SIMPLE MATHEMATICAL MODELS AND THEIR ROLE IN COMPREHENSION OF THE WORLD

Yu. I. NEIMARK

Concrete examples of simple mathematical models (low salinity of the Caspian Sea, heart attacks) are given to show their potential in studying the phenomena around us.

На конкретных примерах простых математических моделей раскрываются их возможности в постижении окружающих нас явлений (малая соленость Каспийского моря, сердечные приступы).

ПРОСТЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ РОЛЬ В ПОСТИЖЕНИИ МИРА

Ю. И. НЕЙМАРК

Нижегородский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

Я не сразу решил рассказать вам то, что сейчас пишу. Затруднение было в том, что среди вас кроме математиков и физиков есть еще и химики и биологи. Но я все же решил рассказывать о математике потому, что сам отчасти математик, и потому, что математика нужна и полезна всем. Рассказ будет о том, как математика помогает понять и осмыслить окружающий мир, и будет это не в общих словах, а на примере разоблачения одной из загадок Каспийского моря и на примере выяснения природы некоторых кризисных состояний нашего сердца.

Окружающий нас мир многообразен, сложен, загадочен, красочен и прекрасен. Но лежащие в нем основы, генерирующий его механизм просты и действуют по простым правилам. Об этом догадались уже древние греки, положив в основу всего огонь, землю, воду и воздух, и хотя они были далеки от истины, но предвидели существование еще и малых частиц – атомов, движения и сочетания которых порождают все сущее. Это была гениальная догадка, обоснованная только в XVIII–XIX веках. Наше современное естествознание подтвердило эту конкретную догадку об атомах и более широкую общую о простоте основ.

То, что простые правила могут порождать разнообразные и сложные ситуации, видно на примерах шашек, шахмат и других игр. В этом смысле игра имитирует наш мир. Возможно, именно поэтому мы их так любим и детям они так нужны.

Правила природы все же сложнее правил игр, но они тоже просты. Формально их можно изложить за час-два, но научиться хорошо “играть” не так просто: подчас это требует всей жизни. Правила “игры природы” – это фундаментальные законы механики и физики: законы Ньютона, законы электродинамики Фарадея–Максвелла, уравнения квантовой механики Шрёдингера и общей теории относительности Эйнштейна, а также законы химии и биологии, которые следуют из общих законов механики и физики, но не всегда понятно как.

То, к чему применяются эти простые правила и законы или посредством чего осуществляются, – это окружающие нас объекты природы, которые мы в своем сознании имитируем идеализированными моделями. Эволюция человеческой мысли привела к тому, что для этой имитации создан специальный математический язык и окружающие нас объекты – части природы – описываются математическими моделями. Математические модели могут быть очень простыми, простыми, сложными и очень сложными. Очень простые – это, например, геометрическая или материальная точка, точечный заряд. Простые – это те, о которых я буду вам рассказывать, сложные и очень сложные – это в принципе такие же, как простые, но много или очень много сложнее. Иерархия математических моделей подобна зданию, сложенному из очень простых частей: кирпичей, железных изделий, цемента, дерева, стекла и многого другого. Очень простые модели – это простейшие части, из которых сложено здание, простые – это его некоторые части, состоящие из очень простых, сложная модель – все здание и очень сложная – это целый город из зданий.

Можно думать, что возрастающим по сложности реальным системам и объектам отвечают все более и более сложные их модели. Но это не так. Сложному и очень сложному реальному объекту могут соответствовать простые модели. Дело в том, что модель не обязана описывать все происходящее в объекте во всех его деталях. Она может описывать лишь кое-что, и в первую очередь самое главное и нам интересное или важное. Так, моделью города может быть его карта, моделью земного шара – глобус. Вот о таких простых моделях сложных и очень сложных объектов пойдет речь ниже.

ЗАГАДКА КАСПИЙСКОГО МОРЯ

Черное и Каспийское моря произошли от одного древнего моря, которое было потом разделено Кавказскими горами на две части. Каспийское море замкнутое, Черное вытекает через Босфор и Дарданеллы в Средиземное море. Несмотря на это, Черное море намного солонее Каспийского. Это кажется необъяснимым, но вспомним, что у Каспийского моря есть залив Кара-Богаз-Гол. На первый взгляд кажется, что это ничего не меняет: ведь оно по-прежнему остается замкнутым. Однако это не так, поскольку перемешивания вод Каспийского моря и залива не происходит: вода из Каспия все время течет в залив. Может ли это привести к опреснению Каспия? Попробуем получить ответ на этот вопрос, построив соответствующую математическую модель. Учтем, что реки несут в Каспий чуть-чуть солоноватую воду, вода из Каспия перетекает в залив и там, как и в Каспии, испаряется. Обозначим: Q – общий приток вод в Каспий, I – превышение испарения над дождями в Каспии и I_1 – в заливе, q – интенсивность перетекания воды из Каспия в Кара-Богаз-Гол. Тогда, очевидно, скорости $\dot V$ и $\dot V_1$ изменения объемов V и V_1 в Каспии и заливе соответственно

$$\dot V = Q - I - q, \qquad \dot V_1 = q + I_1. \tag{1}$$

И Каспий и залив уже давно наполнились, и объемы воды лишь незначительно меняются в зависимости от погоды и времени года. Пренебрегая этими очень малыми изменениями, будем считать $\dot V = \dot V_1 = 0$, что влечет равенства

$$Q - I - q = 0, \qquad q + I_1 = 0, \tag{2}$$

означающие уравновешенность притоков и оттоков воды в Каспии и заливе. При этом объемы воды в Каспии и заливе достигают некоторых равновесных величин V^* и V_1^*.

Воды рек приносят в Каспий соли. Пусть ν – соленость вод рек, тогда соль прибывает в Каспий с интенсивностью $Q\nu$, а в залив – с интенсивностью $q\mu$, где μ – соленость воды Каспия. Согласно этому, скорости изменения $\dot M$ и $\dot M_1$ количеств солей M и M_1 в Каспии и заливе, очевидно, составляют

$$\dot M = Q\nu - q\mu, \qquad \dot M_1 = q\mu. \tag{3}$$

Из второго соотношения (3) следует, что количество солей в заливе со временем неограниченно растет. Как мы знаем, в заливе концентрация солей давно достигла насыщения и тысячелетиями осаждается на дне залива, образуя громадные залежи. Количество же солей в Каспии возрастает до тех пор, пока приток солей превышает их отток $q\mu$. Увеличение солености Каспия замедляется с ростом его солености μ и прекращается, достигнув равновесного значения, когда

$$Q\nu - q\mu = 0, \tag{4}$$

то есть когда соленость μ Каспия достигает равновесного значения μ^*, равного

$$\mu^* = \frac{Q\nu}{q}.$$

Найти эту величину кажется очень трудно: нужно знать объем приносимой реками воды и ее соленость, нужно знать, сколько воды перетекает из Каспия в залив. Конечно, все это можно узнать, но совсем непросто. Но, оказывается, это не нужно. Действительно, из первого соотношения (2) следует, что $Q = I + q$, и поэтому

$$\mu^* = \frac{Q\nu}{q} = \frac{(I+q)\nu}{q} = \left(1 + \frac{I}{q}\right)\nu.$$

Далее из второго соотношения (1) видно, что $q = I_1$, и поэтому

$$\mu^* = \left(1 + \frac{I}{q}\right)\nu = \left(1 + \frac{I}{I_1}\right)\nu,$$

I/I_1 – это отношение интенсивностей испарения воды в Каспии и заливе. Грубо приближенно это соотношение равно отношению площадей Каспия и залива, то есть

$$\mu^* = \left(1 + \frac{I}{I_1}\right)\nu \approx \left(1 + \frac{S}{S_1}\right)\nu. \tag{5}$$

Размеры Каспия примерно в 40 раз превышают размеры залива Кара-Богаз-Гол, так что $\mu^* \approx 40\nu$. Это даже меньше, чем соленость Каспия сегодня. То есть сегодня залив Кара-Богаз-Гол опресняет Каспийское море и делает это уже довольно давно. Это и объясняет, почему Каспийское море менее соленое, чем Черное, и дальше будет еще менее соленым. Но это в геологических масштабах времени.

Из рассказа, возможно, вы и не увидели, где же математическая модель и что, собственно, она описывает. Описывает она баланс вод и солей в море и его заливе, а сама модель – это дифференциальные уравнения (1) и (3). Первое уравнение (1) рассказывает, как меняются объемы воды в море и заливе, а второе (3) – как меняется в них количество солей.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕРДЦА

Перейдем ко второму примеру. В нем рассматривается очень сложный объект, и процессы, происходящие в нем, очень сложны. Модель для него построим очень простую, и, несмотря на ее простоту, с ее помощью узнаем кое-что интересное. Так, оказывается, бывает. Конечно, при этом мы узнаем о сердце далеко не все, а только кое-что, но важное, интересное и полезное. Исчерпывающая математическая модель для сердца очень сложна, пожалуй так же, как и оно само.

Предыдущая модель была математической моделью, отражающей водный и солевой балансы. Сейчас мы составим модель энергетического баланса.

Чтобы жить и работать, сердце затрачивает энергию, и эту энергию оно поставляет себе, работая. Больше можно ничего не знать. Можно знать только это и, построив математическую модель, узнать и понять кое-что неожиданное и нам неизвестное.

О нашем сердце и кровеносной системе написано много книг, и чтобы их все прочитать и изучить, едва ли хватит жизни. Но нам нужно лишь знать, что функционально сердце – это насос, который качает кровь по кровеносным сосудам и капиллярам, питая все органы и ткани тела, в том числе и самого себя.

Сердце не может остановиться. Оно должно все время работать и работать столько, сколько это нужно его владельцу. Иначе говоря, владелец, точнее, его нервная система командует, как оно должно работать: сильнее или слабее. Эту команду представим величиной управления u: чем больше u, тем интенсивнее нервная система приказывает работать сердцу. А сердце как безответный раб: что прикажут, то и делает, не жалея себя и не смея жаловаться. Может только "сломаться", и тогда уже плохо и ему и хозяину.

Оно может работать – сокращать свои мышцы – за счет имеющегося в нем запаса энергии. Эта же энергия – химическая – нужна ему и для поддержания своей жизни, жизни своих клеток. Пополняет запас энергии W сердце, так же как и все остальные органы и ткани тела, прокачивая через себя артериальную кровь, богатую кислородом и другими необходимыми веществами. Пусть f – интенсивность затрат энергии сердцем для его работы, а g – интенсивность пополнения запаса его энергии W. Пусть, кроме того, a – интенсивность потребления энергии для поддержания своей собственной жизни, питания его клеток и тканей, когда оно не работает. Очевидно, что скорость изменения энергии W равна $-f+g-a$, то есть

$$\dot{W} = -f + g - a. \qquad (6)$$

Интенсивности f и g зависят от u и W. В частности, если $W = 0$, то $f = g = 0$. Аналогично $f = g = 0$ при $u = 0$. Вместе с тем при каких-то u и W, отличных от нуля, f и g положительны, так как в противном случае наше сердце не могло бы работать.

Согласно (6), при фиксированной команде управления и в зависимости от знака правой части $-f+$ $+ g - a$ происходит либо убывание, либо возрастание запаса энергии W. Отобразим этот факт графически на плоскости переменных W и u (рис. 1). Ясно, что W и u по смыслу не отрицательны и не превосходят некоторых своих максимальных значений $W_{\max}$ и $u_{\max}$, и поэтому точка M с координатами W и u находится в изображенном на рис. 1 прямоугольнике $OABC$. Вершина этого прямоугольника помечена точками O, A, B и C. Где-то внутри этого прямоугольника выражение $-f+g-a$ заведомо положительно. На сторонах OA и OC $f = g = 0$, и поэтому на них и вблизи них $\dot{W} = -f + g - a < 0$, так как $a > 0$. Естественно считать, что и на стороне CB $\dot{W}$ также отрицательно, так как при этом от сердца требуется выполнение максимально возможной работы.

Сказанное отмечено на рис. 1 минусами, которые означают, что при отвечающих их месту значениях W и u запас энергии W убывает. Знаки плюс на рис. 1 указывают на то, что где-то внутри прямоугольника $-f+g-a>0$ и W растет. Ясно, что в части прямоугольника $OABC$, где W убывает (стоят знаки

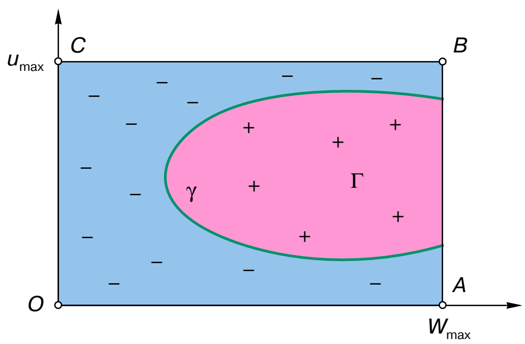

Рис. 1

минус) и где возрастает (стоят знаки плюс), разделяются некоторой кривой γ. Точный вид ее нам неизвестен, но этого и не требуется.

Изобразим теперь, как перемещается точка $M(W, u)$ при фиксированных u. Это приведет к картинке, показанной на рис. 2.

В области Г, ограниченной кривой γ, значение W возрастает, а вне ее убывает. При работе сердца точка $M(W, u)$ перемещается внутри прямоугольника, причем, находясь внутри Г, смещается вправо, а вне – влево, не выходя, конечно, за его пределы. Вверх и вниз она смещается в соответствии с командами u нервной системы. При длительном постоянстве u точка $M(W, u)$, находящаяся в области Г, приходит на часть γ_+ границы γ.

При изменении u точка $M(W, u)$ описывает некоторую траекторию: при этом изменение u может быть любым, а изменение W предписывается уравнением (6) и происходит в соответствии со стрелками рис. 2. Точка $M(W, u)$ может двигаться внутри и вне области Г, выходя из нее при возрастании или убывании u, то есть при чрезмерно большой или чрезмерно маленькой команде u, когда сердце форсированно работает или, наоборот, слишком ослабляет свою работу. И вот теперь можно заметить, что ни то ни другое не может быть длительным. Длительное u, близкое к u_{max}, или очень маленькое u приводят к тому, что точка $M(W, u)$, смещаясь влево, оказывается в области, где W меньше $W_{крит}$, показанного на рис. 2. Попав туда, она уже никак не может вернуться в область Г и фатально попадает на сторону прямоугольника OC, где энергия W, истощаясь, обращается в нуль и остается равной нулю. Проще говоря, сердце гибнет, так как его тканям и клеткам нечем поддерживать свою жизнь ($W = 0$).

Увиденное нами можно трактовать как то, что мы обнаружили две противоположные возможности возникновения кризисных состояний сердца: одно при слишком длительной интенсивной работе, другое при длительной его слишком слабой работе, вызываемой малостью команды u нервной системы, ее временным упадком. Подчеркнем, что

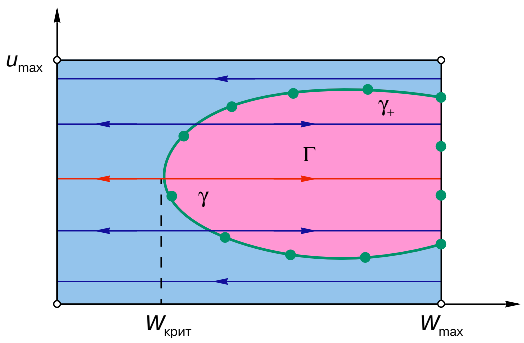

Рис. 2

интенсивная работа сердца может происходить не только в силу интенсивной работы человека, но и оттого, что нервная система перевозбуждена и дает большую команду u. Спад сердечной деятельности в нашей модели обязан не неполадкам в нем, а спадом сигнала u нервной системы.

Для того чтобы избежать необратимости гибели сердца, необходимо не допускать того, чтобы W стало меньше $W_{крит}$. Причем в первом и втором случаях угрожающего уменьшения W действия должны быть противоположны. При чрезмерной нагрузке ее следует уменьшить и успокоить нервную систему, то есть добиться уменьшения u. Во втором случае чрезмерного спада деятельности сердца необходимо ее усилить и стимулировать нервную систему на увеличение команды. В одних случаях человек своими сознательными действиями может достигнуть требуемого сам, в других ему нужна помощь посторонних и, возможно, соответственно успокаивающие и возбуждающие лекарственные средства и действия. Излишне говорить, что это хорошо известно врачам.

Теперь постараемся с помощью той же модели понять, что происходит при детренировке, старении, интоксикациях и других причинах, понижающих коэффициент полезного действия сердца, то есть когда при тех же W, u и полезной работе затраты f становятся больше и питание сердца g – меньше. В результате происходит уменьшение области Г, в частности увеличение $W_{крит}$ и увеличение минимальной работы сердца, когда оно сохраняет жизнеспособность. Как это ни парадоксально, но с возрастом и болезнью, когда сердцу бы впору отдохнуть, оно не может этого сделать и должно работать интенсивнее даже без внешних нагрузок. Конечно, одновременно падают и максимально допустимые нагрузки, но это вполне понятно.

Область Г можно назвать областью жизненных возможностей сердца. Детренировка, интоксикация, болезни и старость ее уменьшают. Уменьшение это всестороннее, и поэтому падают как возможности интенсивной работы, так и полноценного отдыха.

Уменьшение жизненных возможностей – области Г – облегчает и способствует наступлению сердечных кризов. Для того чтобы их избежать, человек сознательно должен беречь свое сердце, постигая границы его возможностей. Должен осмотрительно, когда это можно, тренировать его, стремясь расширить область жизненных возможностей Г. Это хорошо известно врачам, и они, в частности после тяжелого заболевания, именуемого инфарктом миокарда, назначают выздоравливающему в период реабилитации постепенно возрастающую тренировочную ходьбу по пять и десять километров в день.

Хотелось бы еще добавить, что наша модель применима не только к сердцу, она значительно шире. Она применима к любому живому существу, которое, для того чтобы жить, должно работать, добывая себе пропитание. И в жизни его, как и наше сердце, все время подстерегает кризис “переработки” и кризис “лени”. Человек отличается от диких животных лишь тем, что сумел смягчить безжалостность этих природных кризисов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Я думаю, что на вас произвело впечатление, что такими простыми средствами можно понять и познать причины и сущность неочевидных и непонятных явлений. Если это так и вы действительно удивлены, то, несомненно, вас интересует, за счет чего достигается эта простота. А она обязана в первую очередь широте и необъятности возможностей современного математического мышления. Во вторую очередь тому, кто его применяет. Научиться моделированию, ограничившись только формальным усвоением каких-то правил, по-видимому, невозможно. Не зря говорят об искусстве моделирования, так же как об искусстве медицинской диагностики, игре на скрипке, рисовании. Но все же этому можно научиться, и основную роль в этом обучении играют показы – именно то, что я сделал, – и небольшое количество советов, которые следует осмыслить и умеренно им следовать. Они достаточно общие и не могут служить непосредственным указанием к действию, они лишь дают разумные подсказки, как и что следует делать. Я приведу самые главные.

1. Чем проще модель, тем меньше возможность ошибочных выводов.

2. Модель должна быть простой, но не проще, чем это возможно.

3. Пренебрегать можно чем угодно, нужно только знать, как это повлияет на решение.

4. Модель должна быть грубой: малые поправки не должны кардинально менять ее поведение.

5. Модель и расчет не должны быть точнее исходных данных.

К этому хочется еще добавить, что, составляя математическую модель, желательно знать, что вы хотите от нее узнать и каковы основные факторы реальной системы, которые могут дать ответ. Так именно было при построении модели Каспия с заливом Кара-Богаз-Гол. А с энергетической моделью сердца было не так, а совсем иначе. Стимулом был вопрос: какие выводы можно сделать из того, что сердце подчиняется командам нервной системы и кормит себя само? Так что правила правилами, а жизнь многообразнее и необъятнее и, может быть, поэтому прекрасна. Конечно, не всегда при математическом моделировании нужно что-то изобретать: очень часто можно воспользоваться уже существующими типовыми простыми моделями и их сочетаниями. Хотя и это может оказаться не таким уж очевидным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю.И.* Математические модели естествознания и техники. Нижний Новгород: ННГУ, 1994. Вып. 1. 83 с.; 1996. Вып. 2. 154 с.

2. *Кроновский А.А.*, *Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии. Саратов: Гос. учеб.-науч. центр “Колледж”, 1995. 129 с.

* * *

Юрий Исаакович Неймарк, доктор технических наук, профессор Нижегородского государственного университета, академик Российской академии естественных наук, член Национального комитета по теоретической и прикладной механике. Область научных интересов: механика, теория колебаний и теория динамических систем, теория управления и кибернетика. Лауреат премии АН СССР им. А.А. Андронова и Международной премии Н. Винера. Автор восьми монографий, ряда учебных пособий и циклов лекций, более 400 научных статей и 20 изобретений.