ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ – 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. ТОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
С.П. Зубова,
О.К. Плетнёва,
Е.В. Раецкая

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2007

Утверждено научно-методическим советом математического факультета 11 сентября 2007 г., протокол № 1

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов первого курса дневного отделения в помощь при изучении дисциплины «Математический анализ».

Для специальности: 010101 – Математика
и направления: 010200 – Математика. Прикладная математика

Содержание

Введение

Одной из важнейших задач современной высшей школы является активизация поисков путей повышения эффективности самостоятельной работы студентов, что продиктовано необходимостью формировать у обучающихся познавательную самостоятельность, поисковые умения, способность применять фундаментальные знания в дальнейшей профессиональной деятельности.

Предлагаемое пособие открывает серию изданий, которые обеспечат организацию самостоятельной работы студентов математического факультета Воронежского государственного университета. С их помощью обучающиеся смогут самостоятельно разобраться в отдельных темах курса математического анализа. Большое количество детально разобранных примеров с подробной теоретической аргументацией позволит студентам различного уровня подготовленности усвоить представленный материал.

Данное пособие посвящено методу математической индукции и понятиям точных границ числовых множеств.

Метод математической индукции – метод доказательства, который по своему существу связан с понятием числа и в первую очередь имеет наибольшее применение в арифметике, алгебре и теории чисел. Однако понятие числа является основным не только в теории чисел, но и во всей математике, поэтому метод математической индукции широко используется в самых разнообразных её областях.

Понятия точных границ числовых множеств являются основными понятиями в теории числовых множеств и лежат в основе базовых теорем математического анализа.

1. Метод математической индукции

Метод математической индукции применяется в том случае, когда нужно доказать, что некоторое утверждение верно для любого натурального числа n, начиная с $n_0 \in N$.

Для доказательства достаточно доказать:

1) что это утверждение верно для n = n$_0$;

2) что если это утверждение верно для некоторого $k \in N, k \geq n_0$, то оно верно и для $k+1$.

Таким образом, пусть требуется доказать справедливость утверждения P_n для $n \in N, k \geq n_0$. Тогда если

1*) P_{n_0} истинно;

2*) при истинности P_k, $P_k \to P_{k+1}$, $\forall\ k \in N, k \geq n_0$, то P_n верно для любых $n \geq n_0$.

Действительно, пусть выполняется 1*). Тогда из 2*) при $k = n_0$ следует справедливость утверждения P_{n_0+1}. Из 2*) при $k = n_0 + 1$ вытекает справедливость P_{n_0+2}. Полагая далее в 2*) последовательно $k = n_0 + 2$, $n_0 + 3, \ldots$, убедимся в справедливости утверждения P_n для любых $n \in N$, $n \geq n_0$.

2. Применение метода математической индукции для доказательства равенств

Пример 1. Докажите, что числа $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ делятся без остатка на 117 при любых $n \geq 2$.

В качестве P_n будем рассматривать утверждение:

$$\frac{3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}}{117} \in Z, \quad \forall n \geq n_0, \ n_0 = 2.$$

Проверим выполнение условия 1) или, что то же самое, 1*):

$$P_2: \quad \frac{3^2 + 3^{2+1} + 3^{2+2}}{117} = \frac{9 + 27 + 81}{117} = \frac{117}{117} = 1 \in Z.$$

Таким образом, убедились, что P_2 истинно. Введем обозначение:

$$a_k = \frac{3^k + 3^{k+1} + 3^{k+2}}{117}.$$

Нужно теперь доказать, что если справедливо утверждение P_k (т. е., если $a_k \in Z$), то справедливо и P_{k+1} (т. е. $a_{k+1} \in Z$). Имеем

$$a_{k+1} = \frac{3^{k+1} + 3^{(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}}{117}.$$

Преобразуем последнюю дробь, вынеся в числителе множитель 3 за скобки:

$$\frac{3^{k+1} + 3^{(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}}{117} = 3\frac{3^k + 3^{k+1} + 3^{k+2}}{117} = 3 \cdot a_k.$$

Если $a_k \in Z$, то очевидно и $3 \cdot a_k \in Z$, следовательно, утверждение P_{k+1} верно (при условии выполнения P_k).

Теперь, полагая последовательно $k =$ 2, 3, 4, …, получим:

$$P_2 \xrightarrow{(2^*)} P_3 \xrightarrow{(2^*)} P_4 \xrightarrow{(2^*)} \ldots \xrightarrow{(2^*)} P_n,$$

т. е. исходное свойство справедливо для $\forall n \geq 2$.

Пример 2. Докажем, что справедливо равенство

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \quad \forall n \in N. \tag{1}$$

Проверим данное равенство для $n = 1$. Слева в (1) при $n = 1$ стоит сумма чисел от 1 до $\frac{1 \cdot 2}{2}$, т. е. до 1. Значит, только одно слагаемое – число 1, т. е. справа $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, тоже 1. Следовательно, равенство (1) при $n = 1$ выполняется.

Запишем его для n = k:

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}. \tag{2}$$

Нужно доказать, что если (2) выполняется, то оно справедливо и для $n = k+1$, т. е. что из (2) следует равенство

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} =$$
$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{6}. \tag{3}$$

Применим к слагаемым в левой части последнего равенства соотношение (2). Теперь в левой части равенства (3) стоит выражение

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

которое совпадает с выражением, стоящим в правой части равенства (3). То есть из (2) следует (3). Таким образом

$$P_1 \xrightarrow{(k=1)} P_2 \xrightarrow{(k=2)} P_3 \to \ldots \to P_n \xrightarrow{(k=n)} P_{n+1} \to \ldots$$

Следовательно, равенство (1) верно $\forall n \in N$.

Задание 1. Доказать равенство (см. $[4]$, пример 2):

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Задание 2. Доказать равенство (см. $[4]$, пример 3):

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2.$$

3. Применение метода математической индукции для доказательства неравенств

Пример 3. Доказать, что если $x \geq 0$, то

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2, \quad \forall n \in N. \tag{4}$$

Проверим справедливость соотношения (4) для $n = 1$:

$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x + \frac{1 \cdot 0}{2} \cdot x^2.$$

Выпишем его для $n = k$:

$$P_k: \ (1+x)^k \geq 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2.$$

С помощью этого неравенства нужно убедиться, что выполняется

$$P_{k+1}: \qquad (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{2}x^2. \tag{5}$$

Имеем

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \overset{(4)}{\geq} (1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2)(1+x) =$$

$$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + x + kx^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3 =$$

$$= 1 + (k+1)x + (\frac{k(k-1)}{2} + k)x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Отбросим неотрицательное слагаемое $\frac{k(k-1)}{2}x^3$, получим

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{k(k-1+2)}{2}x^2,$$

т. е. справедливо неравенство (5). И если $P_k \to P_{k+1}$, то

$$P_1 \to P_2 \to P_3 \to \ldots \to P_n \ldots, \quad \forall n \in N.$$

Пример 4 (см. $[1]$, пример 10). Доказать неравенство

$$P_n: \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \forall n \in N. \tag{6}$$

Проверим выполнение P_1: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (поскольку $\sqrt{3} < 2$).

Запишем P_k:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}. \tag{7}$$

Оценим левую часть неравенства (6) с $n = k+1$ с помощью неравенства (7):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}.$$

Но значение $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$ меньше, чем значение $\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}$ (докажите самостоятельно).

То есть из выполнения P_k следует выполнение P_{k+1}. Следовательно, неравенство (6) справедливо $\forall n \in N$.

Задание 3. Доказать неравенство (см. $[4]$, пример10.1(а)):

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \qquad (n\ge 2).$$

4. Формула бинома Ньютона

Большую роль в математике играет формула, называемая формулой бинома Ньютона. Речь идет о формуле для возведения в натуральную степень n суммы двух слагаемых a и b $(a, b\in R)$, то есть о формуле для вычисления выражения $(a+b)^n$. Известны следующие формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2= a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Их можно переписать в виде

$$(a+b)^2= 1\cdot a^2+\frac{2}{1}ab+\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}b^2,$$

$$(a+b)^3 = 1\cdot a^3+\frac{3}{1}a^2b+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ab^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}b^3. \qquad (8)$$

Заметим, что здесь участвуют коэффициенты

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

с $n=2$ и $n=3$.

Введем обозначения

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m} \quad \text{при} \quad m>0 \qquad (9)$$

и

$$C_n^0=C_n^{\,n}=1.$$

Тогда формулы (8) запишутся в виде

$$(a+b)^2= C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2= \sum_{m=0}^{2}C_2^m a^{2-m}b^m,$$

$$(a+b)^3 = C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3 = \sum_{m=0}^{3}C_3^m a^{3-m}b^m.$$

Естественно предположить, что

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m. \qquad (10)$$

Действительно, эта формула верна (она называется формулой бинома Ньютона) и доказать её можно с помощью метода математической индукции.

Предварительно нужно изучить некоторые свойства выражений C_n^m.

Введём обозначение $k!$ для $k\in N$:

$$k!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (k-1)\cdot k.$$

Например, $3! = 1\cdot 2\cdot 3=6,\quad 5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=240.$

Теперь выражение C_n^m [см. (9)] при $m>0$ можно записать в другой форме:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}=$$
$$=\frac{n(n-1)...(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot ...\cdot 2\cdot 1}{m!(n-m)\cdot ...\cdot 2\cdot 1}.$$

То есть:

$$C_n^m=\frac{n!}{m\,!(n-m)!}, \qquad n, m\in N. \qquad (11)$$

Например, $C_5^2=\dfrac{5!}{2!(5-2)!}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=10$. Заметим, что формула (11) более удобна для вычисления: $C_5^2=\dfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$, но для изучения свойств C_n^m более удобна формула (9).

Для доказательства формулы бинома Ньютона нам понадобятся следующие свойства биномиальных коэффициентов:

$$C_n^m=C_n^{n-m} \qquad (12)$$

и

$$C_n^m+C_n^{m-1}= C_{n+1}^m. \qquad (13)$$

Задание 4. Убедитесь, что $C_7^5 = C_7^2$, что $C_8^5 + C_8^4 = C_9^5$.

При доказательстве свойства (12) по формуле (11) имеем

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m.$$

Доказательство свойства (13):

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1))!}.$$

Приведём последнюю сумму к общему знаменателю, домножив первое слагаемое на $(n-m+1)$, а второе на m:

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!(n-m+1+m)}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!((n+1)-m)!} = C_{n+1}^m.$$

Перейдём к доказательству формулы (10) методом математической индукции.

Во-первых, формула верна для $n=1$ (убедитесь), $n=2$, $n=3$ [см. (8)].

Во-вторых, запишем её для $n=k$:

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k \cdot b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^1 \cdot b^{k-1} + C_k^k a^0 \cdot b^k. \quad (14)$$

Используя эту формулу, найдём выражение для $(a+b)^{k+1}$:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)\cdot(a+b)^k = (a+b)\times$$
$$\times(C_k^0 a^k \times b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^1 \cdot b^{k-1} + C_k^k a^0 \cdot b^k) =$$
$$= C_k^0 a^{k+1} \cdot b^0 + C_k^1 a^k b^1 + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} a^2 \cdot b^{k-1} + C_k^k a^1 \cdot b^k +$$
$$+ C_k^0 a^k \cdot b^1 + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots + C_k^{k-1} a^1 \cdot b^k + C_k^k a^0 \cdot b^{k+1}.$$

Приведём подобные слагаемые:

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} \cdot b^0 + (C_k^1 + C_k^0) a^k b^1 + (C_k^2 + C_k^1) a^{k-1} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + (C_k^k + C_k^{k-1}) a^1 \cdot b^k + C_k^k a^0 \cdot b^{k+1}. \quad (15)$$

Заметим, что $C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0$, $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$, и по формуле (13)

$$C_k^m + C_k^{m-1} = C_{k+1}^m, \quad m = 1, 2, \ldots k.$$

Теперь выражение (15) записывается в виде

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} \cdot b^0 + C_{k+1}^1 a^k b^1 + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_{k+1}^k a^1 \cdot b^k + C_{k+1}^{k+1} a^0 \cdot b^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m.$$

То есть из (14) следует формула (16), следовательно, формула (10) верна для любых $n \in N$.

Задание 5. Применить формулу бинома Ньютона к выражениям

$$(a+b)^5, \quad (a+b)^{10}, \quad (1+x)^n.$$

Пример 5. Доказать неравенство

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}, \quad \forall n \in N. \quad (16)$$

Для доказательства воспользуемся формулами бинома Ньютона для выражений, стоящих в левой и правой частях данного неравенства:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}, \quad (17)$$

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 1 + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)\cdot n}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} +$$
$$+ \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}. \quad (18)$$

Заметим, что первые пары слагаемых в правых частях выражений (17) и (18) одинаковые. Сравним третьи слагаемые. Имеем

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} < \frac{(n+1)\cdot n}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2},$$

то есть

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}, \quad (19)$$

поскольку

$$\frac{n^2-1}{n(n+1)} < \frac{n^2}{n(n+1)}.$$

Сравним m-ые слагаемые. Докажем, что

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(m-1)}\cdot\frac{1}{n^{m-1}} \le \quad (20)$$
$$\le \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-m+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(m-1)}\cdot\frac{1}{(n+1)^{m-1}}.$$

После сокращения выражение (20) можно записать в виде

$$\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-m+2}{n} \le \frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-m+3}{n+1}.$$

Первые сомножители здесь одинаковые. Сравним вторые:

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \qquad \text{[неравенство (19)].}$$

Для третьих сомножителей

$$\frac{n-2}{n} < \frac{n-1}{n+1},$$

так как

$$\frac{n^2-n-2}{n(n+1)} < \frac{n^2-n}{n(n+1)}.$$

Для k-х сомножителей имеем

$$\frac{n-k}{n} < \frac{n-k+1}{n+1},$$

поскольку

$$\frac{n^2-(k-1)n-k}{n(n+1)} < \frac{n^2-(k-1)n}{n(n+1)}.$$

Итак, каждое слагаемое в (17) не превосходит соответствующего слагаемого в (18). Кроме того, в (18) большее количество слагаемых, чем в (17). Следовательно, неравенство (16) верно.

Пример 6 (см. [1], № 8). С помощью метода математической индукции и формулы бинома Ньютона доказать следующее неравенство:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{при} \quad n > 1. \qquad (21)$$

Проверим выполнение этого неравенства для $n = n_0 = 2$:

$$2! < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Запишем его для $n = k$:

$$P_k: \quad k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k. \qquad (22)$$

В силу неравенства (22) имеем:

$$(k+1)! = k!(k+1) < \frac{(k+1)^{k+1}}{2^k}.$$

Докажем, что последнее выражение меньше, чем $\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$, т. е.

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{2^k} < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}.$$

Преобразуем его:

$$2 < \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Действительно, по формуле бинома Ньютона получаем

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = 1 + \frac{k+1}{1}\cdot\frac{1}{k+1} + \frac{(k+1)k}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 + \ldots$$

В последнем выражении, отбросив все положительные слагаемые, кроме первых двух (тем самым уменьшив сумму), получим

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} > 1 + \frac{k+1}{k+1} = 2.$$

То есть из неравенства P_k следует неравенство P_{k+1}, тем самым неравенство (21) доказано.

5. Верхние и нижние границы числовых множеств

Числовое множество $X \subset R$ называется *ограниченным сверху*, если существует число $c \in R_+$... такое, что для всякого элемента $x \in X$ выполняется неравенство $x \le c$, т. е.

$$(X - \text{огр. св.}) \Leftrightarrow (\exists (c \in R_+) \forall (x \in X)[x \le c]). \qquad (23)$$

Число c называют *мажорантой* множества X.

Аналогично числовое множество $X \subset R$ называется *ограниченным снизу*, если существует число $c \in R_-$ такое, что для всякого элемента $x \in X$ выполняется неравенство $x \ge c$, т. е.

$$(X - \text{огр.сн.}) \Leftrightarrow (\exists (c \in R_-) \forall (x \in X)[x \ge c]). \qquad (24)$$

В этом случае c называют *минорантой* множества X.

Примеры.

1. Для множества $X = (1{,}5]$ мажорантой является любое число, большее или равное 5, минорантой является любое число не большее, чем 1.

2. Множество $X = (-\infty; 3)$ ограничено сверху любым числом, большим или равным 3.

Множество X *не ограничено сверху*, если для любого $c \in R_+$ существует элемент $x \in X$ такой, что $x > c$, т. е.

$$(X - \text{не огр. св.}) \Leftrightarrow (\forall (c \in R_+) \exists (x \in X)[x > c]).$$

Аналогично:

$$(X - \text{не огр. сн.}) \Leftrightarrow (\forall (c \in R_-) \exists (x \in X)[x < c].$$

Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Задания.

1. Убедиться, что множество натуральных чисел N является ограниченным снизу, но не является ограниченным сверху.

2. Является ли множество $X = \{\frac{1}{n}, n \in N\}$ ограниченным сверху? Ограниченным снизу?

3. Является ли множество $X = \{x^2 - 4x + 5, x \in R\}$ ограниченным сверху? Ограниченным снизу?

4. Являются ли множества $X_1=\{arctgx, x\in R\}$, $X_2=\{\arcsin x, x\in[-1,1]\}$ ограниченными?

Если множество ограничено сверху (снизу), то среди всех мажорант (минорант) можно найти наименьшее (наибольшее) число.

Наименьшая из всех мажорант называется *верхней границей (точной верхней границей) числового множества, или супремумом множества* X (*sup* X).

Наибольшая из всех минорант называется *нижней границей (точной нижней границей) числового множества, или инфимумом множества* X (*inf* X).

Замечание. Если X не ограниченное сверху множество, то полагают $\sup X=+\infty$. Если X не ограниченное снизу множество, то полагают $\inf X=-\infty$.

Теорема. Всякое непустое числовое множество имеет точные верхнюю и нижнюю границы.

6. Свойства точных границ множества

В случае ограниченного сверху множества X имеет место соотношение

$$(M=\sup X)\Leftrightarrow\begin{cases}1.\forall(x\in X)[x\le M],\\ 2.\forall(\varepsilon>0)\exists(x'\in X)[x'>M-\varepsilon].\end{cases}\tag{25}$$

В случае ограниченного снизу множества X имеет место соотношение

$$(m=\inf X)\Leftrightarrow\begin{cases}1.\forall(x\in X)[x\ge m],\\ 2.\forall(\varepsilon>0)\exists(x''\in X)[x''<m+\varepsilon].\end{cases}\tag{26}$$

Докажем свойства 1 и 2 в (25). Дано: $M=\sup X$, т. е. M – наименьшая из мажорант множества X. Предположим, что свойство 1 не выполняется, т. е. существует $x\in X$ – такой, что $x>M$. Но тогда M не является мажорантой множества X (?!). Предположим, что не выполняется второе свойство в (25): существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого $x'\in X$ имеет место неравенство $x'\le M-\varepsilon$. Но тогда число $(M-\varepsilon)$ является мажорантой множества X, причем меньшей, чем M, и тогда M не является наименьшей из мажорант (?!).

Замечание. Двойные стрелки $\Leftrightarrow$ в (25) и в (26) говорят о том, что если некоторое число M (или m) обладает свойствами 1–2, то это число является точной верхней границей (или точной нижней границей) множества X. Действительно, свойство 1 в (25) говорит о том, что M является мажорантой множества X [см. (23)].

Второе свойство в (25) показывает, что M есть наименьшая из мажорант. Действительно, если бы существовала мажоранта M^* меньшая,

чем M, то, взяв $\varepsilon=M-M^*>0$, мы получили бы $x'>M-(M-M^*)=M^*$, т. е. M^* – не мажоранта (?!).

Задание 6. Доказать, что:

а) $m=\inf X$ обладает свойствами 1–2 в (26);

б) число m, имеющее свойства 1–2 в (26), является точной нижней границей множества X.

Примеры.

1. Для множества $X=[a,b]$ число b является $\sup X$, число a является $\inf X$.

2. Множество $X=(a,b)$ имеет $\sup X=b$, $\inf X=a$. Покажем, что $\sup X=b$:

1) $\forall x\in(a,b)$ выполняется неравенство $x<b$;

2) для любого достаточно малого $\varepsilon\in(0,b-a)$ существует число x' (например, $x'=b-\frac{\varepsilon}{2}$), которое принадлежит X (так как $b-\frac{\varepsilon}{2}<b$), и $x'>b-\varepsilon$ (поскольку $b-\frac{\varepsilon}{2}>b-\varepsilon$).

3. Покажем, что инфимумом множества $X=\{\arccos t, t\in[-1,1]\}$ является число 0:

1) $\arccos t\ge 0, \forall t\in[-1,1]$;

2) $\forall(\varepsilon>0)\exists(t'\in[-1,1])[\arccos t'<0+\varepsilon=\varepsilon]$. Например, $t'=\cos\frac{\varepsilon}{2}$ (тогда $\arccos t'=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$).

Пример 7. Убедимся, что множество $X=\{x, x^3<3\}$ имеет $\sup X=\sqrt[3]{3}$, $\inf X=-\infty$.

Имеем:

1) из неравенства $x^3<3$ следует $x<\sqrt[3]{3}$;

2) $\forall(\varepsilon>0)$ существует такой x', что $(x')^3<3$, но $x'>\sqrt[3]{3}-\varepsilon$. Возьмем $x'=\sqrt[3]{3}-\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $(\sqrt[3]{3}-\frac{\varepsilon}{2})^3<3$ и $\sqrt[3]{3}-\frac{\varepsilon}{2}>\sqrt[3]{3}-\varepsilon$, т. е. выполнены свойства (25).

Далее: $\inf X=-\infty$, так как X не ограниченное снизу множество. Действительно, какое бы число $c>0$ мы ни взяли, есть число $x<-c$ такое, что $x^3<3$. Например, $x=-2c<-c$ и $(-2c)^3=-8c^3<0<3$, т. е. X не ограниченное снизу множество и $\inf X=-\infty$.

Пример 8. Пусть $\{-x\}$ – множество чисел, противоположных числам $x \in \{x\}$. Доказать, что $\inf\{-x\} = \sup\{x\}$ (см. $[4]$, пример 18 (а)).

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\{x\}$ – ограниченное сверху множество. Обозначим $\{x\} = X$, sup $X = M$ и $\{-x\} = X'$. Имеем из (25):

$$\begin{cases} 1. \forall (x \in X)[x \le M], \\ 2. \forall (\varepsilon > 0)\, \exists (x' \in X)[x' > M - \varepsilon]. \end{cases}$$

Умножим неравенства в прямых скобках на (–1). Из первого неравенства следует, что $\forall(-x \in X')[-x \ge -M]$. Из второго неравенства вытекает, что $\forall(\varepsilon > 0)\, \exists\, ((-x') \in X')[-x' < -M + \varepsilon]$, т. е. $-M = \inf X'$ согласно (26). А это и означает, что $\inf\{-x\} = -M = -\sup\{x\}$.

Пример 9. Пусть $\{x + y\}$ есть множество всех сумм $x + y$, где $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$. Доказать равенство (см. $[4]$, пример 19 (а)):

$$\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}. \qquad (27)$$

Доказательство. Обозначим $\{x\} = X$, $\{y\} = Y$, $\{x + y\} = Z$, $\inf X = m_1$, $\inf Y = m_2$, $m_3 = m_1 + m_2$. Требуется доказать: $\inf Z = m_3$.

Докажем равенство (27) для ограниченных снизу множеств X, Y. Тогда множество Z тоже ограничено снизу (докажите).

Из первого свойства (26) следует:

$$\forall\, (x \in X)[x \ge m_1] \quad \text{и} \quad \forall\, (y \in Y)[y \ge m_2].$$

Тогда

$$\forall\, (z \in Z, z = x + y)[z \ge m_1 + m_2 = m_3]. \qquad (28)$$

Вторые свойства inf X и inf Y дают:

$$\forall\, (\varepsilon > 0) \exists (x'' \in X)\left[x'' < m_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad \text{и} \quad \forall\, (\varepsilon > 0) \exists (y'' \in Y)\left[y'' < m_2 + \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Отсюда

$$\forall\, (\varepsilon > 0) \exists (z'' \in Z, z'' = x'' + y'')\left[z'' < m_1 + \frac{\varepsilon}{2} + m_2 + \frac{\varepsilon}{2} = m_1 + m_2 + \varepsilon = m_3 = \varepsilon\right] (29)$$

Из (28) и (29) следует, что $m_1 + m_2 = \inf Z$, что и требовалось доказать.

Задание 7. Решить примеры 18(б), 19(б), 20(а, б) из $[4]$.

Литература

1. Ильин В.А. Математический анализ / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2004. – Ч. 1. – 357 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Физматлит, 2003. – Т.1. – 424 с.

3. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М. : Высш. шк., 2002. – Кн. 1. – 736 с.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : Аст* Астрель, 2002. – 558 с.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-1.
МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ.
ТОЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Учебно-методическое пособие

Составители:
Зубова Светлана Петровна,
Плетнёва Ольга Константиновна,
Раецкая Елена Владимировна

Редактор О.А. Исаева

Подписано в печать 17.12.07. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 1,2.
Тираж 100 экз. Заказ 2077.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394 000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. 208-298, 598-026 (факс)
http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_center@typ.vsu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394 000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 204-133.