Федеральное агентство по образованию

Пермский государственный технический университет

Кафедра Информационных технологий и автоматизированных систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям
по курсу
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
АВТОМАТИЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пермь 2006

УДК 681.3

Методические указания к практическим занятиям по курсу Теоретические основы автоматизированного управления/ Сост. Р.А. Файзрахманов, И.Н. Липатов/ Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 2006. 100 с.

Приводятся методические указания к 15 практическим занятиям по курсу Теоретические основы автоматизированного управления. Каждое практическое занятие включает в себя краткие теоретические сведения, иллюстрируемые решением типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» дневного и заочного обучения.

Рецензент канд. техн. наук, доцент Е.В. Долгова

ОГЛАВЛЕНИЕ

Практическое занятие №1. Определение математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции

Теоретические сведения

Пусть $\varphi(t)$ – неслучайная функция, $X(t)$, $Y(t)$ – независимые случайные функции.

Свойства математического ожидания:

1) $M[\varphi(t)] = \varphi(t)$.

2) $M[\varphi(t) \cdot X(t)] = \varphi(t) \cdot m_x(t)$.

3) $M[X(t) + Y(t)] = m_x(t) + m_y(t)$.

4) $M[X(t) \cdot Y(t)] = m_x(t) \cdot m_y(t)$.

Пусть $\varphi(t)$ – неслучайная функция, $X(t)$, $Y(t)$ – независимые случайные функции, тогда дисперсия случайно величины $X(t)$:

$$D[X(t)] = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} = M[\overset{\circ}{X}(t)]^2.$$

Свойства дисперсии:

1) $D[\varphi(t)] = 0$.

2) $D[\varphi(t) \cdot X(t)] = \varphi^2(t) \cdot D_x(t)$.

3) $D[X(t) + Y(t)] = D_x(t) + D_y(t)$.

4) $D[X(t)] \geq 0$.

Пусть $\varphi(t)$ – неслучайная функция, $X(t)$ – случайная функция.

Корреляционной функцией называется математическое ожидание произведения значений случайной функции $X(t)$ для двух моментов времени t_1, t_2:

$$K_x(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Свойства корреляционной функции:

1. $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$.

Для стационарных процессов $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$, где $\tau = t_1 - t_2$.

2. $K_x(t, t) = D_x(t)$.

3. Пусть $Y(t) = \varphi(t) \cdot X(t)$, тогда $K_y(t_1, t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \cdot K_x(t_1, t_2)$.

4. Пусть $Y(t) = \varphi(t) + X(t)$, тогда $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$.

5. Пусть $Z(t) = X(t) + Y(t)$, тогда

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + K_{xy}(t_1, t_2) + K_{yx}(t_1, t_2).$$

6. Пусть $Z(t) = a(t) \cdot X(t) + b(t) \cdot Y(t),$ где $a(t), b(t)$ – неслучайные, тогда

$$K_z(t_1, t_2) = a(t_1) \cdot a(t_2) \cdot K_x(t_1, t_2) + b(t_1) \cdot b(t_2) \cdot K_y(t_1, t_2)$$
$$+ a(t_1) \cdot b(t_2) \cdot K_{xy}(t_1, t_2) + b(t_1) \cdot a(t_2) \cdot K_{yx}(t_1, t_2).$$

Решение типовых задач

Задача 1.1. Определить математическое ожидание произведения двух функций $\sin t \cdot e^{\alpha \cdot t}$, где $\alpha = const.$

Решение. Используем первое свойство математического ожидания, так как обе функции неслучайные $\Rightarrow M[\sin t \cdot e^{\alpha t}] = \sin t \cdot e^{\alpha t}$.

Задача 1.2. Определить математическое ожидания следующего выражения $\cos(\alpha \cdot t) \cdot e^{\beta \cdot t} + \sin(\alpha \cdot t) \cdot \cos(\beta \cdot t),$ где $\alpha, \beta = const.$

Решение. Сначала используем третье свойство математического ожидания:

$$M[\cos(\alpha \cdot t) \cdot e^{\beta \cdot t} + \sin(\alpha \cdot t) \cdot \cos(\beta \cdot t)] =$$
$$= M[\cos(\alpha \cdot t) \cdot e^{\beta \cdot t}] + M[\sin(\alpha \cdot t) \cdot \cos(\beta \cdot t)].$$

Затем применим первое свойство математического ожидания

$$M[\cos(\alpha \cdot t) \cdot e^{\beta \cdot t}] + M[\sin(\alpha \cdot t) \cdot \cos(\beta \cdot t)] =$$
$$= \cos(\alpha \cdot t) \cdot e^{\beta \cdot t} + \sin(\alpha \cdot t) \cdot \cos(\beta \cdot t).$$

Задача 1.3. Определить дисперсию следующего выражения:

$$\cos(\beta \cdot t) + \sin(\beta \cdot t) + t + 1. \ \beta = const.$$

Решение. Используем первое свойство дисперсии, так как все четыре слагаемых данного выражения неслучайные функции:

$$D[\cos(\beta \cdot t) + \sin(\beta \cdot t) + t + 1] = 0.$$

Задача 1.4. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1, t_2)$.

$$Z(t) = \sin(w \cdot t) X(t) + \frac{1}{\cos(w \cdot t)} Y(t).$$

Решение. Используем сначала пятое, затем третье свойства корреляционной функции:

$$K_z(t_1, t_2) = \sin(w \cdot t_1) \sin(w \cdot t_2) K_x(t_1, t_2) + \frac{K_y(t_1, t_2)}{\cos(w \cdot t_1) \cos(w \cdot t_2)} +$$
$$+ \frac{\sin(w \cdot t_1)}{\cos(w \cdot t_2)} K_{xy}(t_1, t_2) + \frac{\sin(w \cdot t_2)}{\cos(w \cdot t_1)} K_{yx}(t_1, t_2)$$

Задача 1.5. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.

$z(t)=\sin(w\cdot t)X(t)+\dfrac{1}{\cos(w\cdot t)}Y(t),$ если $X(t),Y(t)$ – независимые.

Решение. Используем третье свойство корреляционной функции:

$$K_z(t_1,t_2)=\sin(w\cdot t_1)\sin(w\cdot t_2)K_x(t_1,t_2)+\frac{K_y(t_1,t_2)}{\cos(w\cdot t_1)\cos(w\cdot t_2)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.6. Определить математическое ожидание произведения двух функций $\cos(\beta\cdot t)\cdot e^{\alpha\cdot t}$, где $\alpha,\beta=const.$

Задача 1.7. Определить математическое ожидание выражения:

$$e^{\alpha\cdot t}\cdot\cos(\beta\cdot t)+\frac{1}{\sin(\alpha\cdot t)}e^{\beta\cdot t},\ \text{где}\ \alpha,\beta=const.$$

Задача 1.8. Определить математическое ожидание выражения:

$$e^{\alpha\cdot t}\cdot\cos(\beta\cdot t)\cdot X(t),\ \text{где}\ \alpha,\beta=const.$$

Задача 1.9. Определить математическое ожидание выражения:

$$\cos(\beta\cdot t)X(t)+\frac{1}{\sin(\alpha\cdot t)}Y(t),\ \text{где}\ \alpha,\beta=const.$$

Задача 1.10. Определить дисперсию следующего выражения:

$$e^{\alpha\cdot t}\cos(\beta\cdot t),\ \text{где}\ \alpha,\beta=const.$$

Задача 1.11. Определить дисперсию следующего выражения:

$$e^{\alpha\cdot t}\cos(\beta\cdot t)X(t),\ \text{где}\ \alpha,\beta=const.$$

Задача 1.12. Определить дисперсию следующего выражения:

$$(e^{\alpha\cdot t}+\cos(\beta\cdot t)+t^2+1)X(t),\ \text{где}\ \alpha,\beta=const.$$

Задача 1.13. Определить дисперсию следующего выражения:

$$e^{\alpha\cdot t}X(t)+\cos(\beta\cdot t)Y(t),\ \text{где}\ \alpha,\beta=const.$$

Задача 1.14. Определить дисперсию следующего выражения:

$$e^{\alpha\cdot t}X(t)+\cos(\beta\cdot t)Y(t)+t^3,\ \text{где}\ \alpha,\beta=const.$$

Задача 1.15. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.

$$z(t)=\sin(\alpha\cdot t)\frac{1}{\cos(\beta\cdot t)}X(t).$$

Задача 1.16. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.

$$z(t) = \sin(w \cdot t)\cos(w \cdot t)X(t).$$

Задача 1.17. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.

$$z(t) = \sin(\alpha \cdot t)\cos(\beta \cdot t)X(t) + e^{\alpha \cdot t} + e^{\beta \cdot t}.$$

Задача 1.18. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.

$$z(t) = \sin(\alpha \cdot t)\cos(\beta \cdot t)X(t) + e^{\alpha \cdot t} + e^{\beta \cdot t} + t + 1.$$

Задача 1.19. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.

$$z(t) = \sin(w \cdot t)X(t) + \cos(w \cdot t)Y(t).$$

Задача 1.20. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.
$z(t) = a \cdot X(t) + b \cdot Y(t),\ X,Y$ – стационарные процессы, $\tau = t_1 - t_2$.

Задача 1.21. Определить корреляционную функцию $K_z(t_1,t_2)$.
$z(t) = a \cdot X(t) - b \cdot Y(t),\ X,Y-$ стационарные процессы, $\tau = t_1 - t_2$.

Практическое занятие №2.
Определение вероятностных характеристик интеграла от случайного процесса

Теоретические сведения

Пусть $Y(t) = \int\limits_0^t X(t)dt,$ где $X(t), Y(t)$ – случайные процессы.

Тогда математическое ожидание:

$$m_y(t) = \int\limits_0^t m_x(t)dt \tag{2.1}$$

Корреляционная функция этого процесса:

$$K_y(t_1,t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_x(t_1',t_2')dt_1'dt_2' \tag{2.2}$$

Дисперсия случайного процесса $Y(t)$:

$$D_y(t) = K_y(t,t). \tag{2.3}$$

Решение типовых задач

Задача 2.1. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = (\sin wt + 1)\int\limits_0^t X(\tau)d\tau.$ Определить математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию.

Решение. Для определения математического ожидания воспользуемся выражением (2.1) и вторым свойством математического ожидания:

$$m_y(t) = M[(\sin wt + 1)\int_0^t X(\tau)d\tau] = (\sin wt + 1)M[\int_0^t X(\tau)d\tau] =$$

$$= (\sin wt + 1)\int_0^t m_x(\tau)d\tau.$$

Для определения корреляционной функции воспользуемся выражением (2.2) и третьим свойством корреляционной функции:

$$K_y(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_z(t_1, t_2) = (\sin wt_1 + 1)(\sin wt_2 + 1)\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Для определения дисперсии заданного случайного процесса воспользуемся выражением (2.3) и вторым свойством дисперсии:

$$D_y(t) = \varphi^2(t)D_x(t) = (\sin wt + 1)^2\int_0^t\int_0^t K_x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Задача 2.2. Случайный процесс задан следующим выражением

$$Y(t) = (e^{\alpha t} + 1)\int_0^t X(\tau)d\tau + \cos wt + 1.$$

Опередить математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию, если заданы

$$m_x(t) = t^3 + t^2 + t + 1, K_x(t_1, t_2) = e^{-\alpha t_1} \cdot e^{-\alpha t_2}.$$

Решение. Для определения математического ожидания воспользуемся выражением (2.1), первым и вторым свойствами математического ожидания:

$$m_y(t) = M[(e^{\alpha t} + 1)\int_0^t X(\tau)d\tau + \cos wt + 1] = (e^{\alpha t} + 1)M[\int_0^t X(\tau)d\tau] + \cos wt + 1 =$$

$$= (e^{\alpha t} + 1)\int_0^t m_x(\tau)d\tau + \cos wt + 1 = (e^{\alpha t} + 1)\int_0^t (\tau^3 + \tau^2 + \tau + 1)d\tau + \cos wt + 1 =$$

$$= (\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t)(e^{\alpha t} + 1) + \cos wt + 1.$$

Для определения корреляционной функции воспользуемся выражением (2.2) и третьим свойством корреляционной функции:

$$K_y(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_z(t_1, t_2) = (e^{\alpha t_1} + 1)(e^{\alpha t_2} + 1)\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\alpha\tau_1}e^{-\alpha\tau_2}d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}(e^{\alpha t_1} + 1)(e^{\alpha t_2} + 1)(1 - e^{-\alpha t_1})(1 - e^{-\alpha t_2}).$$

Для определения дисперсии заданного случайного процесса воспользуемся выражением (2.3) и вторым свойством дисперсии:

$$D_y(t) = \frac{1}{\alpha^2}(e^{-\alpha t} + 1)^2 \cdot (1 - e^{-\alpha t})^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.3. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = (\sin wt + 1)\int_0^t X(\tau)d\tau + 3t^2 + 2t + 1$. Определить математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию.

Задача 2.4. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau$. Определить математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию, если заданы

$$m_x(t) = t + 1, K_x(t_1, t_2) = \sin wt_1 \cdot \sin wt_2.$$

Задача 2.5. Случайный процесс $X(t)$ имеет характеристики

$$m_x(t) = t^2 + 2t + 1; K_x(t_1, t_2) = D_x e^{\alpha(t_1 + t_2)}.$$

Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)$

$$Y(t) = \frac{\sin wt}{t^2 + 1}\int_0^t X(\tau)d\tau + 3t^2 + e^{\alpha t}.$$

Практическое занятие №3. Определение вероятностных характеристик производной от случайного процесса

Теоретические сведения

Пусть $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$, где $X(t), Y(t)$ – случайные процессы.

Тогда математическое ожидание данного случайного процесса $Y(t)$:

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt}. \quad (3.1)$$

Корреляционная функция данного случайного процесса $Y(t)$:

$$K_y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (3.2)$$

Если $\tau = t_1 - t_2$, то корреляционная функция:

$$K_y(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}. \tag{3.3}$$

Решение типовых задач

Задача 3.1. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = \sin t \cdot e^{-\alpha t} \cdot \frac{dX(t)}{dt} + \cos t + 1$. Определить математическое ожидание этого процесса и корреляционную функцию.

Решение. Используя свойства математического ожидания и выражение **(**3.1**)**, определим математическое ожидание заданного процесса:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = \sin t \cdot e^{-\alpha t} \cdot \frac{dm_x(t)}{dt} + \cos t + 1.$$

Используя свойства корреляционной функции и выражение **(**3.2**)**, определим корреляционную функцию:

$$K_y(t_1, t_2) = \sin t_1 \cdot \sin t_2 \cdot e^{-\alpha t_1} \cdot e^{-\alpha t_2} \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Задача 3.2. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$. Корреляционная функция определена как $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Определить корреляционную функцию заданного случайного процесса $Y(t)$.

Решение. Для $\tau < 0$ корреляционная функция имеет вид:

$$K_y(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = -\alpha^2 D_x e^{\alpha\tau}.$$

Для $\tau \geq 0$ корреляционная функция имеет вид:

$$K_y(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = -\alpha^2 D_x e^{-\alpha\tau}.$$

Для любого τ корреляционная функция имеет вид:

$$K_y(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = -\alpha^2 D_x e^{-\alpha|\tau|}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$. Определить математическое ожидание этого процесса и корреляционную функцию, если заданы

$$m_x(t) = \sin wt + t^2 + 1,\ K_x(t_1,t_2) = D_x e^{-\alpha(t_1+t_2)},\ D_x = const.$$

Задача 3.4. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$. Корреляционная функция определена следующим образом $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha(t_1-t_2)^2}$. Определить корреляционную функцию заданного случайного процесса $Y(t)$.

Задача 3.5. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = a\frac{dX(t)}{dt}$. Корреляционная функция определена следующим образом $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Определить корреляционную функцию заданного случайного процесса $Y(t)$.

Задача 3.6. Случайный процесс задан следующим выражением $Y(t) = a\frac{dX(t)}{dt} + b$. Корреляционная функция определена следующим образом $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$. Определить корреляционную функцию заданного случайного процесса $Y(t)$.

Задача 3.7. Определить корреляционную функцию производной случайного процесса $X(t)$, если

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Задача 3.8. Дана корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$:

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Найти корреляционную функцию и дисперсию функции $Y(t)$ вида:

$$Y(t) = b\frac{dX(t)}{dt}, b = const.$$

Практическое занятие №4. Определение спектральной плотности по корреляционной функции

Теоретические сведения

Спектральная плотность и корреляционная функция связаны между собой следующими соотношениями:

$$S_x^*(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-iw\tau} d\tau \qquad (4.1)$$

и

$$K_x(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_x^*(w) e^{iw\tau} dw \qquad (4.2)$$

где $S_x^*(w)$ – двусторонняя спектральная плотность случайного процесса $X(t)$, $K_x(\tau)$ – корреляционная функция случайного процесса $X(t)$, $\tau = t_1 - t_2$.

Решение типовых задач

Задача 4.1. Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ задана в виде $K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$, где $|\tau| = \begin{cases} \tau, \tau \ge 0 \\ -\tau, \tau < 0 \end{cases}$. Определить спектральную плотность соответствующего случайного процесса.

Решение. Спектральная плотность определяется по формуле **(**4.1**)**:

$$S_x^*(w) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-iw\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_x e^{-\alpha|\tau|} e^{-iw\tau} d\tau.$$

Исходя из условий задачи представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$S_x^*(w) = \frac{D_x}{2\pi} [\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau - iw\tau} d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha\tau - iw\tau} d\tau].$$

Вычислим

$$S_x^*(w) = \frac{D_x}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\alpha - iw)} e^{\alpha\tau - iw\tau} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{D_x}{2\pi} \cdot \frac{1}{(-\alpha - iw)} e^{-\alpha\tau - iw\tau} \Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + w^2)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.2. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = \begin{cases} D_x(1 - |\tau|), \text{ если } |\tau| \le 1 \\ 0, \qquad \text{если } |\tau| > 1 \end{cases}.$$

Построить график $K_x(\tau)$, определить спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Задача 4.3. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \cdot (1 + \alpha|\tau|).$$

Определить спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Задача 4.4. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = \begin{cases} D_x(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}), \text{ если } |\tau| \le \tau_0 \\ 0, \quad \text{если } |\tau| > \tau_0 \end{cases}.$$

Найти спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Задача 4.5. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos w_0 \tau.$$

Определить спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Задача 4.6. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cdot (1 - \alpha|\tau|).$$

Определить спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Задача 4.7. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = \begin{cases} 1 - (1/5)|\tau|, \text{ если } |\tau| \le 5 \\ 0, \text{ если } |\tau| > 5 \end{cases}.$$

Определить спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Задача 4.8. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = e^{-|\tau|}.$$

Определить спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Задача 4.9. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = 100 \cdot e^{-0,1|\tau|} \cdot (1 + 0,1|\tau|).$$

Определить спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Задача 4.10. Корреляционная функция задана в виде

$$K_x(\tau) = a^2 \cdot e^{-2\lambda|\tau|}.$$

Определить спектральную плотность $S_x^*(w)$.

Практическое занятие №5. Определение дисперсии случайного процесса на выходе динамической системы

Теоретические сведения

Рассмотрим схему на рис.5.1.

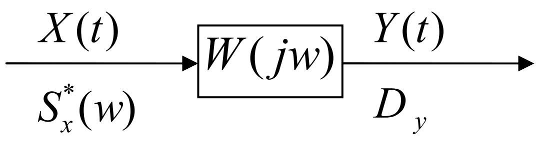

Рис. 5.1

Здесь $W(jw)$ – передаточная функция динамической системы; $S_x^*(w)$ – спектральная плотность случайного процесса $X(t)$; D_y – дисперсия случайного процесса $Y(t)$.

Дисперсия на выходе системы определяется по формуле:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(w)dw, \tag{5.1}$$

где $S_y^*(w)$ – спектральная плотность процесса $Y(t)$. $S_y^*(w)$ определяется в виде:

$$S_y^*(w) = \left|W(jw)\right|^2 \cdot S_x^*(w). \tag{5.2}$$

Чтобы вычислить интеграл (5.1), необходимо привести его к виду стандартного интеграла:

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(jw)}{H_n(jw)H_n(-jw)}dw, \tag{5.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} G_n(jw) &= g_0(jw)^{2n-2} + g_1(jw)^{2n-4} + \ldots + g_{n-1} \\ H_n(jw) &= h_0(jw)^n + h_1(jw)^{n-1} + \ldots + h_n \end{aligned}\right\}. \tag{5.4}$$

Интеграл I_n при $n = 1,2,3$ определяется соотношениями:

$$I_1 = \frac{g_0}{2h_0h_1}; \tag{5.5}$$

$$I_2 = \frac{-g_0 + \frac{h_0}{h_2}g_1}{2h_0h_1}; \tag{5.6}$$

$$I_3 = \frac{-h_2g_0 + h_0g_1 - \frac{h_0h_1g_2}{h_3}}{2h_0(h_0h_3 - h_1h_2)}. \tag{5.7}$$

Математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ вычисляется через математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ и передаточную функцию $W(0)$:

$$m_y = W(0) \cdot m_x. \tag{5.8}$$

Решение типовых задач

Задача 5.1. Дано

$$W(jw)=jw; S_x^*(w)=\frac{a^2}{(w^2+\alpha^2)^2}.$$

Определить дисперсию D_y случайного процесса на выходе динамической системы.

Решение. Имеем:

$$\left|W(jw)\right|^2=W(jw)\cdot W(-jw). \qquad (5.9)$$

Определим $W(-jw)$. Получим:

$$W(-jw)=-jw.$$

Представим $S_x^*(w)$ в виде:

$$S_x^*(w)=a^2\cdot\frac{1}{(jw+\alpha)^2}\cdot\frac{1}{(-jw+\alpha)^2}.$$

Соотношение (5.1) с учетом (5.2), (5.9) примет вид:

$$D_y=\frac{a^2\cdot 2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{jw\cdot(-jw)}{[(jw)^2+2\alpha\cdot(jw)+\alpha^2][(-jw)^2+2\alpha\cdot(-jw)+\alpha^2]}dw. \qquad (5.10)$$

Запишем полученное соотношение в виде:

$$D_y=2\pi a^2\cdot I_2,$$

где

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(jw)^2+g_1}{[h_0(jw)^2+h_1(jw)+h_2][h_0(-jw)^2+h_1(-jw)+h_2]}dw. \qquad (5.11)$$

Соотношение (5.11) описывает стандартный интеграл порядка $n=2$. Общее выражение для стандартного интеграла имеет вид соотношение (5.3), (5.4).

Сопоставляя (5.10) и (5.11), получим:

$$\left.\begin{aligned} &h_0=1;\ h_1=2\alpha;\ h_2=\alpha^2;\\ &g_0=-1;\ g_1=0.\end{aligned}\right\}. \qquad (5.12)$$

Подставим (5.12) в (5.6). Имеем:

$$I_2=\frac{1}{4\alpha}.$$

Окончательно получим:

$$D_y = 2\pi a^2 \cdot I_2 = \frac{a^2\pi}{2\alpha}.$$

Задача 5.2. Линейная система описывается уравнением вида:

$$m_1 \cdot \dot{Y}(t) + m_0 \cdot Y(t) = n_1\dot{X}(t) + n_0 X(t). \qquad (5.13)$$

Случайная функция $X(t)$, действующая на входе системы, имеет спектральную плотность вида:

$$S_x^*(w) = \frac{D_x\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{w^2 + \alpha^2}.$$

Определить дисперсию случайного процесса на выходе системы.

Решение. Перейдем от уравнения (5.13) к передаточной функции динамической системы. Введем оператор дифференцирования $P \equiv \frac{d}{dt}$. Перепишем (5.13) в виде:

$$(m_1 P + m_0)Y(t) = (n_1 P + n_0)X(t). \qquad (5.14)$$

Из (5.14) имеем:

$$W(P) = \frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{n_1 P + n_0}{m_1 P + m_0},$$

откуда:

$$W(jw) = \frac{n_1(jw) + n_0}{m_1(jw) + m_0}.$$

Определим $W(-jw)$. Получим:

$$W(-jw) = \frac{n_1(-jw) + n_0}{m_1(-jw) + m_0}.$$

Представим $S_x^*(w)$ в виде:

$$S_x^*(w) = \frac{D_x\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{(jw+\alpha)[(-jw)+\alpha]}.$$

Соотношение (5.1) с учетом (5.2), (5.9) примет вид:

$$D_y = \frac{2D_x\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_1(jw)+n_0}{m_1(jw)+m_0} \cdot \frac{n_1(-jw)+n_0}{m_1(-jw)+m_0} \cdot \frac{1}{(jw+\alpha)} \cdot \frac{1}{[(-jw)+\alpha]}dw =$$

$$= \frac{2D_x\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[n_1(jw)+n_0][n_1(-jw)+n_0]}{[m_1(jw)+m_0](jw+\alpha)[m_1(-jw)+m_0](-jw+\alpha)}dw.$$

или

$$D_y = \frac{2D_x\alpha}{2\pi}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-n_1^2(jw)^2+n_0^2}{[m_1(jw)^2+(m_0+m_1\alpha)(jw)+m_0\alpha][m_1(-jw)^2+(m_0+m_1\alpha)(-jw)+m_0\alpha]}dw. \qquad (5.15)$$

Запишем полученное соотношение в виде:

$$D_y = 2D_x\alpha\cdot I_2,$$

где

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_0(jw)^2+g_1}{[h_0(jw)^2+h_1(jw)+h_2][h_0(-jw)^2+h_1(-jw)+h_2]}dw. \qquad (5.16)$$

Сопоставляя (5.16) и (5.15), получим:

$$\left.\begin{array}{c} h_0 = m_1; h_1 = m_0 + m_1\alpha; h_2 = m_0\alpha; \\ g_0 = -n_1^2; g_1 = n_0^2. \end{array}\right\} \qquad (5.17)$$

Подставим (5.17) в (5.6). Имеем:

$$I_2 = \frac{n_1^2 + \dfrac{m_1}{m_0\alpha}n_0^2}{2m_1(m_0+m_1\alpha)}.$$

Окончательное выражение для дисперсии D_y примет вид:

$$D_y = 2D_x\alpha\cdot I_2 = D_x\alpha\cdot\frac{n_1^2+\dfrac{m_1}{m_0\alpha}n_0^2}{m_1(m_0+m_1\alpha)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.3. На вход апериодического звена, описываемого уравнением:

$$T_0\dot{Y}(t) + Y(t) = k\cdot X(t),$$

поступает стационарный сигнал $X(t)$ со спектральной плотностью:

$$S_x^*(w) = \frac{D_x\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{(w^2+\alpha^2)^2}.$$

Найти дисперсию случайного процесса на выходе апериодического звена.

Задача 5.4. Линейная система описывается уравнением вида

$$T_2\ddot{Y}(t) + T_1\dot{Y}(t) + T_0Y(t) = m_1\dot{X}(t) + m_0X(t).$$

Случайная функция $X(t)$, действующая на входе системы, имеет спектральную плотность

$$S_x^*(w) = C.$$

Найти дисперсию сигнала на выходе системы.

Задача 5.5. Дано:

$$W(S) = \frac{k}{TS+1}; S_x^*(w) = \frac{D_x \alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{(w^2+\alpha^2)^2}.$$

Определить дисперсию D_y.

Задача 5.6. Дано:

$$W(S) = \frac{T_1 S+1}{T_2 S+1}; S_x^*(w) = \frac{D_x \alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{(w^2+\alpha^2)^2}.$$

Определить дисперсию D_y.

Задача 5.7. Дано:

$$W(S) = \frac{0{,}5S+1}{0{,}25S^2+\xi S+1}; S_x^*(w) = \left|\frac{jw+1}{jw+2}\right|^2.$$

Определить дисперсию D_y.

Практическое занятие №6. Формирующие фильтры

Теоретические сведения

Спектральная плотность на входе $S_x^*(\omega)$ и на выходе $S_y^*(\omega)$ динамической системы связана соотношением:

$$S_y^*(\omega) = \left|\phi(j\omega)\right|^2 \cdot S_x^*(\omega), \tag{6.1}$$

где $\phi(j\omega)$ – частотная характеристика динамической системы.

Имеем:

$$\left|\phi(j\omega)\right|^2 = \phi(j\omega)\cdot\phi(-j\omega). \tag{6.2}$$

Подставим (6.2) в (6.1). Получим:

$$S_y^*(\omega) = \phi(j\omega)\cdot\phi(-j\omega)\cdot S_x^*(\omega). \tag{6.3}$$

Если представить $S_y^*(\omega)$ в виде (6.3), то $\phi(j\omega)$ есть частотная характеристика формирующего фильтра. Передаточную функцию формирующего фильтра получим следующим образом:

$$\phi(S) = \phi(j\omega)\big|_{j\omega=S} = \frac{y(S)}{x(S)}. \tag{6.4}$$

Введем в рассмотрение оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$. Из (6.4) имеем:

$$\phi(p) = \phi(S)\big|_{S=p} = \frac{Y(t)}{x(t)}. \qquad (6.5)$$

Соотношение (6.5) используется для определения дифференциального уравнения формирующего фильтра. Формирующий фильтр предназначен для формирования случайного процесса с заданными вероятностными характеристиками.

Решение типовых задач

Задача 6.1. Дано:

$$S_y^*(\omega) = \frac{D_y\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

Определить:

1) $\phi(j\omega) = ?$

2) $S_x^*(\omega) = ?$

3) Уравнение формирующего фильтра.

Решение. Представим $S_y^*(\omega)$ в виде:

$$S_y^*(\omega) = \frac{1}{j\omega+\alpha} \cdot \frac{1}{-j\omega+\alpha} \cdot \frac{D_y\alpha}{\pi}. \qquad (6.6)$$

Сопоставляя (6.6) и (6.3), получим:

$$\phi(j\omega) = \frac{1}{j\omega+\alpha}; \quad \phi(-j\omega) = \frac{1}{-j\omega+\alpha}; \quad S_x^*(\omega) = \frac{D_y\alpha}{\pi}.$$

Из (6.4) имеем:

$$\phi(S) = \frac{1}{S+\alpha};$$

Из (6.5) получим:

$$\phi(p) = \frac{1}{p+\alpha} = \frac{y(t)}{x(t)}. \qquad (6.7)$$

Из (6.7) получим уравнение формирующего фильтра:

$$(p+\alpha) \cdot y(t) = x(t)$$

или

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha \cdot y(t) = x(t).$$

Задача 6.2. Дано:

$$S_y^*(\omega) = \frac{2D_y\alpha^3}{\pi} \cdot \frac{1}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

Определить:

1) $\phi(j\omega) = ?$
2) $S_x^*(\omega) = ?$
3) Уравнение формирующего фильтра.

Решение. Представим $S_y^*(\omega)$ в виде:

$$S_y^*(\omega) = \frac{1}{(j\omega + \alpha)^2} \cdot \frac{1}{(-j\omega + \alpha)^2} \cdot \frac{2D_y\alpha^3}{\pi}$$

Сопоставляя (6.8) и (6.3), получим:

$$\phi(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2\alpha \cdot j\omega + \alpha^2}; \quad S_x^*(\omega) = \frac{2D_y\alpha^3}{\pi}.$$

Из (6.4) имеем:

$$\phi(S) = \frac{1}{S^2 + 2\alpha S + \alpha^2}.$$

Из (6.5) получим:

$$\phi(p) = \frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2} = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Из (6.9) определим уравнение формирующего фильтра:

$$(p^2 + 2\alpha p + \alpha^2)y(t) = x(t)$$

или

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\, \dot{y} + \alpha^2 \cdot y(t) = x(t).$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.3. Дано:

$$S_y^*(\omega) = D_y \frac{1 + 3\omega^2/\alpha^2}{2\pi\alpha(1 + \omega^2/\alpha^2)^2}.$$

Определить:

1) $\phi(j\omega) = ?$

2) $S_x^*(\omega) = ?$

3) Уравнение формирующего фильтра.

Задача 6.4. Дано:

$$S_y^*(\omega) = \frac{D_y}{\pi} \cdot \frac{16\alpha^3\omega^4}{(\omega^2 + \alpha^2)^4}.$$

Определить:

1) $\phi(j\omega) = ?$

2) $S_x^*(\omega) = ?$

3) Уравнение формирующего фильтра.

Задача 6.5. Дано:

$$S_y^*(\omega) = \frac{2(T_1 + T_2)D_y}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}.$$

Определить:

1) $\phi(j\omega) = ?$

2) $S_x^*(\omega) = ?$

3) Уравнение формирующего фильтра.

Задача 6.6. Дано:

$$S_y^*(\omega) = aD_x \cdot \frac{1 + b\omega^2}{\left|1 + a \cdot j\omega + b \cdot (j\omega)^2\right|^2}.$$

Определить:

1) $\phi(j\omega) = ?$

2) $S_x^*(\omega) = ?$

3) Уравнение формирующего фильтра.

Задача 6.7. Дано:

$$S_y^*(\omega) = \frac{2D_x\alpha^2}{\pi} \cdot \frac{\omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

Определить:

1) $\phi(j\omega) = ?$

2) $S_x^*(\omega) = ?$

3) Уравнение формирующего фильтра.

Задача 6.8. Дано:

$$S_y^*(\omega) = \frac{2\beta a^2}{\omega^2(\frac{\omega^2}{\beta^2} + 1)}.$$

Определить:

1) $\phi(j\omega) = ?$

2) $S_x^*(\omega) = ?$

3) Уравнение формирующего фильтра.

Практическое занятие №7.
Цепи Маркова

Теоретические сведения

Основной задачей исследования марковской цепи является нахождение безусловных вероятностей нахождения системы *S* на любом (*k*-м) шаге в состоянии S_i; обозначим эту вероятность $P_i(k)$:

$$P_i(k) = P\{S(k) = S_i\} \quad (i = 1,2,...,n; k = 0,1,...), \tag{7.1}$$

где *n* – число дискретных состояний системы *S*.

Для нахождения вероятностей $P_i(k)$ необходимо знать условные вероятности перехода системы *S* на *k*-м шаге в состояние S_j, если известно, что на предыдущем (*k* – 1)-м шаге она была в состоянии S_i.
Обозначим эту вероятность:

$$\pi_{ij}(k) = P\{S(k) = S_j \mid S(k-1) = S_i\} \; (i, j = 1,2,...,n). \tag{7.2}$$

Вероятности $\pi_{ij}(k)$ называются вероятностями перехода цепи Маркова на *k*-м шаге.

Вероятности перехода можно записать в виде матрицы перехода π размерности $n \times n$:

$$\pi(k) = \begin{bmatrix} \pi_{11}(k) & \pi_{12}(k) & \dots & \pi_{1n}(k) \\ \pi_{21}(k) & \pi_{22}(k) & \dots & \pi_{2n}(k) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \pi_{n1}(k) & \pi_{n2}(k) & \cdots & \pi_{nn}(k) \end{bmatrix} \quad (k = 0,1,2,...) \tag{7.3}$$

Цепь Маркова называется однородной, если $\pi_{ij}(k)$ не зависят от номера шага $k : \pi_{ij}(k) = \pi_{ij}$. Соотношение (7.3) примет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11}\pi_{12} \cdots\cdots \pi_{1n} \\ \pi_{21}\pi_{22} \cdots\cdots \pi_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \pi_{n1}\pi_{n2} \cdots\cdots \pi_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

Матрица безусловных вероятностей состояний на шаге k определяется соотношением:

$$P_k = \left[P_1(k)\ \ P_2(k)......P_n(k)\right] \quad (k = 0,1,2,...) \qquad \textbf{(7.5)}$$

Для P_k справедливо соотношение:

$$P_k = P_{k-1}\pi, \quad k = 1,2,... \qquad \textbf{(7.6)}$$

Из **(**7.6**)** имеем:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0\pi \\ P_2 &= P_1\pi \\ P_3 &= P_2\pi \\ &............. \end{aligned} \qquad \textbf{(7.7)}$$

Матрица финальных вероятностей T вида:

$$T = \lim_{m\to\infty} \pi(m) = \lim_{m\to\infty} \pi^m = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & .....P_n \\ P_1 & P_2 & .....P_n \\ .... & .... & .... \\ P_1 & P_2 & .....P_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7.8)}$$

может быть определена путем решения системы алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_j &= \sum_{k=1}^{n} P_k \pi_{kj};\ j = 1,2,...,n-1 \\ 1 &= \sum_{j=1}^{n} P_j. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.9)}$$

Здесь $P_j = \lim\limits_{k\to\infty} P_j(k),\ j = \overline{1,n}$ – финальные вероятности.

Решение типовых задач

Задача 7.1. Система представляет собой техническое устройство, состоящего из m узлов (m = 3) и время от времени (в моменты $t_1, t_2, ..., t_k$) подвергается профилактическому осмотру и ремонту. После каждого шага (момент осмотра и ремонта) система может оказаться в одном из следующих состоянии: x_1 – все узлы исправны; x_2 – один узел заменен новым, остальные исправны; x_3 – два узла заменены новыми, остальные исправны; x_4 – все три узла заменены новыми. Рассматривая состояния системы как марковскую цепь, вычислить вероятности состояний после трех шагов, т.е. $P_j(3) = ?,\ j = 1,2,3,4.$ В начальный момент времени все узлы исправны. Матрица перехода π имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом:

$$P_3 = [P_1(3) \quad P_2(3) \quad P_3(3) \quad P_4(3)] = ?$$

Решение. Определим матрицу P_0 :

$$P_0 = [P_1(0) \quad P_2(0) \quad P_3(0) \quad P_4(0)]$$

Так как в начальный момент времени система находится в состоянии x_1, то:

$$P_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Из **(7.7)** имеем:

$$P_1 = P_0\pi = [0{,}1 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3]$$

$$P_2 = P_1\pi = [0{,}1 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3] \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = [P_1(2) \quad P_2(2) \quad P_3(2) \quad P_4(2)].$$

$$P_2 = [0{,}01 \quad 0{,}15 \quad 0{,}30 \quad 0{,}54];$$

$$P_3 = P_2\pi = [P_1(3) \quad P_2(3) \quad P_3(3) \quad P_4(3)]$$

$$P_3 = [0{,}001 \quad 0{,}063 \quad 0{,}213 \quad 0{,}723]$$

Задача 7.2. Задана матрица перехода π вида:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу финальных вероятностей T вида:

$$T = \lim_{m\to\infty} \pi(m) = \lim_{m\to\infty} \pi^m = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Из **(**7.9**)** имеем для $n = 3$:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= P_1\pi_{11} + P_2\pi_{21} + P_3\pi_{31};\\ P_2 &= P_1\pi_{12} + P_2\pi_{22} + P_3\pi_{32};\\ 1 &= P_1 + P_2 + P_3. \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= 0{,}1\cdot P_1 + 0{,}2\cdot P_2;\\ P_2 &= 0{,}5\cdot P_1 + 0{,}3\cdot P_2 + 0{,}4\cdot P_3;\\ 1 &= P_1 + P_2 + P_3. \end{aligned}\right\} \qquad (7.10)$$

Из (7.10) имеем:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}9\cdot P_1 - 0{,}2\cdot P_2 &= 0;\\ -0{,}5\cdot P_1 + 0{,}7\cdot P_2 - 0{,}4\cdot P_3 &= 0;\\ P_1 &= 1 - P_2 - P_3. \end{aligned}\right\} \qquad (7.11)$$

Из (7.11) имеем:

$$0{,}9(1 - P_2 - P_3) - 0{,}2P_2 = 0;$$
$$-0{,}5(1 - P_2 - P_3) + 0{,}7P_2 - 0{,}4P_3 = 0;$$

или

$$\left.\begin{aligned} 1{,}1P_2 + 0{,}9P_3 &= 0{,}9;\\ 1{,}2P_2 + 0{,}1P_3 &= 0{,}5. \end{aligned}\right\} \qquad (7.12)$$

Решим систему уравнений (7.12), используя правило Крамера. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1{,}1 & 0{,}9\\ 1{,}2 & 0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}11 - 1{,}08 = -0{,}97.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}9 & 0{,}9\\ 0{,}5 & 0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}09 - 0{,}45 = -0{,}36.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1{,}1 & 0{,}9\\ 1{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}55 - 1{,}08 = -0{,}53.$$

$$P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0{,}37. \quad P_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0{,}546. \quad P_2 + P_3 = 0{,}916.$$

$$P_1 = 1 - (P_2 + P_3) = 0{,}084.$$

Таким образом:

$$T = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3\\ P_1 & P_2 & P_3\\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}084 & 0{,}37 & 0{,}546\\ 0{,}084 & 0{,}37 & 0{,}546\\ 0{,}084 & 0{,}37 & 0{,}546 \end{bmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.3. Рассматривается следующий процесс: система представляет собой техническое устройство (ТУ), которая осматривается в определенные моменты времени (скажем, через сутки), и ее состояние регистрируется в отчетной ведомости. Каждый осмотр с регистрацией представляет собой “шаг” процесса. Возможные состояния ТУ следующие: x_1 – полностью исправно; x_2 – частично неисправно, требует наладки; x_3 – обнаружена серьезная неисправность, требует ремонта; x_4 – признано непригодным, списано. Матрица перехода:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

В начальный момент ($t_0 = 0$) ТУ находится в состоянии x_1 (исправно). Найти распределение вероятностей состояний для первых трех шагов ($k = 1,2,3$).

Задача 7.4. Задана матрица перехода π вида:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу финальных вероятностей T вида:

$$T = \lim_{m\to\infty} \pi(m) = \lim_{m\to\infty} \pi^m = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}.$$

Задача 7.5. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: x_1 – ЭВМ полностью исправна; x_2 – ЭВМ имеет незначительные неисправности в ОП, но может решать задачи; x_3 – ЭВМ имеет существенные неисправности, может решать ограниченный класс задач; x_4 – ЭВМ полностью вышла из строя. В начальный момент ЭВМ полностью исправна. Проверка ЭВМ производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3. Процесс, протекающий в системе, можно рассматривать как цепь Маркова с тремя шагами (1-я, 2-я, 3-я проверки ЭВМ). Матрица перехода:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определить вероятности состояний после трех проверок, т.е.:

$$P_3 = [P_1(3) \quad P_2(3) \quad P_3(3) \quad P_4(3)] = ?$$

Задача 7.6. Задана матрица перехода π вида:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу финальных вероятностей T вида:

$$T = \lim_{m\to\infty} \pi(m) = \lim_{m\to\infty} \pi^m = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}.$$

Практическое занятие №8. Определение матрицы *M* среднего времени перехода к некоторому состоянию из других состояний

Теоретические сведения

Матрица M определяется соотношением:

$$M = (I - Z + E \cdot Z_{dg}) \cdot D, \tag{8.1}$$

где

$$Z = \left[I - (\pi - T)\right]^{-1}. \tag{8.2}$$

Здесь I – единичная матрица; π – матрица перехода; T – матрица финальных вероятностей; E – матрица, состоящая из единиц, т.е. все элементы матрицы E равны единице; Z_{dg} – матрица, получающаяся из матрицы Z обнулением внедиагональных элементов; D – диагональная матрица с элементами, равными обратным значениям элементов диагонали матрицы финальных вероятностей T.

Решение типовых задач

Задача 8.1. Система может находиться в одном из трех состояний $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3$. Процесс в системе описывается цепью Маркова. Матрица перехода имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0{,}34 & 0{,}33 \\ 0{,}42 & 0{,}32 & 0{,}26 \\ 0{,}19 & 0{,}43 & 0{,}38 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(}8.3\textbf{)}$$

Определить матрицу M.

Решение. Найдем первоначально матрицу финальных вероятностей T вида:

$$T = \lim_{m\to\infty} \pi(m) = \lim_{m\to\infty} \pi^m = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(}8.4\textbf{)}$$

Из **(**7.9**)** имеем для $n = 3$:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= t_1\pi_{11} + t_2\pi_{21} + t_3\pi_{31}; \\ t_2 &= t_1\pi_{12} + t_2\pi_{22} + t_3\pi_{32}; \\ 1 &= t_1 + t_2 + t_3. \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= 0{,}33 \cdot t_1 + 0{,}42 \cdot t_2 + 0{,}19 \cdot t_3; \\ t_2 &= 0{,}34 \cdot t_1 + 0{,}32 \cdot t_2 + 0{,}43 \cdot t_3; \\ 1 &= t_1 + t_2 + t_3. \end{aligned}\right\}. \qquad \textbf{(}8.5\textbf{)}$$

Решая систему алгебраических уравнений **(**8.5**)**, получим:

$$t_1 = 0{,}32;\ t_2 = 0{,}36;\ t_3 = 0{,}32.$$

Из **(**8.4**)** имеем:

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}32 & 0{,}36 & 0{,}32 \\ 0{,}32 & 0{,}36 & 0{,}32 \\ 0{,}32 & 0{,}36 & 0{,}32 \end{bmatrix}.$$

Определим $\pi - T$. Имеем:

$$\pi - T = \begin{bmatrix} 0{,}01 & -0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}10 & -0{,}04 & -0{,}06 \\ -0{,}13 & 0{,}07 & 0{,}06 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу I. Получим:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу $Z^{-1} = I - (\pi - T)$. Имеем:

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}99 & 0{,}02 & -0{,}01 \\ -0{,}10 & 1{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}13 & -0{,}07 & 0{,}94 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицу Z. Получим:

$$Z = \frac{1}{\left|Z^{-1}\right|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

где $\left|Z^{-1}\right|$ – определитель матрицы Z^{-1}. Здесь:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1{,}04 & 0{,}06 \\ -0{,}07 & 0{,}94 \end{vmatrix} = 0{,}9818; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0{,}99 & -0{,}01 \\ 0{,}13 & 0{,}94 \end{vmatrix} = 0{,}9319;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0{,}99 & 0{,}02 \\ -0{,}1 & 1{,}04 \end{vmatrix} = 1{,}0316; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -0{,}1 & 0{,}06 \\ 0{,}13 & 0{,}94 \end{vmatrix} = 0{,}1018; \text{ и т.д.}$$

Матрица Z имеет вид:

$$Z = \begin{bmatrix} 1{,}01 & -0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}96 & 0{,}06 \\ -0{,}13 & -0{,}07 & 0{,}97 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицы $I - Z, E \cdot Z_{dg}$. Имеем:

$$I - Z = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}01 & -0{,}01 \\ -0{,}1 & 0{,}04 & -0{,}06 \\ 0{,}13 & 0{,}07 & 0{,}03 \end{bmatrix}.$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad Z_{dg} = \begin{bmatrix} 1{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}96 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}97 \end{bmatrix};$$

$$E \cdot Z_{dg} = \begin{bmatrix} 1{,}01 & 0{,}96 & 0{,}97 \\ 1{,}01 & 0{,}96 & 0{,}97 \\ 1{,}01 & 0{,}96 & 0{,}97 \end{bmatrix};$$

$$I - Z + E \cdot Z_{dg} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}97 & 0{,}96 \\ 0{,}91 & 1 & 0{,}9 \\ 1{,}14 & 1{,}03 & 1 \end{bmatrix}.$$

Опередим матрицу D. Получим:

$$D = \begin{bmatrix} 1/t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}126 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}778 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}126 \end{bmatrix};$$

Определим матрицу M. Имеем:

$$M = (I - Z + E \cdot Z_{dg}) \cdot D = \begin{bmatrix} 3{,}126 & 2{,}695 & 3{,}001 \\ 2{,}845 & 2{,}778 & 2{,}885 \\ 3{,}564 & 2{,}861 & 3{,}126 \end{bmatrix}.$$

Каждый элемент полученной матрицы M характеризует среднее время перехода из одного в другое соответствующее состояние. Так, время перехода из первого в первое состояние в среднем равно 3,126 шага, из первого во второе – 2,695 шага, из первого в третье – 3,001 шага и т.д.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.2. Матрица перехода имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Определить матрицу M.

Задача 8.3. Матрица перехода имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Определить матрицу M.

Задача 8.4. Матрица перехода имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Определить матрицу M.

Задача 8.5. Матрица перехода имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Определить матрицу M.

Задача 8.6. Матрица перехода имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Определить матрицу M.

Задача 8.7. Матрица перехода имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Определить матрицу M.

Задача 8.8. Матрица перехода имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Определить матрицу M.

Практическое занятие №9. Каноническое разложение случайного процесса

Теоретические сведения

Пусть случайный процесс $X(t)$ представлен в виде:

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i \varphi_i(t), \tag{9.1}$$

где $m_x(t)$ – математическое ожидание случайного процесса $X(t)$; $\varphi_i(t)$ – неслучайные функции времени; V_i – случайные величины, причем:

$$M[V_i] = 0; \; M[V_i V_j] = 0; \quad \text{если } i \neq j$$

$$M[V_i^2] = D_i.$$

Здесь D_i – дисперсия случайной величины V_i, m – количество неслучайных функций в каноническом разложение.

Соотношение (9.1) называется каноническим разложением случайного процесса $X(t)$.

Соотношение (9.1) соответствует корреляционная функция вида:

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2) \cdot D_i. \tag{9.2}$$

Соотношение (9.2) называется каноническим разложением корреляционной функции $K_x(t_1, t_2)$.

Из (9.2) определим дисперсию $D_x(t)$ случайного процесса $X(t)$.

Имеем:

$$D_x(t) = K_x(t,t) = \sum_{i=1}^{m} \left[\varphi_i(t)\right]^2 \cdot D_i. \qquad (9.3)$$

Решение типовых задач

Задача 9.1. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением:

$$X(t) = 3t + X_1 \cdot \cos\omega t + X_2 \cdot \sin\omega t + X_3 \cdot \cos 2\omega t + X_4 \cdot \sin 2\omega t.$$

Случайные величины X_1, X_2, X_3, X_4 имеют следующие математические ожидания и дисперсии:

$$m_{X_1} = m_{X_2} = m_{X_3} = m_{X_4} = 0;\ D_{X_1} = D_{X_2} = 1;\ D_{X_3} = D_{X_4} = 3.$$

Определить $m_x(t),\ K_x(t_1,t_2), D_x(t).$

Решение. Найдем $m_x(t).$ Имеем:

$$m_x(t) = 3t.$$

Определим $K_x(t_1,t_2)$. Получим:

$$\begin{aligned} K_x(t_1,t_2) &= \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 + \sin\omega t_1 \cdot \sin\omega t_2 + \\ &+ 3\cos 2\omega t_1 \cdot \cos 2\omega t_2 + 3\sin 2\omega t_1 \sin 2\omega t_2 = \\ &= \cos\omega(t_1 - t_2) + 3\cos 2\omega(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Определим $D_x(t)$. Имеем:

$$D_x(t) = K_x(t,t) = 4.$$

Задача 9.2. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением:

$$X(t) = 2t + X_1 \cdot \sin t + X_2 \cdot \cos t.$$

Случайные величины X_1, X_2 имеют следующие математические ожидания и дисперсии:

$$m_{X_1} = m_{X_2} = 0; \quad D_{X_1} = D_{X_2} = 3.$$

Найти каноническое разложение случайной функции $Y(t)$ вида:

$$Y(t) = t \cdot X(t) - t^2.$$

Определить $m_y(t), K_y(t_1,t_2), D_y(t).$

Решение. Найдем каноническое разложение $Y(t)$. Имеем:

$$Y(t) = t^2 + X_1 t \cdot \sin t + X_2 t \cdot \cos t.$$

Определим $m_y(t)$. Получим:

$$m_y(t) = t^2.$$

Найдем $K_y(t_1,t_2)$. Имеем:

$$K_y(t_1,t_2) = 3t_1t_2 \sin t_1 \cdot \sin t_2 + 3t_1t_2 \cos t_1 \cdot \cos t_2 =$$
$$= 3t_1t_2 \cos(t_1 - t_2).$$

Определим $D_y(t)$. Получим:

$$D_y(t) = K_y(t,t) = 3t^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.3. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции:

$$X(t) = X_1 \cdot \sin \omega t + X_2 \cdot \cos \omega t + 3t^2,$$

где X_1, X_2 – некоррелированные случайные величины с

$$m_{X_1} = 2; m_{X_2} = 0{,}1; \quad D_{X_1} = 0{,}01; D_{X_2} = 0{,}04.$$

Задача 9.4. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением:

$$X(t) = \sin t + X_1 \cdot \sin 2t + X_2 \cdot \cos 2t.$$

Случайные величины X_1, X_2 имеют следующие математические ожидания и дисперсии:

$$m_{X_1} = m_{X_2} = 0; \; D_{X_1} = 0{,}2; D_{X_2} = 0{,}3.$$

Найти каноническое разложение случайной функции $Y(t)$ вида:

$$Y(t) = 2t \cdot X(t) + t^3 - 1.$$

Определить $m_y(t)$, $K_y(t_1,t_2)$, $D_y(t)$.

Задача 9.5. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением:

$$X(t) = t + 2 + X_1t^2 + X_2t^3 + X_3t^4.$$

Случайные величины X_1, X_2, X_3 имеют следующие математические ожидания и дисперсии:

$$m_{X_1} = m_{X_2} = m_{X_3} = 0; \; D_{X_1} = 1; D_{X_2} = 2; D_{X_2} = 0{,}1.$$

Найти каноническое разложение случайной функции $Y(t)$ вида:

$$Y(t) = t^2 \cdot \frac{dx(t)}{d(t)} + 3t.$$

Определить $m_y(t)$, $K_y(t_1, t_2)$, $D_y(t)$.

Задача 9.6. Корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ случайной функции $X(t)$ задана каноническим разложением:

$$K_x(t_1, t_2) = 2\sin\omega t_1 \cdot \sin\omega t_2 + 4\cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2.$$

Найти каноническое разложение случайной функции $X(t)$, если ее математическое ожидание: $m_x(t) = t^2 + 3$.

Практическое занятие №10.
Задача детерминированного линейного оптимального управления

Теоретические сведения

Рассмотрим объект управления, возмущенное движение которого описывается в первом приближении уравнением

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t); \quad x(t_0) = x^{(0)}, t_0 = 0, \tag{10.1}$$

где A и B – заданные матрицы чисел размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; $x(t)$ – вектор состояния размерности $n \times 1$; $u(t)$ – вектор управления размерности $m \times 1$.

Рассмотрим также критерий

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left[x^T(t) R_1 x(t) + u^T(t) R_2 u(t) \right] dt \tag{10.2}$$

где R_1 и R_2 – положительно определенные симметрические матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$. Тогда задача определения $u(t)$, $t_0 \le t \le \infty$, при которой критерий минимален, называется задачей детерминированного линейного оптимального регулятора с постоянными параметрами.

Закон управления определяется соотношениями

$$u(t) = -Fx(t), \tag{10.3}$$

где

$$F = R_2^{-1} B^T P. \tag{10.4}$$

Установившееся решение P является решением алгебраического уравнения Риккати

$$0 = R_1 - PBR_2^{-1} B^T P + A^T P + PA. \tag{10.5}$$

P является неотрицательно определенной матрицей.

Решение типовых задач

Задача 10.1. Система управления положением.

Движение антенны может быть описано дифференциальным уравнением

$$J\ddot{\Theta}(t) + B\dot{\Theta}(t) = \tau(t). \tag{10.6}$$

Здесь J – момент инерции всех вращающихся элементов конструкции, включая антенну; B – коэффициент вязкого трения; $\tau(t)$ – момент, развиваемый двигателем. Предполагается, что момент, развиваемый двигателем, пропорционален входному напряжению $\mu(t)$, т.е.

$$\tau(t) = k\mu(t).$$

Определяя переменные состояния $x_1(t) = \Theta(t)$ и $x_2(t) = \dot{\Theta}(t)$, запишем дифференциальное уравнение состояния в виде

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \mu(t), \tag{10.7}$$

где

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T, \quad \alpha = \frac{B}{J}, \quad \chi = \frac{k}{J}.$$

Критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \rho\mu^2(t)]\,dt. \tag{10.8}$$

Определить *u(t)*, устойчивость замкнутой системы.

Решение. В обозначениях (10.1) – (10.5) имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}; \quad u(t) = \mu(t); \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \rho. \tag{10.9}$$

Подставляя (10.9) в (10.5), получим

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\rho} [0 \quad \chi] \cdot P + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}. \tag{10.10}$$

Пусть P_{ij}, i,j =1,2 обозначают элементы матрицы P. Тогда, учитывая $P_{12} = P_{21}$, получим из (10.10)

$$\begin{gathered} 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \chi^2/\rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \end{gathered}. \tag{10.11}$$

Из (10.11) получим следующие алгебраические уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&0 = 1 - \frac{\chi^2}{\rho} P_{12}^2;\\
&0 = -\frac{\chi^2}{\rho} P_{12} P_{22} + P_{11} - \alpha P_{12};\\
&0 = -\frac{\chi^2}{\rho} P_{22}^2 + 2P_{12} - 2\alpha P_{22}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.12)$$

Из (10.12) определим P_{11}, P_{12}, P_{22}. Имеем

$$P_{12} = P_{21} = \frac{\sqrt{\rho}}{\chi}; \qquad (10.13)$$

$$-\frac{\chi^2}{\rho} P_{22}^2 - 2\alpha P_{22} + 2\frac{\sqrt{\rho}}{\chi} = 0;$$

$$P_{22} = \frac{2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\frac{\chi^2}{\rho} \cdot 2\frac{\sqrt{\rho}}{\chi}}}{-2\frac{\chi^2}{\rho}} = \frac{\rho}{\chi^2} \cdot \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}} \right); \qquad (10.14)$$

$$P_{11} = \frac{\chi^2}{\rho} P_{12} P_{22} + \alpha P_{12} = P_{12} \left(\frac{\chi^2}{\rho} P_{22} + \alpha \right) = \frac{\sqrt{\rho}}{\chi} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}; \qquad (10.15)$$

Определим матрицу F из соотношения (10.4). Имеем

$$F = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & \chi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \chi P_{12} & \chi P_{22} \end{bmatrix}; \qquad (10.16)$$

Соотношение (10.16) с учетом (10.13) и (10.14) примет вид

$$F = \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad , \quad \frac{1}{\chi} \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}} \right) \right]. \qquad (10.17)$$

Таким образом

$$\mu(t) = -F \cdot x(t). \qquad (10.18)$$

Подставим (10.18), (10.19) в (10.7). Получим

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad , \quad \frac{1}{\chi} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}} \right) \right] \cdot x(t)$$

или

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\chi}{\sqrt{\rho}} & -\sqrt{\alpha^2 + \frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}} \end{bmatrix} \cdot x(t). \qquad (10.19)$$

Таким образом, оптимальная замкнутая система описывается уравнением (10.19).

Введем обозначение

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\chi}{\sqrt{\rho}} & -\sqrt{\alpha^2+\dfrac{2\chi}{\sqrt{\rho}}} \end{bmatrix}. \tag{10.20}$$

Определим характеристический полином замкнутой системы. Имеем

$$\det(SI-C)=\det\left(\begin{bmatrix} S & -1 \\ \dfrac{\chi}{\sqrt{\rho}} & S+\sqrt{\alpha^2+\dfrac{2\chi}{\sqrt{\rho}}} \end{bmatrix}\right)=S^2+S\sqrt{\alpha^2+\frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}+\frac{\chi}{\sqrt{\rho}}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$S^2+S\sqrt{\alpha^2+\frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}+\frac{\chi}{\sqrt{\rho}}=0. \tag{10.21}$$

Определим корни характеристического уравнения. Имеем

$$S_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha^2+\frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}\pm\sqrt{\alpha^2+\frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}-4\frac{\chi}{\sqrt{\rho}}}\right)$$

или

$$S_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\alpha^2+\frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}\pm\sqrt{\alpha^2-\frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}\right). \tag{10.22}$$

Следовательно, оптимальная замкнутая система устойчива.

Задача 10.2. Задача стабилизации угловой скорости.

Объект состоит из двигателя постоянного тока, управляемого входным напряжением $\mu(t)$, с угловой скоростью вала $\xi(t)$. Система описывается скалярным дифференциальным уравнением состояния

$$\dot{\xi}(t)=-\alpha\xi(t)+\chi\mu(t),\quad \xi(t_0)=\omega_1-\omega_0,\quad \xi(\infty)=0, \tag{10.23}$$

где α и χ – известные константы.

Критерий оптимальности имеет вид

$$J=\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)\cdot 1\cdot x(t)+\rho\mu^2(t)]\,dt. \tag{10.24}$$

В обозначениях (10.1) – (10.5) имеем

$$x(t)=\xi(t);\ u(t)=\mu(t);\ A=-\alpha;\ B=\chi;\ R_1=1;\ R_2=\rho. \tag{10.25}$$

Подставляя (10.25) в (10.5), получим

$$0=1-\frac{\chi^2}{\rho}P^2-2\alpha P. \tag{10.26}$$

Из (10.26) определим P. Имеем

$$P=\frac{\rho}{\chi^2}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\frac{\chi^2}{\rho}}\right)$$

Определим матрицу F из (10.4). Получим

$$F=\frac{1}{\rho}\chi\cdot\frac{\rho}{\chi^2}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\frac{\chi^2}{\rho}}\right)$$

или

$$F=\frac{1}{\chi}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\frac{\chi^2}{\rho}}\right). \tag{10.27}$$

Таким образом

$$\mu(t)=-F\xi(t). \tag{10.28}$$

Подставим (10.28), (10.27) в (10.23). Имеем

$$\dot{\xi}(t)=-\alpha\cdot\xi(t)+\chi\cdot\frac{1}{\chi}\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+\frac{\chi^2}{\rho}}\right)\cdot\xi(t)$$

или

$$\dot{\xi}(t)=-\sqrt{\alpha^2+\frac{\chi^2}{\rho}}\cdot\xi(t) \tag{10.29}$$

Эта система асимптотически устойчива.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.3. Рассмотрим спутник, который вращается относительно своей оси симметрии. Угловое положение спутника в момент t обозначим через $\varphi(t)$, а постоянный момент инерции спутника – через J. С помощью газовых струй к спутнику может быть приложен вращающий момент $\mu(t)$, который рассматривается как управляющее воздействие системы. Трение отсутствует. Определяя переменные состояния $x_1(t)=\varphi(t)$ и $x_2(t)=\dot{\varphi}(t)$, запишем дифференциальное уравнение состояния в виде

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x(t)+\begin{bmatrix}0\\ \beta\end{bmatrix}\cdot\mu(t), \tag{10.30}$$

где

$$x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t)\end{bmatrix}^T,\quad \beta=\frac{1}{J}.$$

Критерий оптимальности имеет вид

$$J=\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\rho\mu^2(t)]\,dt. \tag{10.31}$$

Определить оптимальный закон управления

$$\mu(t)=-F\cdot x(t)$$

и проверить оптимальную замкнутую систему на устойчивость.

Задача 10.4. Система описывается дифференциальным уравнением состояния вида

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t),$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T.$$

Критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \rho u^2(t)]dt.$$

Параметры α_0, α_1, ρ, b имеют значения

$$\alpha_0 = 2;\ \alpha_1 = 1;\ \rho = 0{,}002;\ b = 0{,}787.$$

Определить оптимальный закон управления

$$u(t) = -F \cdot x(t)$$

и проверить оптимальную замкнутую систему на устойчивость.

Задача 10.5. Система описывается дифференциальным уравнением состояния вида

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T.$$

Критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \rho u^2(t)]dt.$$

Определить оптимальный закон управления

$$u(t) = -F \cdot x(t)$$

и проверить оптимальную замкнутую систему на устойчивость.

Задача 10.6. Система описывается дифференциальным уравнением состояния вида

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T.$$

Критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \rho u^2(t)] dt .$$

Определить оптимальный закон управления

$$u(t) = -F \cdot x(t)$$

и проверить оптимальную замкнутую систему на устойчивость.

Задача 10.7. Система описывается дифференциальным уравнением состояния вида

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T .$$

Критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \rho u^2(t)] dt .$$

Параметры α_0, α_1, ρ, b имеют значения

$$\alpha_0 = 2;\ \alpha_1 = 1;\ \rho = 0{,}002;\ b = 0{,}787.$$

Определить оптимальный закон управления

$$u(t) = -F \cdot x(t)$$

и проверить оптимальную замкнутую систему на устойчивость.

Практическое занятие №11. Стохастическое линейное оптимальное регулирование с обратной связью по выходной переменной

Теоретические сведения

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w_1(t), \quad t \ge t_0 \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{11.1}$$

где x_0 – стохастический вектор со средним значением $\bar{x}_0$ и матрицей дисперсий Q_0. Наблюдаемая переменная описывается выражением

$$y(t) = Cx(t) + w_2(t), \quad t \ge t_0 . \tag{11.2}$$

Совместный случайный процесс $w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) & w_2(t) \end{bmatrix}^T$ является белым шумом с интенсивностью

$$\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}, \quad t \ge 0 . \tag{11.3}$$

Тогда задача стохастического линейного оптимального регулирования с обратной связью по выходной переменной является задачей нахождения такого функционала

$$u(t) = f\left[y(\tau), t_0 \le \tau \le t\right], \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{11.4}$$

при котором критерий

$$\sigma = M\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T(t)R_1x(t) + u^T(t)R_2u(t)\right]dt\right\} \tag{11.5}$$

достигает минимума. Здесь R_1, R_2 – симметрические весовые матрицы, такие, что $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $t_0 \le t \le t_1$.

Запишем решение задачи стохастического линейного регулирования с обратной связью по выходной переменной. Для входной переменной имеем

$$u(t) = -F_0\hat{x}(t), \tag{11.6}$$

где

$$F_0 = R_2^{-1}B^TP. \tag{11.7}$$

Здесь P – решение уравнения Риккати

$$0 = R_1 - PBR_2^{-1}B^TP + A^TP + PA. \tag{11.8}$$

Оценка $\hat{x}(t)$ получается как решение уравнения

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K^0\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right],\\ &\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0,\end{aligned} \tag{11.9}$$

где

$$K^0 = QC^TV_2^{-1}. \tag{11.10}$$

Матрица дисперсий Q является решением уравнения Риккати

$$0 = -QC^TV_2^{-1}CQ + AQ + QA^T + V_1. \tag{11.11}$$

Решение типовых задач

Задача 11.1. Система управления положением описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}0\\ \chi\end{bmatrix}\mu(t) + \begin{bmatrix}0\\ \gamma\end{bmatrix}\tau_d(t), \tag{11.12}$$

где $x(t) = \left[x_1(t) \quad x_2(t)\right]^T$; $\tau_d(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_d. Предположим, что наблюдаемая переменная определяется выражением

$$\eta(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x(t) + \nu_m(t), \tag{11.13}$$

где $v_m(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_m.

Критерий оптимальности имеет вид

$$\sigma = M\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T(t)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t) + \rho\mu^2(t)\right]dt\right\}. \tag{11.14}$$

Определить $u(t)$, K^0.

Решение. В обозначениях (11.1) – (11.11) имеем

$$\left.\begin{aligned}
&A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix}0\\ \chi\end{bmatrix};\quad u(t) = \mu(t);\quad R_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\quad R_2 = \rho;\\
&y(t) = \eta(t);\quad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\quad W_1(t) = \begin{bmatrix}0\\ \gamma\end{bmatrix}\tau_d(t);\quad W_2(t) = \nu_m(t);\\
&V_2 = V_m;\quad V_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma^2 V_d\end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

Подставляя (11.15) в (11.8), получим

$$0 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - P\begin{bmatrix}0\\ \chi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}0 & \chi\end{bmatrix}P + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -\alpha\end{bmatrix}P + P\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}. \tag{11.16}$$

Пусть P_{ij}, $i,j = 1,2$ обозначают элементы матрицы P. Тогда, учитывая $P_{12} = P_{21}$, получим из (11.16)

$$\begin{aligned}
0 = &\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \chi^2/\rho\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix} +\\
&+ \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{11.17}$$

Из (11.17) получим следующие алгебраические уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&0 = 1 - \frac{\chi^2}{\rho}P_{12}^2;\\
&0 = -\frac{\chi^2}{\rho}P_{12}P_{22} + P_{11} - \alpha P_{12};\\
&0 = -\frac{\chi^2}{\rho}P_{22}^2 + 2P_{12} - 2\alpha P_{22}.
\end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

Из (10.18) определим P_{11}, P_{12}, P_{22}. Имеем

$$P_{12} = P_{21} = \frac{\sqrt{\rho}}{\chi}; \tag{11.19}$$

$$P_{22} = \frac{\rho}{\chi^2}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}\right); \qquad (11.20)$$

$$P_{11} = \frac{\sqrt{\rho}}{\chi} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}. \qquad (11.21)$$

Определим матрицу F_0 из соотношения (11.7). Имеем

$$F_0 = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & \chi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \chi P_{12} & \chi P_{22} \end{bmatrix}. \qquad (11.22)$$

Соотношение (11.22) с учетом (11.19), (11.20) примет вид

$$F_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad , \quad \frac{1}{\chi}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2\chi}{\sqrt{\rho}}}\right)\right]. \qquad (11.23)$$

Таким образом

$$u(t) = -F_0 \cdot \hat{x}(t). \qquad (11.24)$$

Используя (11.11), определим Q. Пусть q_{ij}, $i,j = 1,2$ обозначают элементы матрицы Q. Тогда, учитывая $q_{12} = q_{21}$, получим из (11.11)

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} Q + Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 V_d \end{bmatrix} - Q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{V_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} Q$$

или

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 V_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/V_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}. \qquad (11.25)$$

Из (11.25) получим следующие алгебраические уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2q_{12} - \frac{1}{V_m} q_{11}^2; \\ 0 &= q_{22} - \alpha q_{12} - \frac{1}{V_m} q_{12} q_{11}; \\ 0 &= -2\alpha q_{22} + \gamma^2 V_d - \frac{1}{V_m} q_{12}^2. \end{aligned}\right\} \qquad (11.26)$$

Из (11.26) определим q_{11}, q_{12}, q_{22}

$$q_{11} = \left(-\alpha + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 2\beta}\right) \cdot V_m; \qquad (11.27)$$

$$q_{12} = \left(\alpha^2 + \beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 2\beta}\right) \cdot V_m ; \tag{11.28}$$

$$q_{22} = \left(-\alpha^3 - 2\alpha\beta + \left(\alpha^2 + \beta\right)\sqrt{\alpha^2 + 2\beta}\right) \cdot V_m ; \tag{11.29}$$

где

$$\beta = \gamma\sqrt{V_d / V_m} . \tag{11.30}$$

Определим матрицу K^0 из (11.10). Имеем

$$K^0 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{V_m} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{V_m} . \tag{11.31}$$

Соотношение (11.31) с учетом (11.27), (11.28) примет вид

$$K^0 = \begin{bmatrix} -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \\ \alpha^2 + \beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 2\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \end{bmatrix}. \tag{11.32}$$

Из (11.9) имеем

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(A - K^0 C - BF_0\right) \cdot \hat{x}(t) + K^0 \cdot y(t) . \tag{11.33}$$

Определим матрицу D вида

$$D = A - K^0 C - BF_0. \tag{11.34}$$

Имеем

$$K^0 C = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{22} & 0 \end{bmatrix};$$

$$BF_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi P_{12} & \chi P_{22} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\rho} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\chi^2}{\rho} P_{12} & \dfrac{\chi^2}{\rho} P_{22} \end{bmatrix};$$

$$A - K^0 C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{22} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{11} & 1 \\ -k_{22} & -\alpha \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} -k_{11} & 1 \\ -k_{22} & -\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\chi^2}{\rho} P_{12} & \dfrac{\chi^2}{\rho} P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{11} & 1 \\ -k_{22} - \dfrac{\chi^2}{\rho} P_{12} & -\alpha - \dfrac{\chi^2}{\rho} P_{22} \end{bmatrix}.$$

Примем следующие численные значения параметров:

$\chi = 0{,}787$ рад$/$В$\cdot$с^2,

$\alpha = 4{,}6$ с$^{-1}$,

$\rho = 0{,}00002$ рад$^2/$В^2,

$$\gamma = 0{,}1\ \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2},$$
$$V_d = 10\ \text{Н}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с},$$
$$V_m = 10^{-7}\ \text{рад}^2/\text{с}.$$

Имеем

$$k_{11} = 40{,}36; \quad k_{22} = 814{,}34; \quad P_{12} = 0{,}00568; \quad P_{22} = 0{,}00047$$

$$D = \begin{bmatrix} -40{,}36 & 1 \\ -990{,}24 & -19{,}155 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы D можно найти в виде

$$\det(SI - D) = \det\left(\begin{bmatrix} S + 40{,}36 & -1 \\ 990{,}24 & S + 19{,}155 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= (S + 40{,}36)(S + 19{,}155) + 990{,}24 = S^2 + 59{,}5S + 1763{,}3$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$S^2 + 59{,}5S + 1763{,}3 = 0\,.$$

Найдем корни характеристического уравнения. Имеем

$$S_{1,2} = \frac{-59{,}5 \pm \sqrt{59{,}5^2 - 4 \cdot 1763{,}3}}{2} = \frac{-59{,}5 \pm \sqrt{-3512{,}95}}{2} = -29{,}75 \pm i59{,}27\,.$$

Таким образом, система, описываемая уравнением (11.33), устойчива.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 11.2. Система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \mu(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \tau_d(t),$$

где $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$; $\tau_d(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_d. Предположим, что наблюдаемая переменная определяется выражением

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \nu_m(t),$$

где $v_m(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_m.

Критерий оптимальности имеет вид

$$\sigma = M\left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left[x^T(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \rho \cdot \mu^2(t) \right] dt \right\}$$

Параметры имеют следующие значения:

$$\beta = 0{,}787; \quad \rho = 0{,}002; \quad \gamma = 0{,}1; \quad V_d = 10; \quad V_m = 10^{-4}.$$

Определить матрицы F_0, K^0; проверить на устойчивость систему

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(A - K^0 C - BF_0\right)\hat{x}(t) + K^0 y(t).$$

Задача 11.3. Система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \mu(t) + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \tau_d(t),$$

где $x(t) = \left[x_1(t) \quad x_2(t)\right]^T$; $\tau_d(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_d. Предположим, что наблюдаемая переменная определяется выражением

$$\eta(t) = \left[0 \quad 1\right] x(t) + \nu_m(t),$$

где $v_m(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_m.
Критерий оптимальности имеет вид

$$\sigma = M\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T(t)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \rho \cdot \mu^2(t)\right]dt\right\}$$

Параметры имеют следующие значения:

$$\beta = 0{,}787; \quad \rho = 0{,}002; \quad \gamma = 0{,}1; \quad V_d = 10; \quad V_m = 10^{-4}.$$

Определить матрицы F_0, K^0; проверить на устойчивость систему

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(A - K^0 C - BF_0\right)\hat{x}(t) + K^0 y(t).$$

Задача 11.4. Система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \tau_d(t),$$

где $x(t) = \left[x_1(t) \quad x_2(t)\right]^T$; $\tau_d(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_d. Наблюдаемая переменная определяется выражением

$$\eta(t) = \left[0 \quad 1\right] x(t) + \nu_m(t),$$

где $v_m(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_m.

Критерий оптимальности имеет вид

$$\sigma = M\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T(t)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \rho \cdot u^2(t)\right]dt\right\}$$

Параметры имеют следующие значения:

$$b = 0{,}787; \quad \alpha = 4{,}6; \quad \rho = 0{,}00002; \quad \gamma = 0{,}1; \quad V_d = 10; \quad V_m = 10^{-7}.$$

Определить матрицы F_0, K^0; проверить на устойчивость систему

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(A - K^0 C - BF_0\right)\hat{x}(t) + K^0 y(t).$$

Задача 11.5. Система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = -\alpha \cdot x(t) + b \cdot u(t) + \gamma \cdot \tau_d(t),$$

где $\tau_d(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_d. Наблюдаемая переменная определяется выражением

$$y(t) = 1 \cdot x(t) + \nu_m(t),$$

где $v_m(t)$ – белый шум с постоянной скалярной интенсивностью V_m.

Критерий оптимальности имеет вид

$$\sigma = M\left\{\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T(t) \cdot 1 \cdot x(t) + \rho \cdot u^2(t)\right]dt\right\}.$$

Параметры имеют следующие значения:

$$b = 0{,}787; \quad \alpha = 4{,}6; \quad \rho = 0{,}002; \quad \gamma = 0{,}1; \quad V_d = 10; \quad V_m = 10^{-4}.$$

Определить матрицы F_0, K^0; проверить на устойчивость систему

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(A - K^0 C - BF_0\right)\hat{x}(t) + K^0 y(t).$$

Практическое занятие №12.
Система массового обслуживания с ожиданием

Теоретические сведения

Система массового обслуживания (СМО) называется системой с ожиданием, если заявка, заставшая все каналы обслуживания занятыми, становится в очередь и ждет, пока не освободится какой-нибудь канал.

Рассмотрим n-канальную СМО. Поток заявок пуассоновский с интенсивностью λ. λ представляет собой среднее число заявок, приходящихся на единицу времени. Поток обслуживания заявок одним каналом пуассоновский с интенсивностью μ. μ представляет собой среднее число обслуженных заявок, приходящееся на единицу времени. 2 занятых канала имеют интенсивность обслуживания заявок, равную 2μ. k занятых каналов имеют интенсивность обслуживания заявок, равную $k\mu$. Число мест в очереди неограниченно.

Составим перечень состояний системы. Имеем:

x_0 – все каналы свободны

x_1 – занят 1 канал, остальные свободны

x_2 – занято 2 канала, остальные свободны

$\vdots$

x_k – занято k каналов, остальные свободны

$\vdots$

x_n – заняты все n каналов

x_{n+1} – заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди

x_{n+2} – заняты все n каналов, две заявки стоят в очереди

$\vdots$

x_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок стоят в очереди

Приведем граф состояния СМО. Имеем

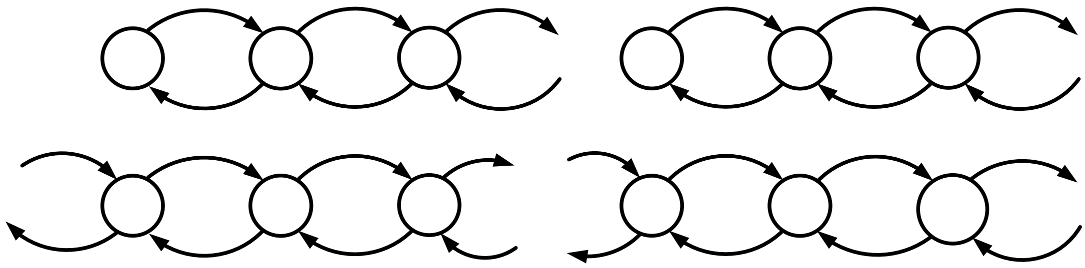

Рис. 12.1

Обозначим через $P_k(t)$ (k = 0, 1, …, $n+r$, …) вероятности состояний системы в момент времени t. Правило составления дифференциальных уравнений для вероятностей $P_0(t)$, $P_1(t)$, …, $P_{n+r}(t)$, … следующее:

1) Производная вероятности данного состояния равно определенной сумме слагаемых.

2) Число слагаемых равно числу стрелок, соединяющих данное состояние со всеми остальными состояниями.

3) Слагаемое берется со знаком “+”, если стрелка направлена к данному состоянию и со знаком “–”, если стрелка направлена от данного состояния.

4) Каждое слагаемое равно произведению вероятности того состояния, из которого выходит стрелка, на интенсивность пуассоновского потока по этой стрелке.

Пользуясь правилом построения дифференциальных уравнений на основе графа состояний, получим систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний вида

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t);\\
&\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t) + 2\mu \cdot P_2(t);\\
&\frac{dP_2(t)}{dt} = -(\lambda + 2\mu) \cdot P_2(t) + \lambda \cdot P_1(t) + 3\mu \cdot P_3(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) \cdot P_k(t) + \lambda \cdot P_{k-1}(t) + (k+1)\mu \cdot P_{k+1}(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu) \cdot P_n(t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t) + n\mu \cdot P_{n+1}(t);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dP_{n+r}(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu) \cdot P_{n+r}(t) + \lambda \cdot P_{n+r-1}(t) + n\mu \cdot P_{n+r+1}(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

Так как СМО может находиться только в одном из состояний, то справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1\,. \qquad (12.2)$$

В установившемся режиме имеем

$$\left.\begin{aligned}
&P_k(t) = P_k = const;\\
&\frac{dP_k(t)}{dt} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.3)$$

В результате получим из (12.1) систему алгебраических уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}
&0 = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1;\\
&0 = -(\lambda + \mu) \cdot P_1 + \lambda \cdot P_0 + 2\mu \cdot P_2;\\
&0 = -(\lambda + 2\mu) \cdot P_2 + \lambda \cdot P_1 + 3\mu \cdot P_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = -(\lambda + k\mu) \cdot P_k + \lambda \cdot P_{k-1} + (k+1)\mu \cdot P_{k+1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = -(\lambda + n\mu) \cdot P_n + \lambda \cdot P_{n-1} + n\mu \cdot P_{n+1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = -(\lambda + n\mu) \cdot P_{n+r} + \lambda \cdot P_{n+r-1} + n\mu \cdot P_{n+r+1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.4)$$

Из 1-го уравнения системы (12.4) имеем

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho \cdot P_0, \tag{12.5}$$

где

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{12.6}$$

Из 2-го уравнения системы (12.4) получим

$$-\lambda P_1 + 2\mu P_2 = 0; \quad P_2 = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} P_1 = \frac{\rho^2}{2} P_0.$$

Из 3-го уравнения системы (12.4) имеем

$$-\lambda P_2 + 3\mu P_3 = 0; \quad P_3 = \frac{1}{3}\frac{\lambda}{\mu} P_2 = \frac{\rho^3}{3!} P_0.$$

Для любого $k < n$ получим

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0. \tag{12.7}$$

Для $k = n$ имеем

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0. \tag{12.8}$$

Для $k = n+1$ имеем

$$P_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} P_0.$$

Для $k = n+2$ имеем

$$P_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!} P_0.$$

Для $k = n+r$ имеем

$$P_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} P_0; \quad r = 1, 2, \dots . \tag{12.9}$$

Из уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

имеем

$$\left(P_0 + \rho P_0 + \frac{\rho^2}{2!} P_0 + \frac{\rho^3}{3!} P_0 + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} P_0 + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} P_0 + \cdots + \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} P_0 + \cdots \right) = 1$$

Откуда

$$P_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n} + \frac{\rho^2}{n^2} + \frac{\rho^3}{n^3} + \cdots + \frac{\rho^r}{n^r} + \cdots \right)}. \tag{12.10}$$

Имеем

$$\frac{\rho}{n}+\frac{\rho^2}{n^2}+\frac{\rho^3}{n^3}+\cdots+\frac{\rho^r}{n^r}=\frac{\rho}{n}\underbrace{\left(1+\frac{\rho}{n}+\frac{\rho^2}{n^2}+\cdots+\frac{\rho^r}{n^r}+\cdots\right)}_{\text{геометрическая прогрессия}}. \qquad (12.11)$$

Введем обозначение

$$S_r=1+\frac{\rho}{n}+\frac{\rho^2}{n^2}+\cdots+\frac{\rho^r}{n^r}. \qquad (12.12)$$

Пусть

$$\frac{\rho}{n}<1.$$

Тогда

$$S=\lim_{r\to\infty}S_r=\frac{1}{1-\frac{\rho}{n}}. \qquad (12.13)$$

Соотношение (12.10) с учетом (12.11) – (12.13) примет вид

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{\rho}{n-\rho}}. \qquad (12.14)$$

Определим среднее число заявок в очереди, умножая возможное число заявок в очереди на вероятность того, что именно это число заявок будет в очереди, и складывая результаты

$$\bar{r}=1\cdot P_{n+1}+2\cdot P_{n+2}+3\cdot P_{n+3}+\cdots+r\cdot P_{n+r}+\cdots=$$
$$=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0+2\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}P_0+3\frac{\rho^{n+3}}{n^3\cdot n!}P_0+\cdots+r\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}P_0+\cdots=$$
$$=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0\left[1+2\left(\frac{\rho}{n}\right)^1+3\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\cdots+r\left(\frac{\rho}{n}\right)^{r-1}+\cdots\right]$$

Учтем следующее равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}. \qquad (12.15)$$

Следовательно

$$\bar{r}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\cdot\frac{P_0}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}. \qquad (12.16)$$

Определим среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{\tau}_{ож}$ до выполнения заявки СМО. Если заявка застанет не все каналы занятыми, то ей не придется ждать. Если заявка придет в момент, когда заняты все n каналов, но очереди нет, то она будет ждать обслуживания в среднем время, равное $\frac{1}{n\mu}$, где $n\mu$ – среднее число заявок, обслуженное СМО в единицу времени; $\frac{1}{n\mu}$ – среднее время обслуживания одной заявки. Если заявка застанет одну заявку в очереди, то ей придется ждать в очереди время, равное $\frac{2}{n\mu}$. Если заявка застанет в очереди r заявок, то ей придется ждать в очереди время $\frac{r+1}{n\mu}$. Следовательно

$$\bar{\tau}_{\text{ож}} = \frac{1}{n\mu}P_n + \frac{2}{n\mu}P_{n+1} + \frac{3}{n\mu}P_{n+2} + \cdots + \frac{r+1}{n\mu}P_{n+r} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{n\mu}\left[\frac{\rho^n}{n!}P_0 + \frac{2\rho^{n+1}}{n \cdot n!}P_0 + \frac{3\rho^{n+2}}{n^2 \cdot n!}P_0 + \cdots + (r+1)\frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}P_0 + \cdots\right] =$$

$$= \frac{1}{n\mu}P_0\frac{\rho^n}{n!}\left[1 + 2\left(\frac{\rho}{n}\right)^1 + 3\left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\rho}{n}\right)^3 + \cdots + (r+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^r + \cdots\right]$$

Полученное соотношение с учетом (12.15) примет вид

$$\bar{\tau}_{\text{ож}} = \frac{1}{n \cdot n!\mu}P_0\rho^n \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}. \tag{12.17}$$

Среднее число простаивающих каналов обслуживания заявок определяется формулой

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P_k. \tag{12.18}$$

Среднее время обслуживания

$$\bar{t}_{\text{об}} = \frac{1}{\mu} = \bar{\tau}_{\text{об}}, \tag{12.19}$$

т.е. совпадает со средней длительностью обслуживания заявки.

Среднее время пребывания заявки в СМО с ожидание

$$\bar{t}_c = \bar{\tau}_{\text{ож}} + \bar{t}_{\text{об}}. \tag{12.20}$$

Среднее число занятых каналов $\bar{K}$ равно

$$\bar{K} = \bar{t}_{\text{об}}\lambda = \bar{\tau}_{\text{об}}\lambda = \lambda/\mu = \rho. \tag{12.21}$$

Значение критерия эффективности

$$E = e_{\text{н}}(n - \bar{K}), \tag{12.22}$$

где $e_н$ – штраф за неиспользование одного канала обслуживания.

Загрузка СМО

$$\psi = \overline{K}/n. \tag{12.23}$$

Среднее число заявок в СМО

$$\overline{Z} = \overline{r} + \overline{K}. \tag{12.24}$$

Рассмотрим еще один класс СМО – СМО замкнутого типа. Для замкнутых СМО характерно конечное число заявок, циркулирующих в системе “источник заявок – СМО”. Параметры суммарного входного потока заявок СМО зависят от состояния самой СМО.

Примером замкнутой СМО может служить вычислительная система оперативной обработки с диалоговым режимом работы. Система оперативной обработки содержит M терминалов T_1-T_M, за каждым из которых работает пользователь П, формирующий запросы на обслуживание заявки (рис. 12.2).

Обслуживание запросов выполняется совокупностью из n однотипных ЭВМ ($n \le M$), рассматриваемых без детализации внутренней структуры как каналы с длительностью обслуживания, распределенной по экспоненциальному закону с математическим ожиданием $\overline{\tau}_{об}$. Все ресурсы некоторой ЭВМ (канала обслуживания) полностью монополизируется назначенной на обслуживание заявкой до конца ее обслуживания. Заявка, заставшая все каналы занятыми, занимает место в очереди, число мест в которой $r = M - n$; заявки считаются терпеливыми, т.е. попав в СМО, непременно дождутся конца обслуживания.

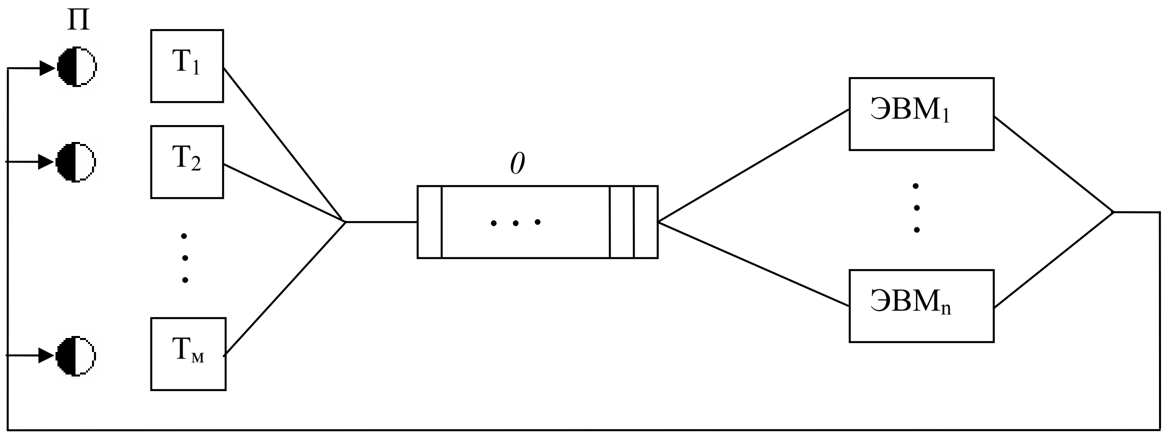

Рис. 12.2

Формирование нового запроса пользователь начинает лишь после получения ответа на предыдущий запрос, причем время, необходимое пользователю для формирования очередного запроса, будем считать распределенным экспоненциально с математическим ожиданием $\overline{T}$, что позволяет рассматривать пользователя как источник пуассоновского потока заявок с интенсивностью $\lambda = 1/\overline{T}$.

Построим граф состояний такой СМО (рис. 12.3).

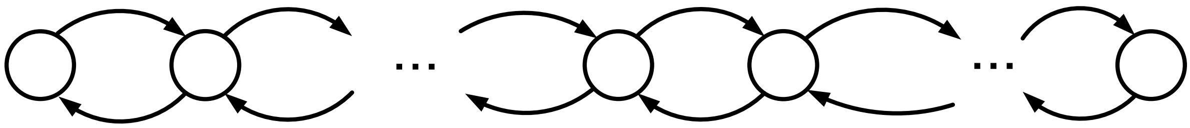

Рис. 12.3

Возможные состояния системы будем связывать с числом пользователей, ожидающих ответа на сделанные запросы, т.е. с числом заявок, находящихся на обслуживании и в очереди; x_0 – в системе нет ни одной заявки, ЭВМ простаивают, все пользователи независимо друг от друга заняты подготовкой запросов; следовательно, интенсивность суммарного потока заявок, переводящего СМО в состояние x_1, равна $M\lambda$; x_1 – в системе одна заявка, обслуживанием которой занята одна ЭВМ, пославший запрос пользователь ждет ответа на свой запрос и не формирует новых запросов; следовательно, интенсивность потока перехода в состояние x_2 равна $(M\text{-}1)\lambda$; интенсивность потока переходов в состояние x_0 связана с интенсивностью суммарного потока обслуживаний, равной произведению числа занятых ЭВМ на интенсивность потока обслуживаний одной ЭВМ, т.е. 1μ, ...; x_n – в системе n заявок, все ЭВМ заняты обслуживанием запросов пользователей, очереди на обслуживание еще нет, интенсивность суммарного потока заявок равна $(M\text{-}n)\lambda$, суммарного потока обслуживаний – $n\mu$; x_{n+1} – в системе $n+1$ заявка, все ЭВМ заняты, одна заявка стоит в очереди на обслуживание, интенсивность суммарного потока заявок равна $[M\text{-}(n+1)]\lambda = [M\text{-}(n+r)]\,\lambda$, где $r=1$ – длина очереди, суммарный поток обслуживаний имеет интенсивность $n\mu$; x_{n+r} – в системе $n+r=M$ заявок, т.е. все пользователи сформировали и ввели в систему запросы на обслуживание, n ЭВМ обслуживает n заявок, $r=M\text{-}n$ заявок находится в очереди на обслуживание, интенсивность суммарного потока заявок равна нулю, так как все пользователи ждут ответа на свои запросы, интенсивность суммарного потока обслуживания равна $n\mu$.

Предельные вероятности состояний:

$$P_i = \frac{M!\rho^i}{(M-i)!i!}P_0, \quad i=\overline{1,n}; \tag{12.25}$$

$$P_{n+l} = \frac{M!\rho^{n+l}}{(M-n-l)!n^l n!}P_0, \quad l=\overline{1,r}; \tag{12.26}$$

$$P_0 = \left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{M!\rho^i}{(M-i)!i!}+\sum_{l=1}^{r}\frac{M!\rho^{n+l}}{(M-n-l)!n!n^l}\right]^{-1}. \tag{12.27}$$

Среднее число занятых каналов обслуживания $\overline{K}$ можно найти как математическое ожидание числа занятых каналов:

$$\overline{K}=\sum_{i=1}^{n} iP_i+n\left(1-\sum_{i=0}^{n} P_i\right). \qquad (12.28)$$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{t}_{\text{ож}}=\frac{1}{n\mu}P_n+\sum_{l=1}^{r-1}\frac{l+1}{n\mu}P_{n+l}. \qquad (12.29)$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{t}_{\text{с}}=\bar{t}_{\text{ож}}+\bar{t}_{\text{об}}=\bar{t}_{\text{ож}}+\bar{\tau}_{\text{об}}, \qquad (12.30)$$

где $\bar{t}_{\text{об}}$ – среднее время обслуживания; $\bar{\tau}_{\text{об}}$ – средняя длительность обслуживания заявки.

Среднее число заявок, связанных с системой

$$\overline{Z}=M-\overline{K}/\rho. \qquad (12.31)$$

Зная $\overline{Z}$ и $\overline{K}$, найдем среднюю длину очереди

$$\bar{l}=\overline{Z}-\overline{K}. \qquad (12.32)$$

Загрузка системы

$$\psi=\overline{K}/n. \qquad (12.33)$$

Значение критерия эффективности

$$E=e_{\text{ож}}\cdot\bar{t}_{\text{ож}}+e_H(n-\overline{K}), \qquad (12.34)$$

где $e_{\text{ож}}$ – штраф за ожидание заявки в очереди.

Решение типовых задач

Задача 12.1. Определить число кладовщиков, распределяющих инструмент, оптимальное с точки зрения минимума потерь рабочего времени как у рабочих, так и у кладовщиков. Данные для решения

$\lambda=1{,}6\frac{\text{обращений}}{\text{ед. времени}}$ – интенсивность обращения рабочих к кладовщикам;

$\mu=0{,}91\frac{\text{заявки}}{\text{ед. времени}}$ – интенсивность обслуживания заявок рабочих на инструмент одним кладовщиком;

$C_{\text{р}}=6$ ед. стоимости – стоимость 1 часа простоя одного рабочего;

$C_{\text{к}}=3$ ед. стоимости – стоимость 1 часа простоя одного кладовщика.

Решение. Пусть за смену за инструментом обратится $N_{\text{р}}$ рабочих. Если каждый из них в среднем проведет в очереди время $\bar{\tau}_{\text{ож}}$, то потери составят

$$S_{\text{р}}=C_{\text{р}}N_{\text{р}}\bar{\tau}_{\text{ож}}[\text{ед. стоимости}].$$

Если в течение смены каждый кладовщик будет время $\bar{\tau}_{\text{пр}}$ ожидать прихода рабочих, то потери составят

$$S_{\text{к}} = C_{\text{к}} n \bar{\tau}_{\text{пр}} [\text{ед. стоимости}],$$

где n – число кладовщиков.

Суммарные потери

$$S = S_{\text{р}} + S_{\text{к}} = C_{\text{р}} N_{\text{р}} \bar{\tau}_{\text{ож}} + C_{\text{к}} n \bar{\tau}_{\text{пр}}.$$

Так как $\bar{\tau}_{\text{ож}} = f_1(n), \quad \bar{\tau}_{\text{пр}} = f_2(n)$,

то

$$S = C_{\text{р}} N_{\text{р}} f_1(n) + C_{\text{к}} n f_2(n)$$

является функцией от n. Следовательно, задача сводится к определению такого значения n, при котором величина S обращается в минимум. Т.о., задача сводится к поиску зависимости $\bar{\tau}_{\text{ож}}$ и $\bar{\tau}_{\text{пр}}$ от n.

Организационно система раздачи инструмента построена таким образом, что имеется одно окно раздачи (общая очередь рабочих), которое обслуживается несколькими кладовщиками. Т.о., имеем модель многоканальной СМО с ожиданием и с одной общей очередью. Число мест в очереди неограничено.

Переходим к числовым расчетам, связанным с определением оптимального значения n. Вычислять $\bar{\tau}_{\text{ож}}$ будем только для тех случаев, когда $\frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$. Поэтому для n=1 расчетов вести не следует, т.к. $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1{,}6}{0{,}91} \approx 1.76 > 1$, а это значит, что один кладовщик не справляется с очередью и очередь увеличивается непрерывно в течение всей смены.

Определим по формулам (12.14), (12.16), (12.17) $\bar{\tau}_{\text{ож}}$ и $\bar{r}$ для различных значений n. Для n = 2 имеем

$$\rho = 1{,}76; \quad \frac{\rho}{n} = \frac{1{,}76}{2} = 0{,}88 < 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 1{,}76 + \frac{1{,}76^2}{2} + \frac{1{,}76^2 \cdot 1{,}76}{2!(2-1{,}76)}} = 0{,}066$$

$$\bar{\tau}_{\text{ож}} = \frac{1 \cdot 1{,}76^2 \cdot 0{,}066}{2 \cdot 2! \cdot 0{,}91(1-0{,}88)^2} = 3{,}9\,[\text{мин}]; \quad \bar{r} = \frac{1{,}76^2 \cdot 0{,}066}{2 \cdot 2!(1-0{,}88)^2} = 6{,}3.$$

Для n = 3 имеем

$$\frac{\rho}{n} = \frac{1{,}76}{3} = 0{,}58;$$

$$P_0 = \left[1 + 1{,}76 + \frac{1{,}76^2}{2!} + \frac{1{,}76^3}{3!} + \frac{1{,}76^3 \cdot 1{,}76}{3!(3-1{,}76)}\right]^{-1} = 0{,}16;$$

$$\overline{\tau}_{\text{ож}} = 0{,}26\,[\text{мин}]; \quad \overline{r} = 0{,}43.$$

Для n = 4 получим

$$\rho/n = 0{,}44; \quad P_0 = 0{,}168; \quad \overline{\tau}_{\text{ож}} = 0{,}13\,[\text{мин}]; \quad \overline{r} = 0{,}208.$$

Если принять за единицу времени минуту, то в течение 8-часового рабочего дня на пункт раздачи инструмента придет число рабочих

$$N_{\text{р}} = \int_0^t \lambda dt = \lambda t = 1{,}6 \frac{\text{обращений}}{\text{мин}} 8 \cdot 60 = 768.$$

Т.о. число заявок в течение рабочего дня равно 768. Один кладовщик затрачивает на выполнение одной заявки в среднем время, равное $\frac{1}{\mu}$[мин]. Тогда общее время занятости кладовщиков равно

$$N_{\text{р}} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{768}{0{,}91} = 845 \text{ мин} \approx 14{,}08 \text{ часов}$$

Ежедневная продолжительность простоя кладовщиков определяется по формуле

$$\overline{\tau}_{\text{пр}} = 8 \cdot n - 14{,}08$$

для n = 2

$$\overline{\tau}_{\text{пр}} = 16 - 14{,}08 = 1{,}92\,[\text{час}]$$

для n = 3

$$\overline{\tau}_{\text{пр}} = 8 \cdot 3 - 14{,}08 = 9{,}92\,[\text{час}]$$

для n = 4

$$\overline{\tau}_{\text{пр}} = 8 \cdot 4 - 14{,}08 = 17{,}92\,[\text{час}]$$

Для каждого из этих случаев вычислим время, потерянное рабочими из-за ожидания в очереди. Имеем

$$\overline{\tau}_{\text{п}} = N_{\text{р}} \overline{\tau}_{\text{ож}}.$$

Для n = 2 имеем

$$\overline{\tau}_{\text{п}} = 768 \cdot 3{,}9 = 50\,[\text{час}]$$

Для n = 3 получим

$$\overline{\tau}_{\text{п}} = 768 \cdot 0{,}26 = 3{,}32\,[\text{час}]$$

Для n = 4 имеем

$$\overline{\tau}_{\text{п}} = 768 \cdot 0{,}13 = 1{,}66\,[\text{час}]$$

Общая ежедневная стоимость времени, потерянного рабочими и кладовщиками

$$S = C_{\text{р}} \overline{\tau}_{\text{п}} + C_{\text{к}} \overline{\tau}_{\text{пр}} = 6\overline{\tau}_{\text{п}} + 3\overline{\tau}_{\text{пр}}.$$

Для n = 2 имеем

$$S = 6 \cdot 50 + 3 \cdot 1{,}92 = 305{,}76.$$

Для n =3 получим

$$S = 6 \cdot 3{,}32 + 3 \cdot 9{,}92 = 49{,}68.$$

Для n =4 имеем

$$S = 6 \cdot 1{,}66 + 3 \cdot 17{,}92 = 63{,}72.$$

Следовательно, S достигает минимума при n = 3.

Таким образом, три кладовщика в данных условиях обеспечивают минимум потерь, связанных со случайным характером обслуживания рабочих.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 12.2. Имеем СМО с ожиданием. Отсутствие ограничений на время пребывания заявки в системе и “бесконечное” число мест в очереди приводят к СМО без потерь. Число каналов СМО n = 2, интенсивность потока обслуживания одного канала μ = 20 $с^{-1}$. Суммарный входящий поток заявок – пуассоновский с интенсивностью λ = 30 $с^{-1}$. Найти $\bar{r}$, $\bar{\tau}_{\text{ож}}$, P_k, $k = \overline{0, n+r}$, N_0, $\bar{t}_{\text{об}}$, $\bar{t}_{\text{с}}$, $\overline{K}$, ψ, $\overline{Z}$, E, если $e_{\text{Н}} = 10 \, {}^{\text{ед.}}\!/_{\text{канал}}$.

Задача 12.3. Рассмотрим вычислительную систему оперативной обработки с диалоговым режимом работы (рис. 12.2.). Число входящих в систему однотипных ЭВМ (каналов обслуживания) n = 2, быстродействие их процессоров $\overline{B} = 10^4 \, {}^{\text{опер.}}\!/_{\text{с}}$, трудоемкость обработки запросов распределена по экспоненциальному закону с математическим ожиданием $\overline{O} = 5 \cdot 10^5$ опер. Число пользователей M = 6 соответствует числу терминалов. Время необходимое пользователю для формирования нового запроса и ввода его в систему, распределено по экспоненциальному закону с математическим ожиданием $\overline{T} = 100$ с. Значение штрафов $e_{\text{ож}} = 1 \, {}^{\text{усл.ед.}}\!/_{\text{с}}$, $e_{\text{Н}} = 10 \, {}^{\text{усл.ед.}}\!/_{\text{канал}}$. Таким образом, мы имеем замкнутую многоканальную СМО. Средняя длительность обслуживания $\bar{\tau}_{\text{об}} = \overline{O}/\overline{B} = 5 \cdot 10^5 / 10^4 = 50\ c$. Интенсивность потока заявок от одного источника $\lambda = 1/\overline{T} = 10^{-2} c^{-1}$. Число мест в очереди $r = M - n$ = 4. Приведенная интенсивность потока заявок $\rho = \lambda/\mu = \lambda\bar{\tau}_{\text{об}} = 10^{-2} \cdot 50 = 0{,}5$. Определить $P_i, i = \overline{0, n+r}, \overline{K}, \bar{t}_{\text{ож}}, \bar{t}_c, \overline{Z}, \bar{l}, \psi, E$.

Задача 12.4. Ателье по ремонту различной радиоаппаратуры имеет n = 5 опытных мастеров. В среднем в течение рабочего дня от населения поступает в ремонт λ = 10 радиоаппаратов. Общее число радиоаппаратов, находящихся в эксплуатации у населения, очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя. Поэтому есть все основания полагать, что поток заявок на ремонт аппаратуры является случайным, пуассоновским. В свою очередь, каждый аппарат в зависимости от характера неисправности также требует различного, случайного времени на ремонт. Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности полученного повреждения, квалификации мастера и множества других причин. Пусть статистика показала, что в среднем в течение рабочего дня каждый из мастеров в ателье успевает отремонтировать μ = 2,5 радиоаппарата. Найти $\bar{r}, \bar{\tau}_{\text{ож}}, P_k, k = \overline{0, n+r}, N_0, \bar{t}_{\text{об}}, \bar{t}_{\text{с}}, \overline{K}, \psi, \overline{Z}, E$, если $e_{\text{Н}} = 10^{\text{усл. ед.}}/_{\text{канал}}$.

Задача 12.5. Морской порт имеет n = 5 причалов для разгрузки сухогрузных судов. В среднем в течение месяца в порт прибывает с грузами около 20 судов большого тоннажа. Поступление судов в порт носит случайный характер, так как они выходят из различных портов и покрывают различные расстояния до пункта разгрузки. Кроме того, на скорость движения судов влияет погода. Проведенная статистика частоты прихода судов в порт показала, что поступающие на разгрузку суда образуют пуассоновский поток. Время разгрузки каждого судна является также случайной величиной, которая зависит от тоннажа судов, особенности груза и многих других причин. В среднем в течение месяца разгружается 6 судов. Найти $\bar{r}, \bar{\tau}_{\text{ож}}, P_k, k = \overline{0, n+r}, N_0, \bar{t}_{\text{об}}, \bar{t}_{\text{с}}, \overline{K}, \psi, \overline{Z}, E$, если $e_{\text{Н}} = 15^{\text{усл. ед.}}/_{\text{канал}}$.

Задача 12.6. На вход трехканальной системы с неограниченным временем ожидания поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ = 4 (заявки в час). Среднее время обслуживания одной заявки $m_{\text{tоб}}$ = 30 мин. Найти $\bar{r}, \bar{\tau}_{\text{ож}}, P_k, k = \overline{0, n+r}, N_0, \bar{t}_{\text{об}}, \bar{t}_{\text{с}}, \overline{K}, \psi, \overline{Z}, E$, если $e_{\text{Н}} = 10^{\text{усл. ед.}}/_{\text{канал}}$.

Практическое занятие №13.
Статистическое упреждение (прогнозирование)

Теоретические сведения

Назовем задачей статистического упреждения (прогнозирования) способ нахождения при отсутствии помех [$n(t)$ = 0] передаточной функции $\Phi(j\omega)$ системы, дающей минимум среднего значения квадрата ошибки

$$\bar{\varepsilon}^2 = M\left\{\left[m(t+t_0) - Z(t)\right]^2\right\}$$

между величиной $Z(t)$ на выходе в момент времени t и величиной $m(t + t_0)$ ($m(t)$ – полезный сигнал) на входе в некоторый будущий момент времени t_0 (рис 13.1).

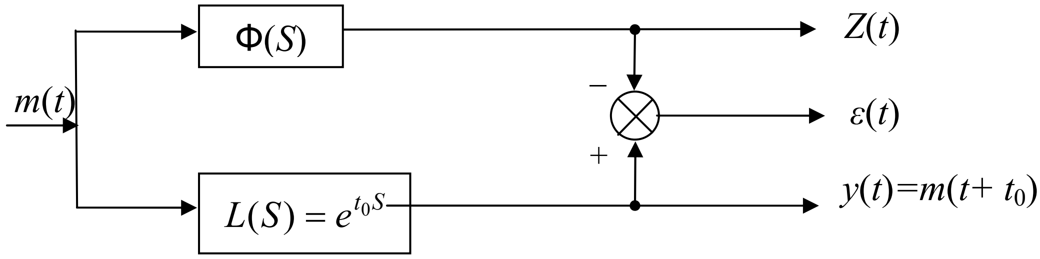

Рис. 13.1

Итак, в рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned} &y(t) = m(t+t_0); \quad L(j\omega) = e^{j\omega t_0};\\ &S_{ym}(\omega) = e^{j\omega t_0} S_m(\omega);\\ &\left|\Psi(j\omega)\right|^2 = S_m(\omega); \quad \left|\Psi(j\omega)\right|^2 = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega), \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

где $S_m(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $m(t)$.

Формула для оптимальной передаточной функции упреждающей системы имеет вид

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(j\omega) e^{j\omega(t+t_0)} d\omega. \tag{13.2}$$

Предположим, что нам задано аналитическое выражение для спектральной плотности $S_m(\omega)$ входного сигнала $m(t)$ в виде дробно-рациональной функции от ω:

$$S_m(\omega) = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + \cdots + b_\mu \omega^{2\mu}}{a_0 + a_1\omega^2 + \cdots + a_\nu \omega^{2\nu}}. \tag{13.3}$$

Применим формулу (13.2) для вычисления передаточной функции, обеспечивающей минимум среднего значения квадрата ошибки упреждения.

Прежде всего, необходимо найти нули и полюсы функции $S_m(\omega)$. Имея в виду, что функция $S_m(\omega)$ – четная, и предполагая для простоты выкладок, что все нули и полюсы простые, можем записать

$$S_m(\omega) = C_m \frac{(\omega-\gamma_1)\ldots(\omega-\gamma_\mu)}{(\omega-\lambda_1)\ldots(\omega-\lambda_\nu)} C_m \frac{(\omega+\gamma_1)\ldots(\omega+\gamma_\mu)}{(\omega+\lambda_1)\ldots(\omega+\lambda_\nu)}, \tag{13.4}$$

где

$$C_m = \sqrt{\frac{b_\mu}{a_\nu}}.$$

Найдем функцию $\Psi(j\omega)$, имея в виду, что она определяется формулой (13.1) и что все ее нули и полюсы должны быть расположены в верхней полуплоскости.

Сравнивая (13.1) с (13.4), найдем

$$\Psi(j\omega) = C_m \frac{(\omega-\gamma_1)(\omega-\gamma_2)\ldots(\omega-\gamma_\mu)}{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)\ldots(\omega-\lambda_\nu)} \tag{13.5}$$

и

$$\Psi(-j\omega) = C_m \frac{(\omega+\gamma_1)(\omega+\gamma_2)\ldots(\omega+\gamma_\mu)}{(\omega+\lambda_1)(\omega+\lambda_2)\ldots(\omega+\lambda_\nu)}. \tag{13.6}$$

Разложим выражение (13.5) для $\Psi(j\omega)$ на простые дроби:

$$\Psi(j\omega) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{d_i}{\omega - \lambda_i}, \tag{13.7}$$

где

$$d_i = \left[(\omega - \lambda_i)\Psi(j\omega)\right]_{\omega=\lambda_i}. \tag{13.8}$$

Найдем функцию $\gamma(t)$ вида

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{13.9}$$

Подставляя (13.7) в (13.9), получим

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{d_i}{\omega - \lambda_i} e^{j\omega t} d\omega,$$

причем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_i}{\omega - \lambda_i} e^{j\omega t} d\omega = d_i e^{j\lambda_i t}.$$

Поэтому

$$\gamma(t) = j \sum_{i=1}^{\nu} d_i e^{j\lambda_i t}. \tag{13.10}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\beta(t) = \gamma(t + t_0) = \sum_{i=1}^{\nu} j d_i e^{j\lambda_i (t+t_0)}, \quad t > 0, \quad \beta(t) = 0, \quad t < 0 \tag{13.11}$$

и вычислим соответствующее ей преобразование Фурье

$$B(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t} \beta(t) dt = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} j d_i e^{j\lambda_i (t+t_0)} \right\} dt = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{d_i}{\omega - \lambda_i} e^{j\lambda_i t_0}. \tag{13.12}$$

Итак, если все полюсы $S_m(\omega)$ – простые, то определим $\Phi(j\omega)$ по формуле

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \frac{d_i}{\omega - \lambda_i} e^{j\lambda_i t_0}}{\sum_{i=1}^{\nu} \frac{d_i}{\omega - \lambda_i}}. \tag{13.13}$$

Предположим теперь, что некоторые из полюсов функции $S_m(\omega)$ являются кратными.

Тогда каждому полюсу кратности χ в разложении функции $\Psi(j\omega)$ на простые дроби будет соответствовать выражение

$$\frac{a_{i1}}{(\omega - \lambda_i)} + \frac{a_{i2}}{(\omega - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{a_{i\chi}}{(\omega - \lambda_i)^{\chi}} = \sum_{\sigma=1}^{\chi} \frac{a_{i\sigma}}{(\omega - \lambda_i)^{\sigma}}, \tag{13.14}$$

где

$$a_{i\sigma} = \frac{1}{(\sigma-1)!}\left[\frac{d^{\sigma-1}}{d\omega^{\sigma-1}}\Big((\omega-\lambda_i)^{\chi}\Psi(j\omega)\Big)\right]_{\omega=\lambda_i}.$$

Соотношение для $B_i(j\omega)$ имеет вид

$$B_i(j\omega) = \sum_{\sigma=1}^{\chi} a_{i\sigma} e^{j\lambda_i t_0} \sum_{\eta=0}^{\sigma-1} \frac{(jt_0)^{\sigma-1-\eta}}{(\sigma-1-\eta)!}\cdot\frac{1}{(\omega-\lambda_i)^{\eta+1}}. \quad (13.15)$$

Таким образом, каждый кратный полюс с кратностью χ дает член вида (13.15) в числителе выражения для оптимальной передаточной функции.

Если, например, все полюсы – простые, за исключением одного кратного полюса λ_i с кратностью χ, то

$$\Phi(j\omega) = \frac{\sum\limits_{r=1}^{\nu-\chi} a_r e^{j\lambda_r t_0}\dfrac{1}{\omega-\lambda_r} + \sum\limits_{\sigma=1}^{\chi} a_{i\sigma} e^{j\lambda_i t_0} \sum\limits_{\eta=0}^{\sigma-1} \dfrac{(jt_0)^{\sigma-1-\eta}}{(\sigma-1-\eta)!}\cdot\dfrac{1}{(\omega-\lambda_i)^{\eta+1}}}{\Psi(j\omega)}. \quad (13.16)$$

Минимальное среднее значение квадрата ошибки упреждения (показатель точности системы упреждения) определяется соотношением

$$\bar{\varepsilon}^2_{\min} = \int_0^{t_0} \gamma^2(t)dt. \quad (13.17)$$

Для полюса λ_i кратности χ определим $\gamma_i(t)$. Имеем

$$\gamma_i(t) = \sum_{\sigma=1}^{\chi} \frac{j^{\sigma} t^{\sigma-1}}{(\sigma-1)!} a_{i\sigma} e^{j\lambda_i t}. \quad (13.18)$$

Решение типовых задач

Задача 13.1. Дано

$$S_m(\omega) = \left[\frac{2\beta+\omega}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2} + \frac{2\beta-\omega}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2}\right].$$

Определить оптимальную передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ прогнозирующего фильтра.

Решение. Запишем $S_m(\omega)$ в виде

$$S_m(\omega) = \left[\frac{2\beta+\omega}{\omega^2+2\beta\omega+(\alpha^2+\beta^2)} + \frac{2\beta-\omega}{\omega^2-2\beta\omega+(\alpha^2+\beta^2)}\right]$$

Отсюда имеем

$$S_m(\omega) = \frac{\left[\omega^2-2\beta\omega+(\alpha^2+\beta^2)\right](2\beta+\omega) + \left[\omega^2+2\beta\omega+(\alpha^2+\beta^2)\right](2\beta-\omega)}{\left[\omega^2+2\beta\omega+(\alpha^2+\beta^2)\right]\cdot\left[\omega^2-2\beta\omega+(\alpha^2+\beta^2)\right]}$$

или

$$S_m(\omega) = \frac{2\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot 2\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\left[\omega^2+2\beta\omega+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]\cdot\left[\omega^2-2\beta\omega+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]}.$$

Определим корни 1-го сомножителя в знаменателе $S_m(\omega)$. Имеем

$$\omega^2+2\beta\omega+\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0.$$

Откуда получим

$$\omega_{1,2} = \frac{-2\beta\pm\sqrt{4\beta^2-4\alpha^2-4\beta^2}}{2} = -\beta \pm j\alpha.$$

Следовательно

$$\omega_1 = -\beta + j\alpha; \quad \omega_2 = -\beta - j\alpha.$$

Определим корни 2-го сомножителя в знаменателе $S_m(\omega)$. Имеем

$$\omega^2-2\beta\omega+\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0.$$

Откуда получим

$$\omega_{3,4} = \frac{2\beta\pm\sqrt{4\beta^2-4\alpha^2-4\beta^2}}{2} = \beta \pm j\alpha.$$

Следовательно

$$\omega_3 = \beta + j\alpha; \quad \omega_4 = \beta - j\alpha.$$

Введем обозначения

$$\lambda_1 = -\beta + j\alpha; \quad \lambda_2 = \beta + j\alpha; \qquad (13.19)$$

Тогда

$$\omega_1 = \lambda_1; \quad \omega_3 = \lambda_2; \quad \omega_2 = -\lambda_2; \quad \omega_4 = -\lambda_1.$$

Запишем $S_m(\omega)$ в виде

$$S_m(\omega) = \frac{2\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot 2\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_3)(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_4)}$$

или

$$S_m(\omega) = \frac{2\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)}\cdot\frac{2\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{(\omega+\lambda_1)(\omega+\lambda_2)}$$

Отсюда с учетом (13.4), (13.5) получим

$$\Psi(j\omega) = \frac{A_1}{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)}, \qquad (13.20)$$

где

$$A_1 = 2\sqrt{\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

$\Psi(j\omega)$ содержит полюсы в верхней полуплоскости. Действительно

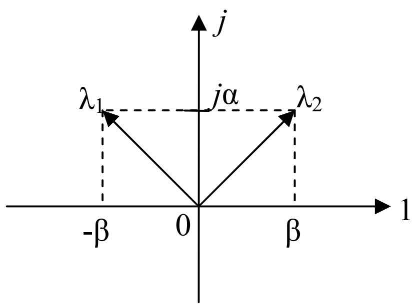

Рис. 13.2

Представим $\Psi(j\omega)$ в виде

$$\Psi(j\omega)=\frac{d_1}{\omega-\lambda_1}+\frac{d_2}{\omega-\lambda_2}=\frac{(d_1+d_2)\omega+(-d_1\lambda_2-d_2\lambda_1)}{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)} \tag{13.21}$$

Из (13.20), (13.21) получим

$$\left.\begin{aligned} d_1+d_2&=0;\\ d_1\lambda_2+d_2\lambda_1&=-A_1.\end{aligned}\right\}$$

Определим d_1, d_2 по правилу Крамера. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{vmatrix}=\lambda_1-\lambda_2=-2\beta;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -A_1 & \lambda_1\end{vmatrix}=A_1;$$

$$d_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{A_1}{2\beta};\quad d_2=-d_1=\frac{A_1}{2\beta}.$$

Из (13.13) получим

$$\Phi(j\omega)=\frac{\dfrac{d_1}{\omega-\lambda_1}e^{j\lambda_1 t_0}+\dfrac{d_2}{\omega-\lambda_2}e^{j\lambda_2 t_0}}{\dfrac{d_1}{\omega-\lambda_1}+\dfrac{d_2}{\omega-\lambda_2}}$$

или

$$\Phi(j\omega)=\frac{\dfrac{d_1}{\omega-\lambda_1}e^{j\lambda_1 t_0}+\dfrac{d_2}{\omega-\lambda_2}e^{j\lambda_2 t_0}}{\dfrac{A_1}{(\omega-\lambda_1)(\omega-\lambda_2)}}.$$

Перепишем $\Phi(j\omega)$ в виде

$$\Phi(j\omega)=\frac{1}{A_1}\left[d_1(\omega-\lambda_2)e^{j\lambda_1 t_0}+d_2(\omega-\lambda_1)e^{j\lambda_2 t_0}\right]. \tag{13.22}$$

В экспоненты $e^{j\lambda_1 t_0}$, $e^{j\lambda_2 t_0}$ подставим λ_1 и λ_2. С учетом (13.19) имеем

$$e^{j\lambda_1 t_0} = e^{j(-\beta + j\alpha)t_0} = e^{-\alpha t_0}\left(\cos\beta t_0 - j\sin\beta t_0\right);$$
$$e^{j\lambda_2 t_0} = e^{j(\beta + j\alpha)t_0} = e^{-\alpha t_0}\left(\cos\beta t_0 + j\sin\beta t_0\right).$$

Подставим полученные выражения в формулу (13.22). Получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{e^{-\alpha t_0}}{A_1}\left[d_1(\omega - \lambda_2)(\cos\beta t_0 - j\sin\beta t_0) + d_2(\omega - \lambda_1)(\cos\beta t_0 + j\sin\beta t_0)\right]$$

или

$$\Phi(j\omega) = \frac{e^{-\alpha t_0}}{A_1}\times$$
$$\times\left\{\left[(d_1 + d_2)\omega - (d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1)\right]\cos\beta t_0 + \left[(-d_1 + d_2)\omega + (d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)\right]j\sin\beta t_0\right\}.$$

Подставим в полученную формулу d_1, d_2, λ_1, λ_2. Имеем

$$\Phi(j\omega) = e^{-\alpha t_0}\left[\left(\cos\beta t_0 + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t_0\right) + \frac{1}{\beta}\sin\beta t_0 (j\omega)\right]$$

или

$$\Phi(j\omega) = e^{-\alpha t_0}\left[a(j\omega) + b\right],$$

где

$$a = \frac{1}{\beta}\sin\beta t_0;$$

$$b = \cos\beta t_0 + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t_0.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 13.2. Дано

$$S_m(\omega) = \frac{2D_m\alpha}{\omega^2 + \lambda^2}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ прогнозирующего фильтра.

Задача 13.3. Дано

$$S_m(\omega) = \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2}\right].$$

Определить оптимальную передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ прогнозирующего фильтра.

Задача 13.4. Дано

$$S_m(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + 2\omega^2 + 4}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ прогнозирующего фильтра.

Указание. Представить знаменатель $S_m(\omega)$ в виде

$$\omega^4 + 2\omega^2 + 4 = (j\omega)^4 - 2(j\omega)^2 + 4 = \left[(j\omega)^2 + A\cdot(j\omega) + 2\right]\left[(j\omega)^2 - A\cdot(j\omega) + 2\right] =$$
$$= (j\omega)^4 + (4 - A^2)\cdot(j\omega)^2 + 4$$

Определить A:

$$4 - A^2 = -2; \quad A^2 = 6; \quad A = \sqrt{6}.$$

Найти корни полинома $(j\omega)^2 + \sqrt{6}\cdot(j\omega) + 2$:

$$(j\omega)^2 + \sqrt{6}\cdot(j\omega) + 2 = 0;$$
$$(j\omega)_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm j}{\sqrt{2}};$$
$$(j\omega)_1 = \frac{-\sqrt{3} + j}{\sqrt{2}}; \quad (j\omega)_2 = \frac{-\sqrt{3} - j}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$\omega_1 = \frac{1 + j\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \lambda_1; \quad \omega_2 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \lambda_2.$$

Записать $\Psi(j\omega)$.

Задача 13.5. Дано

$$S_m(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + 1}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ прогнозирующего фильтра.

Указание. Представить знаменатель $S_m(\omega)$ в виде

$$\omega^4 + 1 = (j\omega)^4 + 1 = \left[(j\omega)^2 + A\cdot(j\omega) + 1\right]\left[(j\omega)^2 - A\cdot(j\omega) + 1\right] =$$
$$= (j\omega)^4 + (2 - A^2)\cdot(j\omega)^2 + 1$$

Определить A:

$$2 - A^2 = 0; \quad A^2 = 2; \quad A = \sqrt{2}.$$

Найти корни полинома $(j\omega)^2 + \sqrt{2}\cdot(j\omega) + 1$:

$$(j\omega)^2 + \sqrt{2}\cdot(j\omega) + 1 = 0;$$
$$(j\omega)_{1,2} = \frac{-1 \pm j}{\sqrt{2}};$$
$$(j\omega)_1 = \frac{-1 + j}{\sqrt{2}}; \quad (j\omega)_2 = \frac{-1 - j}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$\omega_1 = \frac{1+j}{\sqrt{2}} = \lambda_1; \quad \omega_2 = \frac{-1+j}{\sqrt{2}} = \lambda_2.$$

Записать $\Psi(j\omega)$.

Задача 13.6. Дано

$$S_m(\omega) = \frac{1}{(\omega^2+1)^2}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ прогнозирующего фильтра.

Указание. Использовать формулы (13.14), (13.15) при $\sigma = 2$.

Задача 13.7. Дано

$$S_m(\omega) = \frac{1}{(\omega^2+1)^3}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ прогнозирующего фильтра.

Указание. Использовать формулы (13.14), (13.15) при $\sigma = 3$.

Задача 13.8. Дано

$$S_m(\omega) = \frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\left[(\alpha-\beta)^2+\omega^2\right]\cdot\left[(\alpha+\beta)^2+\omega^2\right]},$$

где $\lambda \geq \beta$.

Определить оптимальную передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ прогнозирующего фильтра.

Практическое занятие №14.
Методы теории информации

Теоретические сведения

Любое сообщение, с которым мы имеем дело в теории информации, представляет собой совокупность сведений о некоторой физической системе. Например, на вход автоматизированной системы управления производственным цехом может быть передано сообщение о нормальном или повышенном проценте брака, о химическом составе сырья или температуре в печи.

Очевидно, если бы состояние физической системы было известно заранее, не было бы смысла передавать сообщение.

В качестве объекта, о котором передается информация, мы будем рассматривать некоторую физическую систему X, которая случайным образом может оказаться в том или ином состоянии, т.е. систему, которой заведомо присуща какая-то степень неопределенности. Очевидно, сведения, полученные о системе, будут тем ценнее о содержательнее, чем больше была неопределенность системы до получения этих сведений. Возникает вопрос: что значит “большая” или “меньшая” степень неопределенности и чем можно ее измерить.

Степень неопределенности физической системы определяется не только числом ее возможных состояний, но и вероятностями состояний.

Рассмотрим некоторую систему X, которая может принимать конечное множество состояний: $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $P_1, P_2, ..., P_n$, где

$$P_i = P(X = x_i) \qquad (14.1)$$

– вероятность того, что система X примет состояние x_i.

В качестве меры неопределенности системы в теории информации применяется специальная характеристика, называемая энтропией. Понятие об энтропии является в теории информации основным.

Энтропией системы называется сумма произведений вероятностей различных состояний системы на логарифм этих вероятностей, взятая с обратным знаком:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i. \qquad (14.2)$$

Энтропия $H(X)$ обладает рядом свойств, оправдывающих ее выбор в качестве характеристики степени неопределенности. Во-первых, она обращается в нуль, когда одно из состояний системы достоверно, а другие – невозможны. Во-вторых, при заданном числе состояний она обращается в максимум, когда эти состояния равновероятны, а при увеличении числа состояний – увеличивается.

Измерим энтропию системы X, которая имеет n равновероятностных состояний:

x_i	x_1	x_2	....	x_n
P_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	....	$\frac{1}{n}$

Имеем:

$$H(X) = -n \cdot \frac{1}{n} \cdot \log_2 \frac{1}{n} = -\log_2 1 + \log_2 n.$$

или

$$H(X) = \log_2 n, \qquad (14.3)$$

т.е. энтропия системы с равновозможными состояниями равна логарифму числа состояний.

Вычисление энтропии по формуле (14.2) можно несколько упростить, если ввести в рассмотрение специальную функцию:

$$\eta(P) = -P\log_2 P. \tag{14.4}$$

Формула (14.2) принимает вид:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} \eta(P_i). \tag{14.5}$$

Рассмотрим совместную энтропию статистически независимых источников сообщений. Пусть имеется два статистически независимых источника X и Y, причем множество состояний $x_1,..,x_n$ принадлежит источнику X, а $y_1,..,y_m$ – источнику Y. При этом:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1; \qquad \sum_{j=1}^{m} P(y_j) = 1.$$

Если источники X и Y статистически не связаны между собой, то:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j). \tag{14.6}$$

Используя (14.2) и (14.3) для энтропии $H(X,Y)$ системы с состояниями (x_i, y_j), получим выражение:

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -\sum_i \sum_j P(x_i, y_j)\log_2 P(x_i, y_j) = \\ &= -\sum_i \sum_j P(x_i)P(y_j)[\log_2 P(x_i) + \log_2 P(y_j)] = \\ &= -\sum_i P(x_i)\log_2 P(x_i) - \sum_j P(y_j)\log_2 P(y_j) = H(X) + H(Y). \end{aligned}$$

Следовательно, совместная энтропия статистически независимых источников равна сумме энтропий этих источников. Этот вывод распространяется и на большее число статистически независимых источников.

Рассмотрим условную энтропию статистически зависимых источников сообщений. Пусть имеется два статистически зависимых источника сообщений X и Y. Если источники X и Y коррелированны, то это означает, что между сигналами источников x_i, y_j существует взаимосвязь, при которой любому значению, например x_i, соответствует значения сигналов источника Y с условными вероятностями:

$$P(y_1 / x_i);...; P(y_j / x_i);...; P(y_m / x_i).$$

Совокупность условных вероятностей для конкретного значения x_i позволяет определить частную условную энтропию:

$$H(Y / x_i) = -\sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i)\log_2 P(y_j / x_i),$$

которая характеризует информационные свойства источника Y после того как стало известно значение x_i.

Усредняя частные условные энтропии по всем значениям x_i получаем общую условную энтропию источника Y относительно источника X:

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i)H(Y/x_i)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i)P(y_j/x_i)\log_2 P(y_j/x_i). \quad (14.7)$$

Так как для статистически зависимых сигналов:

$$P(x_i,y_j)=P(x_i)P(y_j/x_i),$$

то

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i,y_j)\log_2 P(y_j/x_i).$$

Величина $H(Y/X)$ показывает, какой энтропией в среднем обладает источник Y, если известен источник X.

Рассмотрим зависимость величины условной энтропии от степени взаимосвязи между источниками X и Y.

Если статистическая связь между сигналами источников X и Y отсутствует, то, сопоставляя равенство (14.6) с выражением $P(x_i,y_j)=P(x_i)P(y_j/x_i)$, получим:

$$P(y_j)=P(y_j/x_i). \quad (14.8)$$

Подставляя равенства (14.6) и (14.8) в выражение (14.7) для условной энтропии, найдем:

$$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(x_i)P(y_j)\log_2 P(y_j)=-\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\sum_{j=1}^{m}P(y_j)\log_2 P(y_j)=H(Y),$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n}P(x_i)=1.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае:

$$H(Y/X)=H(Y),$$

т.е. при отсутствии статистической связи между источниками X и Y условная энтропия источника Y относительно источника X равна безусловной энтропии источника Y. Это означает, что всякая информация сигналов y_j является новой по отношению к сигналам x_i.

При наличии “жесткой” статистической связи между источниками X и Y возможны только два случая: $P(y_j/x_i)=0$ или $P(y_j/x_i)=1$. Так как при суммировании по *j* все слагаемые $P(y_j/x_i)\log_2 P(y_j/x_i)$ в выражении для $H(Y/X)$ превращаются в нуль, то и $H(Y/X)=0$, т.е. при наличии “жесткой” статистической связи между источниками X и Y условная энтропия источника Y относительно X равна нулю. Это означает, что сигналы y_j никакой новой информации не содержат относительно сигналов x_i.

Рассмотрим взаимосвязь между количеством информации и энтропии передаваемого сообщения. Пусть до приема информации известны только вероятности $P(x_j)$ уровней сигналов передаваемого сообщения. Неопределенность сообщения до его приема можно характеризовать энтропией:

$$H(X) = -\sum_{j=1}^{n} P(x_j)\log_2 P(x_j).$$

При отсутствии помех принятое сообщение полностью соответствует переданному сообщению, вследствие чего неопределенность $H(X)$ после приема сообщения будет снята, т.е. величина $H(X)$ станет равной нулю. При этом будет получено количество информации $I(Y,X)$, равное энтропии $H(X)$.

Следовательно, количество информации, полученное в процессе передачи сообщения равно разности энтропий до и после приема сообщения:

$$I(Y,X) = H(X) - 0.$$

При наличии же помех степень неопределенности на приемном конце, т.е. энтропия, не будет равна нулю, так как:

$$I(Y,X) \neq H(X).$$

Наличие помех, характеризуемое величиной $H(X/Y)$, приведет к ограничению количества информации, необходимого для полного снятия неопределенности при приеме сообщения:

$$I(Y,X) = H(X) - H(X/Y).$$

Следовательно, энтропия представляет собой меру неопределенности, а количество информации – меру снятия неопределенности при приеме сообщения.

Определим совместную энтропию статистически зависимых источников сообщений. Пусть имеется два коррелированных источника X и Y, каждому из которых соответственно принадлежат множества сигналов x_i и y_j:

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1; \qquad \sum_{j=1}^{m} P(y_j) = 1.$$

Если число возможных парных совмещений сигналов составит nm, то энтропия в совокупности возможных совмещений сигналов:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log_2 P(x_i, y_j) \qquad (14.9)$$

Так как для рассматриваемого случая $P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j / x_i)$, то:

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i)P(y_j / x_i)\log_2[P(x_i)P(y_j / x_i)] = \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i)P(y_j / x_i)[\log_2 P(x_i) + \log_2 P(y_j / x_i)] = \\
&= -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i)\sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i) - \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i)\log_2 P(y_j / x_i) = \\
&= H(X) + H(Y / X),
\end{aligned} \qquad (14.10)$$

т.е. совместная энтропия сигналов двух различных источников X и Y равна сумме безусловной $H(X)$ и условной $H(Y / X)$ энтропий.

Рассмотрим сигнал с равновероятными и независимыми отсчетами. Пусть отображением некоторого сообщения, поступающего от источника информации, является квантованный по уровню и времени электрический сигнал (рис. 14.1), имеющий m различимых состояний по уровню (отсчетов):

$$m = (S_{\max} - S_{\min}) / \Delta S = 100 / \delta, \qquad (14.11)$$

где $S_{\max} - S_{\min}$ – диапазон изменения сигнала; ΔS – шаг квантования; δ– соответствующая ему погрешность в процентах.

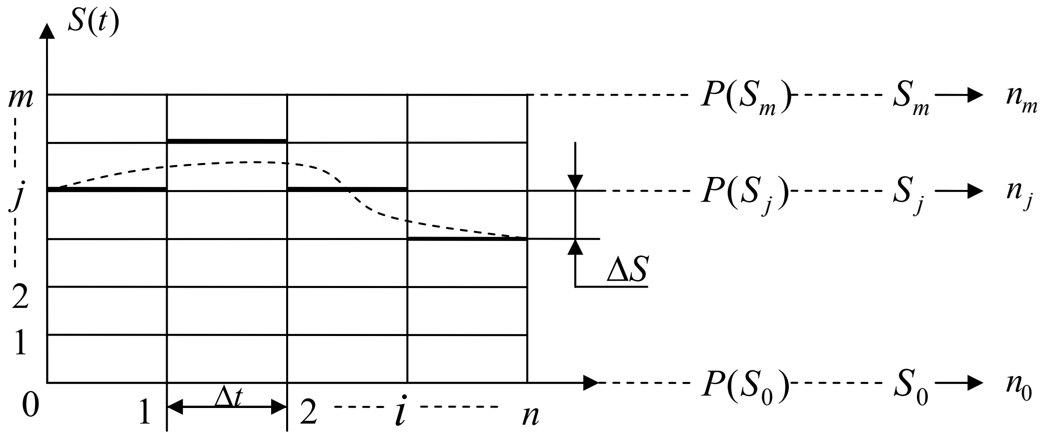

Рис. 14.1

Условимся, что за любой интервал времени Δt, соответствующий шагу квантования по времени, может быть снят только один отсчёт (элемент сигнала). При этом с равной вероятностью может появляться любой из квантованных уровней сигнала. Полагаем, что отсчеты (элементы) сигнала не зависят друг от друга, т.е. вероятность появления любого из уровней сигнала i-го отсчета не зависит от вероятности появления уровня сигнала при снятии предыдущего отсчета. Тогда вероятность появления любого из уровней $S_0, S_1, ..., S_{m-1}$ сигнала при снятии любого из отсчетов равна:

$$P(S) = 1/m,$$

где

$$P(S) = P(S_0) = P(S_1) = ... = P(S_j) = ... = P(S_{m-1}); \quad \sum_{j=0}^{m-1} P(S_j) = 1.$$

Количество информации [дв. ед.], содержащееся в сигнале, при снятии одного из n отсчетов:

$$I_0(S) = -\log_2 P(S) = \log_2 m,$$

а при снятии n отсчетов:

$$I_0(S)_n = \log_2 m^n = \log_2 N, \qquad (14.12)$$

где $N = m^n$.

Если имеется k различных источников информационных сигналов, например потенциометрических датчиков, то общее количество информации [дв. ед.], поступающее от этих датчиков:

$$I_0(S)_k = \log_2 N_1 + \log_2 N_2 + ... + \log_2 N_i + ... + \log_2 N_k = \sum_{i=1}^{k} \log_2 N_i,$$

где N_i – число равновероятных сообщений, поступающих от i-го датчика, $i = 1,...,k;$ при $N_i = m_i^{n_i}$:

$$I_0(S)_k = \sum_{i=1}^{k} n_i \log_2 m_i. \qquad (14.13)$$

Энтропия сигнала в общем случае может быть выражена как количество информации, приходящееся на один отсчет сигнала [дв. ед./отсчет]:

$$H_0(S) = \frac{I_0(S)_n}{n} = \frac{\log_2 m^n}{n} = \log_2 m. \qquad (14.14)$$

Пропускная способность, необходимая для передачи сигнала (или максимальная скорость выдачи информации от источника) определяется как количество информации, выдаваемое за время Т [дв. ед./с]:

$$C_0(S) = \frac{I_0(S)_n}{T} = \frac{n \log_2 m}{T}. \qquad (14.15)$$

Решение типовых задач

Задача 14.1. Определить энтропию физической системы, состоящей из двух самолетов (истребителя и бомбардировщика), участвующих в воздушном бою. В результате боя система может оказаться в одном из четырех возможных состояний:

1) оба самолета не сбиты;
2) истребитель сбит, бомбардировщик не сбит;
3) истребитель не сбит, бомбардировщик сбит;
4) оба самолета сбиты.

Вероятности этих состояний равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4 и 0,1.

Решение. Записываем условие в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
P_i	0,2	0,3	0,4	0,1

По формуле **(**14.5**)** имеем:

$$H(X) = \eta(0{,}2) + \eta(0{,}3) + \eta(0{,}4) + \eta(0{,}1).$$

Пользуясь таблицей находим:

$$H(X) = 0{,}4644 + 0{,}5211 + 0{,}5288 + 0{,}3322 \approx 1{,}85. \text{(дв. ед.)}$$

Задача 14.2. На шахматной доске в одной из клеток произвольным образом поставлена фигура. Априори все положения фигуры на доске одинаково вероятны. Определить информацию, получаемую от сообщения, в какой именно клетке находится фигура.

Решение. Энтропия системы X с n равновероятными состояниями равна $\log_2 n;$ в данном случае:

$$I(X) = H(X) = \log_2 64 = 6 \text{ (дв. ед.)},$$

т.е. сообщение содержит 6 двоичных единиц информации. Так как все состояния системы равновероятны, то ту же информацию несет и любое конкретное сообщение типа: фигура находится в квадрате е2.

Задача 14.3. Пусть имеются потенциометрические датчики Д$_1$ и Д$_2$ с погрешностями 0,1 и 0,2 % соответственно. Определить количество информации, поступающее от обоих датчиков при снятии четырех отсчетов с Д$_1$ и шести отсчетов с Д$_2$, энтропию и скорость выдачи информации каждого из датчиков при T = 0,1с.

Решение. Число различимых уровней квантования каждого из датчиков равно:

$$m_1 = \frac{100}{\delta_1} = \frac{100}{0{,}1} = 1000; \qquad m_2 = \frac{100}{\delta_2} = \frac{100}{0{,}2} = 500.$$

Общее количество информации [см. (14.13)]:

$$I_0(S)_2 = n_1 \log_2 m_1 + n_2 \log_2 m_2 = 4\log_2 1000 + 6\log_2 500 = 94 \text{ дв. ед.}$$

На основании выражений **(**14.14**)** и **(**14.15**)** находим:

$$H_0(S_1)=\frac{4\log_2 1000}{4}\approx 10\frac{\text{дв.ед.}}{\text{отсчет}};$$

$$H_0(S_2)=\frac{6\log_2 500}{6}\approx 9\frac{\text{дв.ед.}}{\text{отсчет}};$$

$$C_0(S_1)=\frac{\log_2 1000}{0{,}1}\approx 100\frac{\text{дв.ед.}}{\text{с}};$$

$$C_0(S_2)=\frac{\log_2 500}{0{,}1}\approx 90\frac{\text{дв.ед.}}{\text{с}};$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 14.4. Определить энтропию системы, состояние которой описывается прерывной случайной величиной X с рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
P_i	0,01	0,01	0,01	0,01	0,96

Задача 14.5. Определить максимально возможную энтропию системы, состоящей из трех элементов, каждый из которых может быть в четырех возможных состояниях.

Задача 14.6. Определить частную информацию, содержащуюся в сообщении впервые встреченного лица А: “сегодня мой день рождения”.

Задача 14.7. Пусть имеются датчики $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$ с погрешностями 0,1; 0,2 и 0,3 % соответственно. Определить количество информации, поступающее от трех датчиков при снятии четырех отсчетов с $Д_1$, шести отсчетов с $Д_2$, восьми отсчетов с $Д_3$. Определить энтропию и скорость выдачи информации каждого из датчиков при T = 0,2с.

Практическое занятие №15.
Параметрическая идентификация линейных систем

Теоретические сведения

Важной задачей, возникающей при проектировании систем управления, является определение формализованного описания процесса (или объекта), для управления которыми строится система. Обычно совокупность математических соотношений, определяющую основные интересующие нас динамические свойства процесса управления, называют моделью процесса, а само построение модели на основе анализа результатов наблюдений – идентификацией. Существенную роль при этом играет объём априорной информации об объекте идентификации (идентифицируемой системе). Например, если известна структура системы и задан класс моделей, к которому она относится, то априорная информация в этом случае велика и задача идентификации состоит в оценивании параметров и состояния системы по результатам наблюдений за входными и выходными переменными. Это идентификация в узком смысле слова.

В худшем случае априорная информация может быть очень бедной или отсутствовать вообще, поэтому при идентификации приходится решать много дополнительных задач. К ним относятся: выбор структуры системы, задание класса моделей, оценивание степени стационарности и линейности объекта, выбор информационных переменных и др. Это уже идентификация в широком смысле слова. К настоящему времени в теории и практике управления накоплен большой опыт решения задач идентификации в узком смысле.

Методы решения задач идентификации в широком смысле начали разрабатываться сравнительно недавно, и здесь результаты значительно скромнее, что в первую очередь можно объяснить чрезвычайной сложностью задачи.

Следует также отметить, что при идентификации, как правило, не удается исключить влияния контролируемых и неконтролируемых случайных возмущений на параметры и координаты объекта и обеспечить абсолютную точность измерений, поэтому в основе методов идентификации лежат статистические методы обработки сигналов и получение вероятностных оценок.

Пусть на вход изучаемой одномерной системы поступает случайный сигнал $\Lambda(t)$. Этот же сигнал подаётся на вход модели (рис. 15.1).

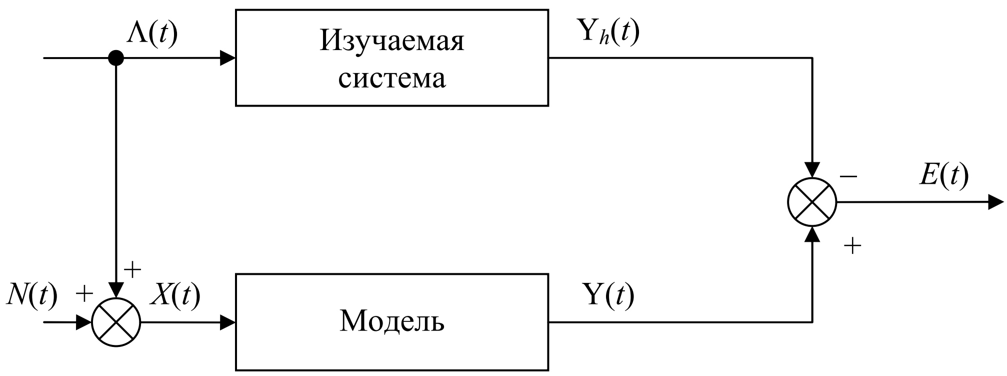

Рис. 15.1

Однако из-за ошибки измерения, представляющей собой случайную помеху $N(t)$, фактический входной сигнал $X(t)$ модели является суммой сигнала $\Lambda(t)$ и помехи $N(t)$. Разность $E(t)$ между значениями выходных сигналов модели и изучаемой системы называют ошибкой идентификации. Она характеризует точность определения динамических характеристик изучаемой системы. Так как ошибка $E(t)$ – случайный процесс, то критерии точности являются статистическими. Задача заключается в том, чтобы найти такой оператор модели, который обеспечивал бы экстремум выбранного статистического критерия точности. В такой постановке задача идентификации является задачей статистической теории оптимальных систем. Здесь требуемым выходным сигналом $Y_h(t)$ является выходной сигнал изучаемой системы, а действительным выходным сигналом $Y(t)$ является выходной сигнал модели. Используя теорию оптимальных систем, можно найти оператор модели, наилучшим образом приближенный в определенном смысле к оператору изучаемой системы.

Если в качестве оценок точности принять математическое ожидание и дисперсию ошибки идентификации, то в случае стационарной линейной задачи и некоррелированной аддитивной ошибки измерения $N(t)$ эти характеристики определяются по формулам

$$m_e = [\Phi_M(0) - \Phi(0)]m_\lambda + \Phi_M(0)m_n; \tag{15.1}$$

$$D_e = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_M(j\omega) - \Phi(j\omega)|^2 \cdot S_\lambda(\omega)d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_M(j\omega)|^2 \cdot S_n(\omega)d\omega\ , \tag{15.2}$$

где Φ и Φ_M – передаточные функции или частотные характеристики соответственно изучаемой линейной системы и её модели; m_λ, m_n и $S_\lambda(\omega)$, $S_n(\omega)$ – математические ожидания и спектральные плотности входного сигнала $\Lambda(t)$ и ошибки измерения $N(t)$.

Первые слагаемые в формулах (15.1) и (15.2) обусловлены неточным определением частотной характеристики изучаемой системы, а вторые – прохождением сигнала ошибки измерения на выход модели.

Среди методов параметрической идентификации линейных систем, предполагающих наличие априорной информации о структуре уравнений объекта, номинальных значениях его параметров и основанных на представлении системы в пространстве состояний, можно выделить метод квазилинейной фильтрации, использующий результаты решения задачи фильтрации в постановке Калмана.

Предполагается, что идентифицируемый линейный объект управления описывается в пространстве состояний линейным матричным дифференциальным уравнением с белым шумом в правой части:

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = F(t)\Lambda(t) + V(t)\,;\ \Lambda(t_0) = 0, \tag{15.3}$$

где $\Lambda(t)$ – n-мерный вектор состояний объекта; $V(t)$ – n-мерный белый шум с известным математическим ожиданием $m_V(t)$ и матрицей интенсивности $L(t)$, некоррелирован с начальным значением $\Lambda(t_0)$.

Квадратная матрица параметров объекта $F(t)$ может быть представлена в виде суммы известной матрицы номинальных значений $F^H(t)$ и матрицы случайных постоянных во времени случайных отклонений от номинала ΔF, т.е.

$$F(t) = F^{H}(t) + \Delta F. \tag{15.4}$$

Элементы ΔF принимаются центрированными случайными величинами, некоторые из них могут быть неслучайными и равны нулю; корреляционная матрица $K_{\Delta F}$ элементов ΔF известна.

Задача состоит в определении (оценивании) матрицы ΔF, а следовательно в уточнении матрицы $F(t)$ на основе наблюдений на интервале $[t_0, t]$ вектора $X(t)$, линейно связанного с вектором состояния $\Lambda(t)$ и содержащего аддитивную помеху $W(t)$:

$$X(t) = R(t)\,\Lambda(t) + W(t). \tag{15.5}$$

Размерность наблюдаемого вектора $m < n$, матрица $R(t)$ задана, белый шум $W(t)$ центрирован (в противном случае его математическое ожидание можно вычесть из наблюдаемого сигнала), характеризуется неособой матрицей интенсивности $N(t)$, некоррелирован с $V(t)$ и $\Lambda(t_0)$.

С помощью (15.3) можно определить математическое ожидание вектора состояния $m_\Lambda{}^{H}(t)$ при номинальных значениях параметров путем решения уравнения

$$\frac{dm_\Lambda^H(t)}{dt} = F^H(t)\cdot m_\Lambda^H(t) + m_V(t),\ m_\Lambda^H(t_0) = 0\ . \tag{15.6}$$

Осуществим линеаризацию уравнения (15.3) относительно номинальных значений параметров объекта и номинального движения $m_\Lambda^H(t)$:

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = [F^H(\mathrm{t}) + \Delta\mathrm{F}]\Lambda(t) + V(t) \approx F^H(t)\Lambda(t) + \Delta F m_\Lambda^H(t) + \mathrm{V(t)} \tag{15.7}$$

Левая часть (15.7) линейно зависит от матрицы ΔF, элементы которой неизвестны, но постоянны, поэтому

$$\frac{d\Delta F(t)}{dt} = 0, \qquad \Delta F(t_0) = \Delta F\ . \tag{15.8}$$

Уравнения (15.7) и (15.8) можно объединить, если ввести расширенный вектор состояний $\widetilde{\Lambda}(t)$, компонентами которого являются компоненты вектора $\Lambda(t)$ и все неизвестные элементы матрицы $\Delta\mathrm{F}$. В самом общем случае размерность вектора $\widetilde{\Lambda}(t)$ будет $(n + n^2)$, а его изменение характеризуется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\widetilde{\Lambda}(t)}{dt} = \widetilde{F}(t)\widetilde{\Lambda}(t) + \widetilde{D}(t)V(t), \tag{15.9}$$

где

$$\widetilde{F}(t)=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & m_{\text{v}}^{H^T}(t) & 0 & & 0 \\ & 0 & m_{\text{v}}^{H^T}(t) & & \vdots \\ F^H(t) & & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & 0 & 0 & & m_{\text{v}}^{H^T}(t) \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{\Lambda}(t)=\left[\Lambda_1(t)\Lambda_2(t)\ldots\Lambda_n(t)\Delta F_{11}\Delta F_{12}\cdots\Delta F_{1n}\Delta F_{21}\cdots\Delta F_{nn}\right]^{\text{T}};$$

$$\widetilde{D}(t)=\left[\frac{I_{n\times n}}{0}\right]$$

Связь расширенного вектора состояния $\widetilde{\Lambda}(t)$ с вектором измерения $X(t)$ определяется соотношением

$$X(t)=\widetilde{R}(t)\widetilde{\Lambda}(t)+W(t), \tag{15.10}$$

где

$$\widetilde{R}(t)=\left[R(t)\quad 0\right].$$

Наилучшая оценка $Y(t)$ введенного расширенного вектора $\widetilde{\Lambda}(t)$ может быть получена с помощью построения фильтра Калмана, дифференциальное уравнение которого

$$\frac{dY(t)}{dt}=\widetilde{F}(t)Y(t)+\widetilde{D}(t)m_V(t)+a(t,t)\left[X(t)-\widetilde{R}(t)Y(t)\right], Y(t_0)=\begin{bmatrix}\Lambda(t_0)\\ 0\end{bmatrix}. \tag{15.11}$$

Матрица передачи Калмана определяется соотношением

$$a(t,t)=P(t)\widetilde{R}(t)N^{-1}(t), \tag{15.12}$$

а матрица ковариаций ошибки фильтрации $P(t)$ размера $(n + n^2)$ x $(n + n^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати вида

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dP(t)}{dt}=\widetilde{F}(t)P(t)+P(t)\widetilde{F}^T(t)- \\ -P(t)\widetilde{R}^T(t)N^{-1}(t)\widetilde{R}(t)P(t)+\widetilde{D}(t)L(t)\widetilde{D}^T(t) \\ P(t_0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & K_{\Delta F}\end{bmatrix} \end{array}\right\} \tag{15.13}$$

В результате совместного решения (15.11) – (15.13) определяется оптимальная оценка вектора $\widetilde{\Lambda}(t)$, содержащая как оценки $\hat{\Lambda}_i(t)$, i = 1, 2, …, n, компонент вектора $\Lambda(t)$, так и оценки $\widehat{\Delta F}_{ij}(t)$, i,j = 1, 2, …, n, неизвестных элементов матрицы ΔF. Последние являются зависящими от переменной t – правого конца интервала наблюдения.

Искомая матрица параметров системы определяется в виде

$$F(t) = F^H(t) + \Delta\hat{F}(t). \tag{15.14}$$

Наряду со значениями оценок $\Delta\hat{F}(t)$ параметров идентифицируемой системы на диагонали матрицы $P(t)$ содержатся дисперсии ошибок $E_{ij}(t) = \Delta\hat{F}_{ij}(t) - \Delta F_{ij}$ определения всех искомых оценок, что позволяет судить о точности решения поставленной задачи.

Важным преимуществом данного метода является возможность выполнять идентификацию в реальном масштабе времени, т.е. в процессе функционирования идентифицируемой системы. К недостаткам его следует отнести необходимость априорной информации о матрицах номинальных значений $F^{\text{Н}}(t)$ и корреляционной $K_{\Delta F}$, а также известная чувствительность фильтров Калмана к ошибкам в априорной информации о входном сигнале.

Решение типовых задач

Задача 15.1. Идентифицируемый объект управления есть стационарная линейная система 1-го порядка, описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = F\Lambda(t) + V(t);\ \Lambda(t_0) = 0.$$

Постоянная времени F есть случайная величина с заданными математическим ожиданием $M[F] = f_H$ и дисперсией D_f, $F = f_H + \Delta F$. Белый шум $V(t)$ является стационарным с математическим ожиданием $m_\upsilon(t) = m_\upsilon = \text{const}$ и интенсивностью l. На интервале $[t_0, t]$ измеряется непосредственно координата $\Lambda(t)$ с аддитивной ошибкой $W(t)$:

$$X(t) = \Lambda(t) + W(t).$$

Помеха $W(t)$ – стационарный центрированный белый шум с известной интенсивностью n_0.

Требуется по результатам измерений уточнить фактическое значение постоянной времени F, т.е. определить её оценку:

$$\hat{F} = f_H + \Delta\hat{F}$$

Решение. Из уравнения типа (15.6) определяем "номинальное" решение $m_\lambda^H(t)$:

$$\frac{dm_\lambda^H(t)}{dt} = f_H m_\lambda^H(t) + m_\upsilon, \quad m_\lambda^H(\text{t}_0) = 0.$$

Затем составляем линеаризованное уравнение типа (15.7):

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = f_H \Lambda(\mathrm{t}) + \Delta \mathrm{F} \mathrm{m}_\lambda^{\mathrm{H}}(\mathrm{t}) + V(t), \quad \Lambda(t_0) = 0,$$

которое в совокупности с уравнением

$$\frac{d\Delta F(t)}{dt} = 0; \quad \Delta F(t_0) = \Delta F$$

образует систему 2-го порядка.

Записываем её через расширенный вектор состояния и определяем уравнения для него

$$\widetilde{\Lambda}(t) = \begin{bmatrix} \Lambda(t) \\ \Lambda F \end{bmatrix};$$

$$\frac{d\widetilde{\Lambda}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} f_H & m_\lambda^H(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \widetilde{\Lambda}(\mathrm{t}) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V(t) = \widetilde{F}(t)\widetilde{\Lambda}(t) + \widetilde{D}(t)V(t);$$

$$\widetilde{\Lambda}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta F \end{bmatrix}; \quad X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \widetilde{\Lambda}(t) + W(t) = \widetilde{R}(t)\widetilde{\Lambda}(t) + W(t).$$

Соотношения типа (15.11) – (15.13) определяют алгоритм обработки результатов наблюдений для получения оптимальной оценки вектора $\widetilde{\Lambda}(t)$:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}(t) \\ \Delta \hat{F}(t) \end{bmatrix};$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \begin{bmatrix} f_H & m_\lambda^H(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}(t) \\ \Delta \hat{F}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} m_\upsilon + a(t,t) \left[X(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}(t) \\ \Delta \hat{F}(t) \end{bmatrix} \right].$$

Матрица передачи Калмана

$$a(t,t) = P(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{n_0}.$$

Матрица ковариаций ошибки

$$P(t) = \begin{bmatrix} D_{e_\lambda}(t) & K_{e_\lambda e_{\Delta F}}(t) \\ K_{e_{\Delta F} e_\lambda}(t) & D_{e_{\Delta F}}(t) \end{bmatrix}; \; P(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_f \end{bmatrix};$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \begin{bmatrix} f_H & m_\lambda^H(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P(t) + P(t) \begin{bmatrix} f_H & 0 \\ m_\lambda^{\mathrm{H}}(t) & 0 \end{bmatrix} - P(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{n_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} l \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Упрощение и совместное решение этих уравнений позволяет для любого t найти оценку $\Delta\hat{F}(t)$ и тем самым уточнить искомую постоянную времени F.

Попутно определяется и дисперсия $D_{e_{\Delta F}}(t)$ ошибки $E_{\Delta F}(t)$, а также оценка координаты $\Lambda(t)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 15.2. Идентифицируемый объект управления есть стационарная линейная система 1-го порядка, описываемая уравнением

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + V(t);\ X(t_0) = 0\,.$$

Постоянная времени A есть случайная величина с заданными математическим ожиданием $M[A] = a_H$ и дисперсией D_a, $A = a_H + \Delta A$. Белый шум $V(t)$ является стационарным с математическим ожиданием $m_\upsilon(t) = m_\upsilon$ = const и интенсивностью m. На интервале $[t_0, t]$ измеряется непосредственно координата $X(t)$ с аддитивной ошибкой $W(t)$:

$$Z(t) = X(t) + W(t).$$

Помеха $W(t)$ – стационарный центрированный белый шум с известной интенсивностью m_0.

Требуется по результатам измерений уточнить фактическое значение постоянной времени A, т.е. определить её оценку:

$$\hat{A} = a_H + \Delta\hat{A}\,.$$