

УДК 334.01

НАЙДЕНОВ НИКОЛАЙ ДМИТРИЕВИЧ

доктор экономических наук, профессор, Российский университет кооперации, Сыктывкарский филиал, Россия, Сыктывкар

НОВОКШОНОВА ЕЛЕНА НИКОЛАЕВНА

кандидат экономических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина. Россия, Сыктывкар

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ОБМЕНА

Аннотация: В статье представлены экономико-математические теории обмена У. С. Джевонса, Л. Вальраса, Дж. Ю. Стиглица, Б. Холмстрёма и др. Теории обмена классифицированы на классические (Ж.Б. Сэй), неоклассические (А. Маршалл), контрактные (Б. Холмстрём), естественно-научные (В. Парето), статистические. Показано, что акцент на обмен в ущерб производству или, наоборот, недооценка обмена в экономическом регулировании ведет к замедлению экономического роста.

Ключевые слова: Обмен; теория «принципал-агент»; контрактная теория; налоговая цена; утилитаризм; роллсианство; равновесие в обмене.

NAYDENOV NIKOLAY DMITRIEVICH

Doctor of Economics, Professor, Russian University of Cooperation, Syktyvkar Branch, Russia, Syktyvkar

NOVOKSHONOVA ELENA NIKOLAEVNA

candidate of economic sciences, associate professor, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, Russia, Syktyvkar

MATHEMATICAL THEORY OF EXCHANGE

Annotation: In the article economic and mathematical exchange theories by W. S. Jevons, L. Walras, J. Y. Stiglitz, B. Holmström are presented. Exchange theories are classified into classical (J.B. Say), neoclassical (A. Marshall), contractual (B. Holmström), natural science (V. Pareto), statistical. It is shown that the emphasis on exchange to the detriment of production or, conversely, underestimation of exchange in economic regulation leads to a slowdown in economic growth.

Keywords: Exchange; the theory of "principal-agent"; contract theory; the tax price; Utilitarianism; Rollsonianism; equilibrium in exchange.

Исследования обмена имеют богатую историю. Большой вклад в исследования обмена внесли К. Поланьи (историческое направление) [10], Дж. Хоманс (психологическое направление) [14]; Г. Беккер [1] и В.В. Радаев (социологическое направление) [8]; К. Маркс [6], А. Маршалл (рыночное направление) [7], Дж. М. Кейнс [4], Дж. Ю. Стиглиц [11].

Исследования обмена будут неполными, если к обмену не применить математические методы. Наша статья имеет целью дать характеристику математического представления обмена.

Исследование обмена имели место с самого начала развития экономической науки (канонической теории, меркантилизма), возобновлялись в каждой новой экономической школе (марксизм, кейнсианство, институционализм) и никогда не

прекращались. Вплоть до XX века обмен сводился к рыночному обмену. Поэтому мы начинаем рассмотрение математических теорий обмена с математических теорий рыночного обмена.

В канонической и классической теории обмена формула рыночного обмена проста:

$$D = S, \text{ где (1)}$$

D – объем поставляемого покупателем к обмену товара; S – объем поставляемого продавцом к обмену товара.

В рыночном обмене есть не наблюдаемые факторы: благосостояние и продавца, и покупателя. Если благосостояние продавца и покупателя в результате обмена возрастают, то обмен состоится, в противном случае продавец и покупатель проигнорируют друг друга. Эта модель принадлежит одновременно к канонической и классической теориям обмена: прирост благосостояния от обмена игнорируется.

Наиболее известным уравнением обмена в классической экономической теории является так называемое тождество Сэя.

В экономике с развитым разделением труда нормальным для каждого человека средством приобретения товаров и услуг служит способность производить для обмена эквивалентные товары и услуги. Производство не только увеличивает предложение товаров, но и, благодаря необходимому покрытию издержек производства, также порождает спрос на эти товары. Отсюда и вывод, – тождество Сэя: «продукты уплачиваются за продукты». В экономике, где используются только счетные деньги, где средством обращения служит товар, ничем не отличающийся от остальных товаров, – суммарная ценность предложения всех товаров всегда в точности равна совокупному спросу на них. Тождество Сэя можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^n p_i D_i \equiv \sum_{j=1}^n p_j S_j \text{ (2)}$$

Суммарный спрос на $n-1$ товаров равен суммарному предложению товаров [2; с. 12]

Уравнение обмена У.С. Джевонса основывается на законе убывающей полезности благ для потребителя. По мнению У.С. Джевонса соотношение, в котором обмениваются два товара, должно быть обратно пропорционально последним ступеням полезности обмениваемых товаров. В терминах современной теории о потребления уравнение обмена У.С. Джевонса трансформируется в знакомое условие потребительского равновесия: равенство предельных полезностей покупаемых товаров на единицу цены.

Обратимся к математическому выражению обмена по Джевонсу. Пусть, a и b представляют собой количества двух благ, которыми обмениваются два индивида. Пусть x и y будут реально обмениваемыми количествами товаров a и b . Пусть φ и ψ – последние ступени полезности обмениваемых товаров. Тогда

$$\frac{\varphi_1(a-x)}{\psi_1} = \frac{y}{x} = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(b-y)} \quad (3)$$

Отношение предельной полезности благ, оставшихся после обмена, к предельной полезности приобретаемых при обмене благ обратно пропорционально пропорции, в которой товары обмениваются. Или, что тоже самое, чем выше значимость, приписываемая благу его владельцем, тем меньшее его количество предлагается для обмена. Если предельная полезность обмениваемого блага обратно пропорциональна его количеству, имеющемуся в распоряжении продавца, то предельная полезность обмениваемого блага обратно пропорциональна количеству уступленного для обмена блага. В современной терминологии уравнение обмена Джевонса можно записать так

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x} \quad (4)$$

или

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} = \frac{y}{x} \quad (5)$$

Обмен будет равновесным, если пропорции обмена будут такими, что отношения предельных полезностей всех реально обмениваемых товаров на единицу цены будут составлять одной и ту же величину [2].

Обратимся к математической модели обмена Л. Вальраса, исходными предпосылками которой являются каноническая и классические теории обмена. Пусть имеются один покупатель и один продавец. Они обмениваются излишками. Продавец предъявляет к обмену товар S , покупатель – товар D . Обмен излишками запишем так

$$S=D \quad (6)$$

Сформулируем ряд определений.

1. Пропорция обмена товара S на товар D называется ценой товара S .
2. Пропорция обмена товара D на товар S называется ценой товара D .
3. Ведущей стороной обмена является покупатель. Продавец продает свой товар не потому, что излишек есть, а потому, что продавец будет приобретать товар D у покупателя.
4. Имеет место двойная продажа и двойная покупка.
5. В процесс обмена привлекается счетный товар. Это можно записать в виде уравнения

$$P + S \cdot p_i - D p_k = 0, \text{ где } (2)$$

P – объем счетного товара, $P \in O_P$; p_i – товара S ; p_k – цена товара D . Счетный товар снимает территориальные и временные разрывы, при которых обмен без товара-посредника (счетного товара) невозможен [3, 35,40-42,103].

Модель обмена Вальраса можно записать и следующим образом.

Пусть

X_{ij}^* – это такое количество товара j , предлагаемое для обмена, которое дает максимальное благосостояние для i -го участника. X_{ij} – фактическое количество товара j , предлагаемое для обмена i -ым участником.

U_i – благосостояние i -го участника, $U_i \rightarrow \max. i=2,3,\dots,n$.

При условии сканирования разных вариантов обмена фактическое количество предлагаемых к обмену товаров будет приближаться к оптимальным, а благосостояние участников обмену будет максимизироваться.

$$p_{ij} X_{ij} \rightarrow p_{ij} X_{ij}^* \quad (8)$$

В общем случае

$$\sum p_{ij}X_{ij} \rightarrow \sum p_{ij}X_{ij}^* \quad (9)$$

Тогда будет справедливым равенство

$$X_{11} - X_{11}^* = \sum p_{(i-1)(j-1)} X_{(i-1)(j-1)}^* - p_{(i-1)(j-1)} X_{(i-1)(j-1)} \quad (10)$$

Последнее уравнение – это выражение так называемого закона Вальраса. Если существует дефицит товара на отдельном рынке, то он компенсируется товарным излишком на других рынках.

Из математической модели обмена Вальраса мы сформулируем несколько дополнительных определений.

1. Существует бюджетные ограничения для продавца и покупателя

$$S \in O_S(11)$$

$D \in O_D$, где

O_S – множество допустимых количеств товара S ; O_D множество допустимых количеств товара D .

2. При отсутствии бюджетных ограничений, иначе говоря, когда имеет место моральный, нравственный и технологический беспорядок, максимум благосостояния маловероятен.

3. Если обмены будут продолжаться бесконечно долго и бесконечно много раз, то продавец и покупатель будут менять пропорции и количества товаров, максимизируя благосостояние от обмена и придут к оптимальному обмену.

$$S_i^* = D_i^* \quad (12)$$

При условии $i \rightarrow \infty$; $U_S \rightarrow \max$; $U_D \rightarrow \max$; $S_i^* = D_i^*$ – пропорция от обмена, дающая максимальный прирост благосостояния для продавца и покупателя; U_S , U_D – уровни благосостояния от обмена для продавца и покупателя при различных сочетаниях цен и количеств товаров.

Модель Вальраса позволяет подойти и к понятию конкуренции, уточнив его. Доля основных игроков на рынке – слишком расплывчатый и неопределенный критерий конкуренции на рынке.

Предположим, что при действующих ограничениях существуют оптимальные цены, оптимальные количества, при которых благосостояния от обмена для продавца и покупателя будут максимальны.

Обозначим через ΔU_i – прирост благосостояния агента i в результате обмена. В начальной и конечной точках сканирования обменных пропорций

$$\Delta U_i = 0, \quad (13)$$

или $U_1(m_i, a_i) = 0$, где m_i, a_i – номера трансакций обмена соответственно в начальной и конечной точках, при которых прирост благосостояния агента i равен нулю.

Если сделать невозможными некоторые сочетания цен и количеств обмениваемых товаров, то тем самым исключаются и вероятно благоприятные сочетания цен и количеств обмениваемых товаров для участников обмена. Чем больше исключаемых из сканирования обменных пропорций, тем ниже уровень конкуренции, и, наоборот, если все возможные сочетания цен и количеств товаров в обмене допустимы, то обменные операции будут совершенно конкурентными.

Монополия ограничивает конкуренцию, потому что ограничивает обменные операции только теми, в которых предельные издержки производства товара меньше цены. Монополия – хороший пример ограничений в конкуренции. При заданной цене конкуренция ограничена.

В бизнесе нередки ситуации, которые связаны с продажей товаров не только с убытком, но и с приплатой. Например, хранение сбережений редко, но бывает, происходит с отрицательной ставкой. Иногда бизнес продается с символической платой в 1 денежную единицу. В классической и неоклассической теории обмена продажа с отрицательной ценой не рассматривается. Модель Вальраса, наоборот, позволяет понять внутренние пружины столь парадоксального обмена – оставление у себя имущества несет большие убытки, чем продажа по символической цене. Продажа товаров по символическим ценам – это свидетельство конкурентного обмена.

Коррупция – выполнение служебных обязанностей за двойную плату от основного работодателя и от клиента, не предусмотренную договором купли-

продажи и трудовым договором, выступает как кража и у работодателя, и у партнера по сделке. В более широком контексте коррупция – это ограничение в конкуренции, которое наносит ущерб благосостоянию всех сторон коррупционной сделки, поскольку коррупция – это не только ложная сделка, но и ограничение в ряде сканирования вариантов обмена для выбора оптимального обмена.

Товарная интервенция – альтернатива заданной цене при регулировании обмена, она не ограничивает сканирование вариантов обмена. Инвестиции в производство товаров также не ограничивают конкуренцию субсидирование потребления не ограничивают конкуренцию.

Модель обмена Вальраса не применима к сектору обмена общественными благами. Обратимся к обмену общественными благами неделимыми благами, т.е. вторая производная от производственной функции общественных товаров не равна нулю.

Дж. Ю. Стиглиц для теоретического представления обмена в общественном секторе предлагает три подхода: использовать замещение частных товаров общественными, налоговой цены, спроса и предложения на общественные товары, а также теории утилитаризма роллсианства.

Общество всегда находится в состоянии выбора между частными и общественными товарами. Точка равновесия определяется суммой предельных замещений частных товаров на сумму предельных замещений индивидов на общественные, суммой предельных норма трансформации частных товаров на общественные, а также равенством предельных норм замещения частных товаров на общественные нормам трансформации частных товаров на общественные [11, с. 138].

Оптимальность выбора частных и общественных товаров можно записать в виде формулы:

$$MRPT_{pppp} = MRS_{pppp} \quad (14)$$

Предельная норма продуктовой трансформации частных товаров в общественные равна предельной норме технической замены производства частных товаров на общественные в производстве [11, с. 123].

Дж.Ю. Стиглиц вводит в анализ понятие налоговой цены, спроса и предложения общественных товаров. При определении налоговой цены спрос и предложение общественных товаров сближаются и находят точку пересечения – оптимальную величину спроса и предложения общественных товаров. Однако достижение равновесия зависит не от индивидов, а от политического процесса [11, с. 150].

Роллсианство как и утилитаризм, предполагают, что индивидуальные предпочтения в общественном хозяйстве складываются по вертикали в отличие от рыночной экономики, где индивидуальные предпочтения складываются по горизонтали. В утилитаризме сложение индивидуальных предпочтений происходит аддитивно, в роллсианстве – дифференцировано. И в том и другом случаях можно записать

$$W = \sum_{i=1}^n D_i \quad (15)$$

Общественное благосостояние есть сумма благосостояний членов общества.

Формула роллсианско-утилитаристкой концепции обмена в общественном хозяйстве имеет вид

$$\text{Max } W = \sum_{i=1}^n U_i + \sum_{k=1}^n U_k \quad (16)$$

Максимум благосостояния общества складывается из благосостояния бедных (i) и богатых (k).

Утилитаризм показывает, что максимум общественного благосостояния достигается при равенстве распределений общественного благосостояния среди богатых и бедных. Роллсианство показывает, что максимум общественного благосостояния достигается при таком распределении, при котором увеличивается благосостояние бедных. В пределе и в роллсианстве, и в утилитаризме должно соблюдаться равенство

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{k=1}^n U_k \quad (17)$$

Максимум благосостояния всех членов общества по отдельности и совместно достигается при уравнительном распределении [11, с. 110].

Согласно теории утилитаризма, в обмене в общественном секторе увеличение полезности одного индивидуума должно иметь равную весомость с

увеличением полезности другого индивидуума. Согласно теории роллсианства в обмене в общественном секторе увеличение полезности одного индивидуума может иметь и не равную весомость с увеличением полезности другого индивидуума. Рассмотрим общество, в котором две группы – группа 1 и группа 2. Общее благосостояние складывается из благосостояний индивидуумов из групп 1 и 2. Группа 1 имеет определенный уровень полезности U_1^* , а группа 2 – уровень U_2^* . Где U_2^* по крайней мере не меньше U_1^* . Если мы увеличим полезность второй группы, сохраняя полезность первой группы неизменной, мы останемся на той же кривой общественного безразличия: т.е. общество не улучшит своего положения. Оно не хочет поступиться какой-либо полезностью группы 1 ради какого-то увеличения полезности группы 2. Если обе группы первоначально имеют одинаковые уровни полезности, благосостояние общества возрастает только в случае, когда повышается благосостояние как группы 1, так и группы 2, и это повышение равно наименьшему повышению благосостояния любой группы.

Согласно Стиглицу, обмен в общественном секторе сводится к выбору пропорций обмена между уменьшением благосостояния одной группы/одного индивида и увеличением благосостояния другой группы/другого индивида [11, с. 112].

На наш взгляд, обмен в общественном секторе по модели утилитаризма или роллсианства отличаются от рыночного обмена только способом формирования спроса и предложения, но не по существу. В рыночном обмене спрос и предложение не распадается на составные части. В утилитаризме/роллсианстве спрос и предложение распадаются на индивидуальные благосостояния, встреча спроса и предложения происходит как перераспределение общественного благосостояния между группами населения. В одном случае равновесие достигается в точке равного распределения общественного благосостояния, в другом – в точке равенства спроса и предложения на общественные товары.

В порядке критики концепции обмена Стиглица следует отметить, что общественные товары неделимы, и поэтому не могут разверстываться по

вертикали. Права собственности могут делиться, но общественные полезности не делятся.

К сектору обмена общественными благами применима теория «Принципал-Агент».

Теория «Принципал-Агент» ставит обменивающиеся стороны изначально в неравное положение. Одна сторона обмена дает поручение (принципал), другая – выполняет это поручение и получает вознаграждение (агент). Обмен предполагает доверительные отношения, системы общей информации, создание целенаправленных мотивов, установление систем контроля за выполнением обязательств обменивающихся сторон. Теория «Принципал-Агент» впервые предложена М. Дженсенем и В. Меклингом в 1932 году [9; 17]. Она представляет собой развитие известного тезиса К. Маркса о разделении собственности и управления.

Во второй половине XX века теория «принципал-агент» получила дальнейшее развитие и активно разрабатывается в настоящее время. Особенно содержательна теория «принципал-агент» в части применения к общественному сектору и структуре собственности в фирме [15;18].

Б. Холмстрём [16] предложил следующую математическую модель обмена в коллективном производстве.

Пусть имеются n агентов. Каждый агент имеет номер i . Каждый агент выполняет ненаблюдаемые действия a_i . Коллективное действие обозначим через A_i , ($a_i \in A_i = [0, \infty]$). Каждый агент несет не денежные издержки v_i . Конвенциональные условия обозначим через \mathbb{R} . $A_i \rightarrow \mathbb{R}$, $v_i \rightarrow \mathbb{R}$.

Примем $v_i(0) = 0$,

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in A \equiv \sum_{i=1}^n A_i. \quad (18)$$

Пусть $s_i(x)$ – доля i -го агента в доходе коллективного производства. Доход распределяется среди агентов. Функция $\sum_{i=1}^n A_i$ – сепарабельна и в денежном и в натуральном выражения, линейна в денежном выражении.

Пусть агент стремится к положительной разнице между его денежными поступлениями и затратами (u), т.е.

$$u_i(m_i, a_i) = m_i - v_i(a_i), \text{ где (19)}$$

m_i – некоторый коэффициент линейной функции. $v_i(a_i)$ – неденежные затраты агента i . Чистые денежные поступления агента в начальной и конечной точках производства равны нулю. Правило, по которому подчиняется распределение долей среди агентов таково:

$$\begin{aligned} &\text{если } s_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ &\text{то } \sum_{i=1}^n s_i(x) = X \text{ для всех } x, \text{ где (20)} \end{aligned}$$

X – доход коллектива, распределяемый среди агентов, s_i – объем денежного вознаграждения агента i , x – размер денежного вознаграждения агента i .

Доход коллектива, распределяемый среди агентов, равен сумме денежных поступлений всех агентов.

В этих условиях оптимум по Парето записывается как:

$$a^* = \arg [x(a) - \sum_{i=1}^n v_i(a_i)] \quad (21)$$

Оптимальная точка обмена в системе отношений «Принципал-Агент» равна экстремуму функции разницы между денежным вознаграждением всех агентов и их затратами.

Если функция долевого распределения коллективного дохода дифференцируема, то мы можем найти точку равновесия по Нэшу. Это a^* , при которой выполняется равенство

$$s'_i x'_i - v'_i = 0 \quad i=1 \quad (22)$$

где:

$s'_i x'_i - v'_i$ – первая производная функции чистого дохода агента по a .

Б. Хольмстрём акцентирует внимание, что первая производная исходного уравнения равна 1.

$\sum_{i=1}^n s'_i = 1$, а производная от долевого распределения коллективного дохода равна 0. Условие равновесия требует нулевого прироста вознаграждения. Таким образом, при равенстве чистых вознаграждений агентов общей сумме распределяемых доходов будет не выполняться условие оптимальности по Нэшу. Отсюда вывод: в коллективной экономике требуются усилия по оптимизации

обмена, или по управлению коллективным производством, есть необходимость в механизме распределений штрафов и вознаграждений в группе.

Обмен предполагает некоторый культурный контент – совокупность исторически сформированных норм и пропорций богатства, нарушение которых ведет за собой дегуманизацию производства и потребления, снижение уровня безопасности индивидов, сужение возможностей самоидентификации членов общества. Культурный контент в теории контрактов первоначально принимается заданным и благоприятным для участников контрактов. Но рассматриваются ситуации, когда нормы, записанные или предполагаемые в рамках контракта, не соблюдаются. Это ситуации морального риска.

Б. Хольмстрём исследовал моральный риск (оппортунистическое поведение) сторон агентского договора. Моральный риск – это риск, что одна из сторон агентского договора вступила в соглашение в условиях неопределенности индивидуального и коллективного поведения и рисков недобросовестных намерений. Б. Холмстрём предложил в вознаграждении агентов соблюдать принцип информативности. Суть этого принципа в зависимости оплаты труда агента от таких величин, которые являются существенными для оценки деятельности этого агента, т.е. от ключевых показателей его конкретной работы.

О.Т. Лебедев и А.Р. Каньковская предложили использовать математический аппарат векторного анализа для описания коллективной работы и обмена в нем [5].

Мы изложим эту концепцию математического аппарата анализа более развернуто.

Любая работа в рамках коллектива может быть представлена как вектор, основная ось системы координат – как сумма проекций векторов на основную ось. Вклад индивидуальной работы на коллективный результат определяется длиной индивидуального вектора агента и косинусом угла между его вектором и основной осью координат. Косинус угла между вектором и осью координат ($\cos A$) можно определить, зная координаты основной оси и индивидуального вектора. Формула определения косинуса угла A такова:

$$\cos A = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \text{ где (23)}$$

x_1 и x_2 – координаты вектора $|a|$; y_1 и y_2 – координаты коллективных результатов, вектор $|b|$.

По известным векторам и косинусу угла A можно определить вклад агента в коллективные результаты. Он определяется по формуле

$$\text{Пр}B_a = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a}, \bar{b}), \text{ где (24)}$$

$\text{Пр}B_a$ – проекция вектора a на основную ось;

$|a|$ – координаты вектора a ;

$\cos(\bar{a}, \bar{b})$ – угол A .

В упрощенном варианте

$$\text{Пр}B_a = \frac{(\bar{a} \cdot \bar{b})}{|\bar{b}|}, \text{ где (25)}$$

$(\bar{a} \cdot \bar{b})$ – скалярное произведение двух векторов, равно сумме произведений соответствующих координат; \bar{a} – вектор агента; \bar{b} – вектор коллективных результатов; $|\bar{b}|$ – модуль вектора коллективных результатов (равен корню квадратному из суммы квадратов координат).

Определив длины векторов всех работников, отдельно можно ранжировать работников по степени влияния на коллективный результат. Заметим, математический аппарат векторов позволяет определить оптимальность, точку равновесия, которая фиксирует существование цепочки соотношений 1) угла A , 2) координат вектора работника, 3) координат проекции вектора работника на основной оси, 4) координат вектора, который соединяет вектор работника и проекцию этого вектора на основную ось.

Уравнение оптимальности в системе векторов коллективной работы имеет вид согласно теореме косинусов

$$|\bar{c}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|a| \cdot |b| \cdot \cos A \text{ (26)}$$

Согласно теореме косинусов квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Оптимум в концепции векторного представления коллективной работы требует большего количества данных, чем данных о проекции индивидуальной работы агента на коллективный результат, а именно данных о координатах третьего вектора, корреспондирующего с углом A . Мы можем утверждать, что это вектор мотивации (или координации, регулирования управления коллективным процессом). Этот вектор уменьшает неопределенность отношений агента и принципала и делает более вероятной оптимальность в коллективной работе.

Математическое представление обмена в системе отношений «Принципал-Агент» дается в работе Л.С. Тарасевича, П.И. Гребенникова, А.И. Леусского [13, с. 246-249].

Пусть результаты коллективной работы являются стохастической функцией затрачиваемых агентами труда

$$Q=aL+v, \text{ где (27)}$$

Q – результат коллективного труда; L – количество труда агентов; показатель производительности агентов; v – стохастическая переменная с нулевым ожиданием.

Денежный эквивалент своих физических и умственных затрат агенты оценивают по формуле

$$H=bL^2; 0<b<1 \text{ (28)}$$

Оплата труда агентов состоит из двух частей: фиксированной суммы, не зависящей от количества труда (m), и доли (δ) конечного результата хозяйственной деятельности коллектива

$$M(r,\delta,v)=m+\delta Q \text{ (29)}$$

Агенты согласны трудиться, если $M \geq H$.

Функция полезности агента имеет вид

$$U_{ar}=m+\delta aL-bL^2 \text{ (30)}$$

Функция полезности принципала имеет вид:

$$U_{pr}=Q-M=aL-m+\delta aL \text{ (31)}$$

Функция общественного благосостояния имеет вид:

$$W=U_{ar}+ U_{pr}=aL-bL^2 \text{ (32)}$$

Путем дифференцирования W определяем, что функция общественного благосостояния достигает максимума при $a = 2bL$. Другим словами, в модели «Принципал-Агент» существуют равновесия принципала, агента и общего благосостояния, если отсутствует неопределенность.

Примем, что агенты склонны избегать риска, их усердие неконтролируемо. Тогда максимум их функции полезности будет определяться уравнением.

$$\frac{dU_{ar}}{dL} = \frac{\delta}{2\sqrt{aL}} - 2bL = 0 \quad (33)$$

Другим словами, в случае избегания риска и неконтролируемого усердия агенты стремятся к увеличению своей доли в общем результате и снижении своих издержек. В этом случае принципал должен определить нижнюю границу оплаты труда агентов и нижнюю границу затрат труда. В противном случае $W \neq U_{ar} + U_{пр} \neq aL - bL^2$, т. е. возникнут чистые потери.

Если принять, что математическое ожидание результатов коллективного труда $v > 0$, вероятность чистых потерь соответственно возрастает.

Мы предлагаем упрощенную модель обмена, интегрирующую модели товарного обмена и модель обмена для общественных товаров.

Пусть имеется продавец, производственная функция которого имеет вид

$$Q = f(K, L), \text{ где (34)}$$

Q – объем производства; K – капитал; L – труд.

Пусть имеется покупатель, линия безразличия которого имеет вид

$$U = f(L, W), \text{ где (35)}$$

U – линия безразличия покупателя между трудом и его вознаграждением.

Парето-оптимум будет достигаться в точке

$$dQ = dU = 0 \quad (36)$$

Равновесие по Нэшу будет достигаться при наборах стратегий из

$|Q_i|$ и $|U_j|$, когда

$$Q_i^*, U_i^* > |Q_{i-1}|, |U_{i-1}| \quad (37)$$

Стратегия обмена будет оптимальной, если она дает благосостояние агента больше, чем любая другая стратегия с учетом вероятности реализации

оптимальной стратегии. Важно отметить, что повышение вероятности реализации оптимальной стратегии обмена вызывает не снижение энтропии в обмене, а, наоборот, повышение энтропии обмена, поскольку рост благосостояния в результате обмена вызывает повышение степени свободы в производстве и потреблении.

Математические модели обмена позволяют углубить понятие конкуренции как взаимодействия производителей. Они показывают конкуренцию со стороны взаимодействия производителей и возникающей отсюда неопределенности обмена. Важный элемент конкуренции – это неопределенность, возникающая из решения задачи оптимума, когда потребитель имеет набор альтернативных продуктов для увеличения своего благосостояния, а производитель производит не все продукты, необходимые для потребителя, а только один. Приближение производственных функций многих производителей к функции безразличия потребителя представляет собой реальную задачу, которую решает рынок и регулятор. В этом приближении оптимум многовариантен, неопределенность достижения равновесия делает необходимыми соглашения между продавцами, в том числе и через функционирование регулятора, которые благоприятны и продавцов и для потребителей. Модель «принципал-агент» интегрирует рыночные модели обмена и модели обмена в общественном секторе экономики.

Важное место в ряду моделей обмена занимают те модели, которые имеют естественно-научный характер. Они строятся на продолжении естественно-научных закономерностей в процессах обмена. Это модели линейного программирования, Парето-эффективности, теории игр, энтропии закона золотого сечения, закона больших чисел. К статистическим моделям обмена относится модель расчета валового национального продукта. Естественно-научные и статистические модели обмена в данной статье не рассматриваются, так как они подробно изложены в научной, учебной и справочной литературе.

Обзор экономико-математических моделей обмена показывает, что обмен имеет важное значение в связке производство-потребление. Однако роль обмена в общественном воспроизводстве нельзя ни преувеличивать, ни преуменьшать. Все

стадии общественного воспроизводства – производство, потребление и обмен имеют равно активное значение для экономического роста. Мы видим преувеличение роли обмена в ситуации, когда имеет место рынок покупателей, преуменьшение – когда имеет место рынок продавцов. И то и другое негативно влияет на экономический рост.

Список литературы

1. Беккер Г. С. Экономический анализ и человеческое поведение / Альманах THESIS. Зима 1993. Том 1. Вып. 1 С. 24-40.
2. Блауг М. Экономическая мысль в ретроспективе. М.: Дело ЛТД, 1994. – 720 с.
3. Вальрас Л. Элементы чистой политической экономии или теории общественного богатства. М.: Изограф, 2000. – 448 с.
4. Кейнс Дж.М. Общая теория занятости, процента и денег. М, Изд-во «прогресс», 1978. – 494 с.
5. Лебедев О.Т., Каньковская А. Р. Основы менеджмента. СПб Издательский дом «МиМ».1998. – 192 с.
6. Маркс К. Капитал. Критика политической экономии. Том первый. Книга 1. Процесс производства капитала. М.: Издательство политической литературы. 1987. 900 с.
7. Маршалл А. Принципы политической экономии. Т. III. М., «Прогресс», 1984. – 351 с.
8. Радаев В.В. Поланьи К. Великая трансформация: политические и экономические истоки нашего времени // Экономическая социология. 2002. № 5. – С. 115-118.
9. Пантя Ю.М. История развития проблемы «принципал-агент» / Журнал экономической теории. 2011. № 4. – С.212-215.
10. Поланьи К. Великая трансформация: политические и экономические истоки нашего времени. М.: Алетейя, 2002. – 320 с.

11. Стиглиц Дж. Ю. Экономика государственного сектора. – М.: Изд-во МГУ. ИНФРА-М, 1997. – 720 с.
12. Сэй Ж.Б. Трактат по политической экономии. М.: Академия народного хозяйства при Правительстве российской Федерации. – 2000. – 232 с.
13. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Микроэкономика. М., Юрайт-Издат. 2006. – 374 с.
14. Хоманс Г. К. Социальное поведение как обмен//Современная зарубежная социальная психология. М.: Издательство Московского университета. 1984. С. 82-91.
15. Berle A., Means G. The Modern Corporation and Private Property, rev.ed.1932.Preprint. N.Y. Harcourt, Brace and World.1968. –380 p.
16. Holmström B. Moral Hazard in Teams/The Bell Journal of Economics, Vol.13, No. 2. (autumn,1982), pp. 324-340.
17. Jensen M., Meckling W. Theory of the Firm Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure/Journal of Financial Economics, 1976. USA.
18. Ross S. The Economic theory of Agency. The Principal's Problem/ American Economic Review. 1973. Vol. 63. № 2, pp.134-139.