поверхность в пространстве. Используемые в (5)–(12) символы Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ зависят от коэффициентов метрики (3) и их производных [2].

Уравнения (5)–(12) представляют собой современный фундаментальный аппарат исследования поверхностей в $\mathbf{E}^3$. Более того, эти уравнения представляют полную систему соотношений, позволяющих читателю самостоятельно изучать в пространстве поверхности с наперед заданными метриками типа (3). В связи с этим напомним, что в общем случае система (5)–(12) до сих пор остается неразрешенной. Но это обстоятельство ни в коей мере не сужает класс содержательных случаев, к рассмотрению которых мы переходим.

КЛАССИЧЕСКИЕ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

В 1838 г. Ф. Миндинг, опираясь на уравнение (2), исчерпывающим образом провел исследование поверхностей вращения постоянной кривизны. Метод Миндинга сводился к отысканию той формы меридиана $x = \varphi(z)$ (кривой, вращаемой вокруг оси), которая обеспечивала бы постоянную кривизну поверхности. Уравнение (3) в указанном случае переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$K\cdot\varphi = -\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^2} \qquad (13)$$

и при постоянном заданном значении K поддается стандартной процедуре интегрирования, приводящей к конкретному параметрическому виду меридиана как обратной функции $z = \varphi^{-1}(x)$:

$$z = \pm\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{Kx^2 - (\lambda - 1)}{\lambda - Kx^2}}dx.$$

Полученный результат позволил Миндингу при $K \equiv -1$ выделить три основных типа псевдосферических поверхностей вращения, которые представлены на рис. 2 (*а*, *б*, *в*).

Особую роль среди приведенных на рис. 2 поверхностей играет псевдосфера, ее уравнения могут быть представлены в виде

$$\vec{r}(u, \upsilon): \begin{cases} x = \sin u\cdot\cos\upsilon, & 0 < u < \pi, \\ y = \sin u\cdot\sin\upsilon, & -\infty < \upsilon < +\infty, \\ z = \ln\operatorname{ctg}\dfrac{u}{2} - \cos u. & \end{cases}$$

Углубленный анализ псевдосферы был проведен Э. Бельтрами в 1868 г. Он установил, что геометрия псевдосферы совпадает с геометрией определенной области на плоскости Лобачевского – орикруга. Если точкам и прямым в этой области плоскости Лобачевского сопоставить точки и кратчайшие линии (геодезические) на псевдосфере, а движению на плоскости Лобачевского сопоставить перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием (деформацией, сохраняющей длины), то всякой теореме (утверждению) в геометрии Лобачевского будет отвечать соответствующий факт, имеющий место на псевдосфере.

Таким образом, благодаря появлению первых псевдосферических поверхностей, и в первую очередь псевдосфере, геометрия Лобачевского получила наглядный, реальный смысл: длины, углы, площади смогли теперь пониматься в смысле их естественного привычного измерения (например, на псевдосфере).

Результаты Миндинга и исследования Бельтрами положили начало развитию нового раздела дифференциальной геометрии – исследованию и построению поверхностей отрицательной кривизны, и прежде всего псевдосферических. Последующим классическим примером стала винтовая псевдосферическая поверхность, построенная Дини (рис. 2, *г*).

Дальнейшие исследования по обозначенной тематике привели к открытию новых фундаментальных понятий не только в геометрии, но и в современном нелинейном анализе, таких, как преобразование Бэклунда, солитоны, сетевая интерпретация нелинейных дифференциальных уравнений и др.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА, ЧЕБЫШЕВСКИЕ СЕТИ И УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОНА

Следующий этап получения фундаментальных результатов в исследовании проблем, связанных с псевдосферическими поверхностями и составляющих каноническую основу современного нелинейного анализа, приходится на конец 80-х годов XIX столетия. В то время было открыто преобразование Бэклунда и впервые установлена взаимосвязь внутригеометрических характеристик псевдосферических поверхностей с важными нелинейными дифференциальными уравнениями.

Концептуальное значение в данном вопросе сыграла работа выдающегося русского ученого П.Л. Чебышёва “О кройке одежды”, в которой он исследовал вопрос о специальных сетях линий (тканях) на поверхностях. Изученные в работе сети, называемые теперь чебышёвскими, характеризуются следующим свойством: *в каждом сетевом четырехугольнике противоположные стороны являются равными.* К примеру, нити куска обычной нерастяжимой ткани, натянутой (наложенной) на поверхность, образуют на ней чебышёвскую сеть. Из определения чебышёвской сети нетрудно получить выражение для квадрата линейного элемента покрываемой ею поверхности:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos z\,du\,d\upsilon + d\upsilon^2. \qquad (14)$$

Из (14) с использованием формулы (7) для гауссовой кривизны вытекает, что при $K \equiv -1$ функция $z(u, \upsilon)$, имеющая смысл сетевого угла, должна удовлетворять уравнению

$$z_{u\upsilon} = \sin z, \qquad (15)$$

впоследствии получившему название уравнения синус-Гордона. (Несколько более общий вид уравнения (15) при произвольном K был получен практически одновременно и независимо в 1878 г. П.Л. Чебышёвым и И.Н. Хаццидакисом.)

Уравнение синус-Гордона, играющее фундаментальную роль в современном естествознании, является центральным в алгоритме построения новых псевдосферических поверхностей, предложенном Бэклундом. Переходя к изложению связанных с этим идей, подчеркнем, что преобразование Бэклунда, широко используемое в настоящее время в теории нелинейных уравнений, исторически впервые возникло в 1876 г. именно в дифференциальной геометрии как преобразование псевдосферических поверхностей.

Геометрическое содержание преобразования Бэклунда состоит в следующем.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ *имеется некоторая псевдосферическая поверхность* S *с радиусом-вектором* $\vec{r}$. *Тогда по этой поверхности всегда можно построить новую псевдосферическую поверхность* S^* *с радиусом-вектором* $\vec{r}^*$ *по формуле*

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \omega\sin\sigma(\vec{\tau}_1\cos z^* + \vec{\tau}_2\sin z^*). \qquad (16)$$

В соотношении (16) $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ – единичные касательные векторы к линиям кривизны на поверхности S (линия на поверхности называется линией кривизны, если ее направление в каждой точке является главным направлением, то есть направлением, в котором нормальная кривизна поверхности достигает экстремального значения); ω, σ – некоторые числовые параметры. Участвующая в правой части (16) функция $z^*(u, \upsilon)$ имеет смысл сетевого угла чебышёвской сети на новой поверхности S^* и удовлетворяет уравнению синус-Гордона (15). Решение $z^*(u, \upsilon)$ связано с решением $z(u, \upsilon)$, имеющим аналогичный смысл по отношению к уже известной поверхности S, посредством системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial z^*}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2k\sin\frac{z^* + z}{2},\\ \frac{\partial z^*}{\partial \upsilon} = \frac{\partial z}{\partial \upsilon} + \frac{2}{k}\sin\frac{z^* - z}{2}, \qquad k = \text{const},\end{gathered} \qquad (17)$$

называемой преобразованием Бэклунда для решений уравнения синус-Гордона. Система уравнений в частных производных (17) до сих пор не разрешена в общем виде, для нее известна единственная рекуррентным образом определяемая серия решений

$$\begin{gathered}z_{n+1} = z_{n-1} + 4\operatorname{arctg}\left\{\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2}\operatorname{tg}\frac{z_n^{(1)} - z_n^{(2)}}{4}\right\};\\ k_1, k_2 = \text{const},\\ z_0 \equiv 0,\end{gathered} \qquad (18)$$

задающая класс так называемых многосолитонных решений и соответствующее им бесконечное число псевдосферических поверхностей. (В физике под солитонами понимают уединенные волны, распространяющиеся с постоянной скоростью и имеющие неизменный профиль. Для таких волн свойствен особый характер взаимодействия, единственным результатом которого является сдвиг фаз взаимодействующих волн (см. также: *Маневич Л.И.* Линейная и нелинейная математическая физика: от гармонических волн к солитонам // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 1. С. 86–93).)

Формулы (17), (18) составляют к настоящему времени основу для построения фактически неизученной солитонной серии псевдосферических поверхностей (или солитонных псевдосферических поверхностей) и могут быть выбраны интересующимися читателями в качестве исходной базы для самостоятельных исследований по геометрии поверхностей (при этом будет также полезно обратиться к научно-популярной брошюре [3]).

В заключение этого раздела обратим внимание на частный пример двухсолитонной псевдосферической поверхности (рис. 3), напоминая, что общая классификация солитонных псевдосферических поверхностей находится в настоящий момент на стадии своего формирования.

ТЕОРЕМА Д. ГИЛЬБЕРТА И ПОСЛЕДУЮЩИЕ СОВРЕМЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Как уже отмечалось, псевдосферические поверхности реализуют на своих регулярных частях геометрию,

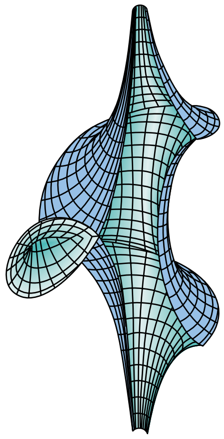


Рис. 3. Фрагмент двухсолитонной псевдосферической поверхности (вид с разрезом)

совпадающую с геометрией лишь отдельных частей плоскости Лобачевского. Кроме того, как видно из рисунков, непременным атрибутом этих поверхностей являются особенности – нерегулярные ребра или острия. Оказывается, наличие особенностей у поверхностей постоянной отрицательной кривизны имеет глубинные корни, относящиеся к основаниям математики. В этом контексте выдающийся математик Д. Гильберт в 1901 г. в работе "О поверхностях постоянной гауссовой кривизны" исследовал вопрос о возможности реализации в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^3$ всей (полной) плоскости Лобачевского. Гильберт получил следующий фундаментальный результат: *в пространстве* $\mathbf{E}^3$ *не существует полной и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию полной плоскости Лобачевского.*

То есть плоскость Лобачевского не реализуется в целом регулярным образом в трехмерном евклидовом пространстве. Этот факт в известном смысле говорит о более богатой природе геометрии Лобачевского по отношению к геометрии Евклида, в связи с чем возникла проблематика, изучающая возможность реализации геометрии Лобачевского в многомерных евклидовых пространствах. Имеющиеся результаты по этой проблеме были получены сравнительно недавно. В 1955 г. Д. Блануша и 1960 г. Э.Р. Розендорн доказали возможность регулярной реализации плоскости Лобачевского соответственно в пространствах $\mathbf{E}^6$ и $\mathbf{E}^5$. Вопрос же о регулярной реализации плоскости Λ^2 в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^4$ до сих пор остается открытым и представляет одну из актуальных нерешенных проблем современной геометрии.

В 1975 г. Н.В. Ефимов усилил результат Гильберта, доказав невозможность в $\mathbf{E}^3$ и полуплоскости Лобачевского. Этот результат является логическим звеном системных исследований по геометрии "в целом", проводимых начиная с конца 1950-х – начала 1960-х годов в научной геометрической школе Ефимова–Позняка в Московском университете по проблеме изометрических погружений (реализации) двумерных метрик отрицательной кривизны в $\mathbf{E}^3$. Среди выдающихся геометров этой научной школы следует отметить Э.Р. Розендорна, И.Х. Сабитова, Д.Д. Соколова, Е.В. Шикина, С.Б. Кадомцева и их учеников.

Одним из центральных общих вопросов в исследованиях научной школы стал вопрос о нахождении той грани, которая определяет границы реализации ("присутствия") в $\mathbf{E}^3$ неевклидовой гиперболической геометрии. Или, более предметно, вопрос о том, какие части плоскости Лобачевского могут быть регулярно погружены в $\mathbf{E}^3$. Среди полученных в этой области результатов, адресуя читателя к списку литературы, укажем на возможность изометрического погружения в $\mathbf{E}^3$ таких частей плоскости Λ^2, как бесконечная полоса, специальные типы многоугольников и др.

Существенно, что при проведении отмеченных исследований был предложен новый вид основных уравнений теории поверхностей – уравнений в римановых инвариантах (уравнений Рождественского–Позняка):

$$r_x + sr_y = A_0 + A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s, \qquad (19)$$
$$s_x + rs_y = A_0 + A_2 r + A_1 s + A_3 s^2 + A_4 rs + A_5 rs^2,$$

где коэффициенты типа A_i являются некоторыми функциями символов Кристоффеля, а римановы инварианты $r(x, y)$ и $s(x, y)$ следующим образом связаны с коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности:

$$r = -\frac{m+k}{n}, \qquad s = \frac{-m+k}{n},$$

где

$$m = \frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad n = \frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad K = -k^2.$$

В целом отметим, что система (19) придает основным соотношениям теории поверхностей более совершенную интерпретацию, дающую возможность применения к их исследованию методов современной теории дифференциальных уравнений, таких, например, как метод малого параметра.

ПОВЕРХНОСТЬ БИАНКИ–АМСЛЕРА И ДРУГИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Итальянский математик Л. Бианки в 1927 г. в известном курсе по дифференциальной геометрии (L. Bianchi "Lezioni di Geometria Differenziale") указал на возможность существования в пространстве $\mathbf{E}^3$ поверхности кривизны $K \equiv -1$, содержащей две пересекающиеся прямолинейные образующие. Отличительным свойством такой поверхности является то, что ей отвечает решение уравнения синус-Гордона (15) специального типа – автомодельное решение переменной $t = u\upsilon$, редуцирующее уравнение (15) к виду обыкновенного диффереациального уравнения:

$$tz'' + z' = \sin z. \qquad (20)$$

Вследствие замены $w = e^{iz}$ уравнение (20) переходит в уравнение

$$w'' - \frac{w'^2}{w} + \frac{2w' - w^2 + 1}{2t} = 0,$$

определяющее так называемую третью трансцендентную функцию Пенлеве. Характерным свойством трансцендентных функций Пенлеве третьего типа (класса специальных функций) является неподвижность (то есть независимость от выбора начальных данных) их точек ветвления.

Последующие результаты по исследованию псевдосферической поверхности, связанной с решением уравнения синус-Гордона $z(t)$, принадлежат Амслеру (1955 г.), проанализировавшему (в том числе и численно) ее качественный вид. На рис. 4 представлена поверхность Бианки–Амслера, отвечающая части решения $z(t = u\upsilon)$, определенной на отрезке между $z = 0$ и $z = \pi$ вблизи нуля. Поверхность имеет структуру, состоящую из закручивающихся и сужающихся на бесконечности полос, регулярно сопряженных в начале координат. Последние результаты по асимптотике третьих трансцендентных функций Пенлеве подтверждают качественные представления Амслера о поверхности и указывают на ее многослоевую подобную структуру, обусловленную осцилляциями функций Пенлеве на бесконечности.

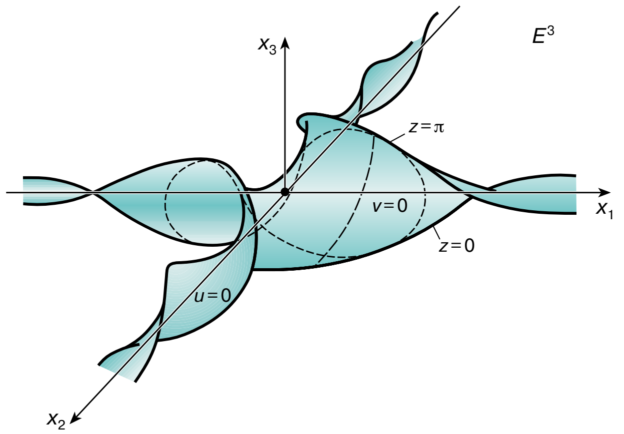


Рис. 4. Поверхность Бианки–Амслера. Показана часть поверхности, отвечающая части решения $z(t)$, заключенной между его первым нулем и первым значением π

В заключение этого раздела представим на рис. 5 галерею компьютерно визуализированных псевдосферических поверхностей, анонсированных в различных последних научных публикациях. Эти поверхности соответствуют различным типам решений уравнения синус-Гордона, получаемым посредством метода обратной задачи рассеяния – одного из эффективных современных методов интегрирования нелинейных уравнений. Приложениями возникающей при этом солитонной теории к построению псевдосферических поверхностей активно в настоящее время в мире занимаются многие ученые, среди которых особо отметим М. Мелко и И. Стерлинга, из работы которых (Annals of Global Analysis and Geometry. 1993. Vol. 11. P. 65–107), в частности, приведены изображения поверхностей, демонстрирующие изящные проявления геометрии Лобачевского в трехмерном евклидовом пространстве. Аналитическая классификация подобных поверхностей только складывается.

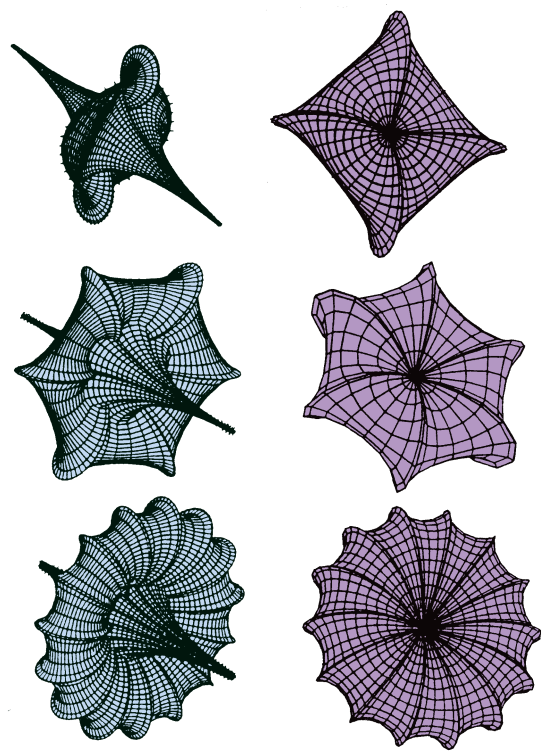


Рис. 5. Последовательность поверхностей Хасимото

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Удивительное единство многих различных по своей природе явлений и связанных с ними математических моделей может быть объяснено в значительном числе случаев качественной аналогией описывающих их дифференциальных уравнений, проявляющейся, в частности, в их геометрических интерпретациях. Обнаруженная впервые в конце прошлого столетия взаимосвязь уравнения синус-Гордона и чебышёвских сетей – специальных геометрических объектов на псевдосферических поверхностях (и в общем на плоскости Лобачевского) – получила в конце уже XX в. существенное обобщение, связанное с установлением известной общей эквивалентности широких классов нелинейных уравнений современной математической физики и отвечающих им специальных типов координатных сетей на псевдосферических поверхностях (или соответственно на плоскости Λ^2). В целом сущность всякого геометрического подхода к исследованию определенной задачи состоит в сопоставлении исследуемой задаче некоторого геометрического образа (объекта), анализ которого может быть проведен в рамках хорошо развитой геометрической методологии. И в нашем случае полнота геометрии Лобачевского представляется весьма достаточной для унификации широкого круга задач математической физики, в которых нелинейные уравнения играют ключевую роль.

Приведенные выше рассуждения мы проиллюстрируем на примере дифференциальных уравнений, формирующих так называемый класс Лобачевского (или Λ^2-класс). Эти уравнения, среди которых известные уравнения синус-Гордона, Кортевега–де Фриза, Бюргерса, Лиувилля и др., называются Λ^2-уравнениями.

Рассмотрим двумерную дифференциальную квадратичную форму типа (3) с коэффициентами $E[z(u, \upsilon)]$, $F[z(u, \upsilon)]$, $G[z(u, \upsilon)]$, зависящими известным образом от некоторой функции $z = z(u, \upsilon)$ и ее производных. Обратимся к формуле Гаусса (7) для вычисления кривизны K формы (3) с рассматриваемыми коэффициентами. Правая часть соотношения (7) представляет собой известное выражение для кривизны K через E, F, G и их производные по u и υ до второго порядка включительно. Если считать кривизну K априори заданной функцией (в интересующем нас случае $K \equiv -1$), то, очевидно, соотношение типа (7) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для функции $z(u, \upsilon)$.

Таким образом, можно говорить, что псевдосферическая метрика (3) порождает некоторое дифференциальное уравнение

$$F[z(u, \upsilon)] = 0. \tag{21}$$

Верно и обратное: в соответствии с описанной выше методикой всякое регулярное решение $z(u, \upsilon)$ уравнения (21) определяет собой псевдосферическую метрику.

Приведем примеры псевдосферических метрик и соответственно ассоциированных с ними (порождаемых ими) известных нелинейных уравнений:

1) *метрика*

$$ds^2 = du^2 + 2\cos z(u, \upsilon)\,du\,d\upsilon + d\upsilon^2,$$

уравнение синус-Гордона

$$z_{u\upsilon} = \sin z;$$

2) *метрика*

$$ds^2 = du^2 + (z^2 + 2)\,du\,d\upsilon + \left[z_u^2 + \left(\frac{z^2}{2} + 1\right)^2\right]d\upsilon^2,$$

модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза

$$z_\upsilon - \frac{3}{2}z^2 z_u - z_{uuu} = 0;$$

3) *метрика*

$$ds^2 = \frac{e^z}{2}(du^2 + d\upsilon^2),$$

уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2} = e^z.$$

В общем принято говорить, что дифференциальное уравнение принадлежит Λ^2-классу (или является Λ^2-уравнением), если оно порождается указанным выше способом псевдосферической метрикой. Понятие Λ^2-класса является важной категорией современной геометрической теории дифференциальных уравнений; оно, в частности, подразумевает локальную эквивалентность всех регулярных решений уравнений данного класса.

Более того, свойство принадлежности уравнений Λ^2-классу означает единую метрическую природу этих уравнений в рамках геометрии Лобачевского, которая во многом универсально объясняет наличие таких фундаментальных свойств у многих нелинейных уравнений, как преобразование Бэклунда, наличие бесконечного числа законов сохранения, интегрируемость методом обратной задачи рассеяния, существование солитонных решений, связь с трансцендентными функциями Пенлеве и др.

* * *

В заключение хотелось бы еще раз подчеркнуть необычайную математическую важность псевдосферических поверхностей как объектов неевклидовой гиперболической геометрии и широчайший спектр приложений ассоциированных с ними понятий в современном естествознании. В этой связи автор хотел бы поделиться своим впечатлением, составленным на основе изучения мировой научной библиографии по данному вопросу, доказывающим исторически необходимую роль обсуждаемых в данной статье понятий: исследования по обсуждаемому спектру вопросов ведутся сейчас во многих странах – Россия, США, Китай, Бразилия, ЮАР, Австралия и др., при этом любопытно, что некоторые независимые исследователи ведут самостоятельную работу, в некоторой степени повторяющую уже известные подходы, изложенные в нашем кратком обзоре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947–1948. Т. 1. 512 с.; Т. 2. 407 с.

2. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.

3. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* Уравнение синус-Гордона: Геометрия и физика. М.: Знание, 1991. 45 с.

4. *Розендорн Э.Р.* Поверхности отрицательной кривизны // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 48. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 98–195.

5. *Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Попов А.Г.* Геометрия Лобачевского: Открытие и путь в современность // Природа. 1993. № 7. С. 19–27.

6. *Позняк Э.Г.* Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, вып. 41(172). С. 47–76.

7. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* Геометрия Лобачевского и уравнения математической физики // Докл. АН. 1993. Т. 332, № 4. С. 418–421.

Рецензент статьи Ю.П. Соловьев

* * *

Андрей Геннадьевич Попов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Лауреат премии им. И.И. Шувалова. Область научных интересов – геометрия Лобачевского, нелинейные уравнения математической физики. Автор более 60 научных публикаций.