МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ЗАОЧНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра физики

ФИЗИКА

Раздел 2. Электростатика. Постоянный электрический ток.

Основные законы и формулы.
Методические указания к решению задач.

Факультеты все

Специальности все

Санкт-Петербург

1997

Утверждено редакционно-издательским советом института.

УДК 53(07)

Физика. Раздел 2. "Электростатика. Постоянный электрический ток". Основные законы и формулы. Методические указания к решению задач. - СПб.:СЗПИ, 1997, - 25 с., ил. 6.

Данное учебно-методическое пособие содержит основные законы и формулы физики, рекомендации к решению задач, примеры решения задач и рекомендуемую литературу по разделу "Электростатика. Постоянный электрический ток", а также справочные таблицы. Пособие составлено в соответствии с программой по физике для инженерных специальностей высших учебных заведений.

Рассмотрено на заседании кафедры физики.

Одобрено методической комиссией факультета радиоэлектроники.

Рецензенты: кафедра физики СЗПИ (и.о.зав.каф. физики В.А.Подхалюзин, канд. техн. наук, доц.);
А.Г.Дмитриев, докт. физ-мат. наук, проф.каф. экспериментальной физики СПбГТУ.

Составители: Н.А.Елисеева, канд. физ.-мат. наук, доц.
К.Ф.Комаровских, докт. физ.-мат. наук, проф.
И.А.Торчинский, канд. физ.-мат. наук, доц.
В.Б.Харламова, доц.

Научные редакторы: Ю.А.Карташов, канд. техн. наук, проф.
И.В.Попов, канд. физ.-мат. наук, доц

Предисловие

Цель настоящего учебно-методического пособия - оказание помощи студентам СЗПИ всех специальностей в изучении курса физики.

Основной учебный материал пособия содержит шесть разделов физики, изданных отдельными брошюрами:

1. Физические основы механики.
2. Электростатика. Постоянный электрический ток.
3. Магнитостатика. Электромагнетизм.
4. Колебания и волны. Волновая оптика.
5. Молекулярная физика. Термодинамика.
6. Квантовая оптика. Физика атома. Элементы квантовой механики. Физика твердого тела. Физика атомного ядра.

В каждом из разделов приведены основные формулы и примеры решения задач.

Кроме того, в пособии даны общие методические указания, список рекомендуемой учебной литературы и справочные таблицы.

Общие методические указания к решению задач, выполнению и оформлению контрольных работ

1. В зависимости от объема изучаемого курса физики студенты выполняют разное число контрольных работ:

- односеместровый курс физики - две конрольные работы;
- двухсеместровй курс физики - три контрольные работы;
- трехсеместровый курс физики - пять контрольных работ.

2. Контрольные работы выполняются в школьной тетради, на обложке которой приводятся сведения о студенте (фамилия, имя, отчество, факультет, шифр, номер специальности), а также номер контрольной работы, номер варианта и номера всех задач контрольной работы.

3. Условие каждой задачи переписывается полностью, без сокращений.

4. Решения сопровождаются подробными пояснениями, с обязательным использованием рисунков, выполненных чертежными инструментами. При этом оставляются поля и промежутки не менее 10 мм между строками для замечаний преподавателя.

5. Последовательность решения задач:

а) вводятся буквенные обозначения всех используемых физических величин;

б) под рубрикой "Дано" кратко записывается условие задачи с переводом единиц в систему СИ;

в) приводится рисунок, поясняющий условие;

г) формулируются физические законы и обосновываются возможности их использования при решении данной задачи;

д) на основе сформулированных законов составляются уравнения для искомых величин в системе СИ;

е) находятся решения этих уравнений и выводятся рабочие формулы в общем виде;

ж) по рабочим формулам проверяется размерность искомых величин;

и) проводятся вычисления (с точностью не более 2-3 значащих цифр) в системе СИ. Числовые значения величин записываются в виде десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой, умноженной на соответствующую степень десяти.

6. В конце контрольной работы приводится список использованной литературы.

Выполненная контрольная работа сдается на рецензию преподавателю по крайней мере за одну-две недели до экзамена (зачета) по физике. После рецензирования вносятся исправления в решения задач в соответствии с замечаниями преподавателя. Исправленные решения помещаются в конце тетради с контрольной работой, которая сдается на повторную рецензию.

Зачет по контрольной работе принимается преподавателем в процессе собеседования по правильно решенной и отрецензированной контрольной работе.

Литература

Основная

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики М.: Высшая школа, 1989.

2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. М.: Наука, 1982, 1988.

Дополнительная

3. Комаровских К.Ф. и др. Электростатика. Постоянный ток. Текст лекций. Л.: СЗПИ. 1980.

4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука. 1990.

5. Чертов А.Б., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Высшая школа. 1988, 1991.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ И В ВЕЩЕСТВЕ.

Основные законы и формулы

Сила, действующая на пробный заряд q' в данной точке электростатического поля (ЭП)

$$F' = q'E\ ,$$

где E - напряженность в данной точке ЭП.

Напряженность ЭП в газообразном или жидком изотропном диэлектрике:

а) вне равномерно заряженной сферы произвольного радиуса

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r}\ ,$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор проведенный из центра сферы в точку наблюдения, ε_0 - электрическая постоянная,

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\Phi}{м}\ ;$$

ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды;

б) вне бесконечного равномерно заряженного цилиндра произвольного радиуса

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon r}\ ,$$

где τ - линейная плотность заряда на цилиндре (заряд на единице длины цилиндра вдоль образующей), r - расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения;

в) бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\ ,$$

где σ - поверхностная плотность заряда (заряд на единицу площади).

Потенциальная энергия пробного заряда в данной точке ЭП

$$W = q'\varphi,$$

где φ - потенциал в данной точке ЭП.

Потенциал ЭП в газообразном или жидком изотропном диэлектрике:

а) вне равномерно заряженной сферы произвольного радиуса

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r}\ ;$$

б) вне бесконечного равномерно заряженного цилиндра произвольного радиуса

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln r + \mathrm{const};$$

в) вне бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}x + \mathrm{const},$$

где x - расстояние от плоскости до точки наблюдения.

Принцип суперпозиции полей

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i, \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i,$$

где N - число точечных зарядов, i - номер заряда, $\vec{E}_i$ и φ_i - напряженность и потенциал ЭП i-того точечного заряда, $\vec{E}$ и φ - напряженность и потенциал результирующего ЭП.

Работа сил ЭП по перемещению пробного заряда q' из точки с потенциалом φ_1 в точку ЭП с потенциалом φ_2,

$$A' = q'(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Связь между напряженностью и потенциалом в однородном ЭП

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed,$$

где d - расстояние между эквипотенциальными поверхностями с потенциалами φ_1 и φ_2, $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ - разность потенциалов (напряжение).

Поток вектора напряженности ЭП ΔN_E или поток вектора электрической индукции ΔN_D через:

а) плоскую площадку ΔS в однородном ЭП

$$\Delta N_E = \vec{E}\Delta\vec{S} = E\Delta S\cos\alpha$$

$$\Delta N_D = \vec{D}\Delta\vec{S} = D\Delta S\cos\alpha$$

где $\Delta\vec{S} = \vec{n}\Delta S$ - вектор, длина которого равна ΔS, а направление совпадает с направлением нормали $\vec{n}$ к площадке; α - угол между вектором $\vec{E}$ или $\vec{D}$ и нормалью $\vec{n}$;

б) через замкнутую поверхность S в произвольном ЭП (теорема Гаусса)

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}q_i + \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{M}q'_k,$$

где N и M - число свободных и связанных зарядов, заключенных внутри поверхности S, соответственно; $\sum\limits_{i=1}^{N} q_i$ - алгебраическая сумма свободных зарядов, $\sum\limits_{k=1}^{M} q_k^{l}$ - алгебраическая сумма связанных зарядов.

Соотношение между вектором электрической индукции $\vec{D}$ и напряженностью $\vec{E}$ ЭП в случае изотропных диэлектриков

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

Связь вектора поляризации $\vec{P}$ и напряженности ЭП в диэлектрике

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E}.$$

Поверхностная плотность σ' связанных зарядов на границе диэлектрика равна

$$\sigma' = P\cos\alpha,$$

где α - угол между вектором поляризации $\vec{P}$ и нормалью к границе.

Электроемкость конденсатора

$$C = q / U,$$

где q - заряд на обкладке, U - напряжение на конденсаторе.

Электроемкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где ε - диэлектрическая проницаемость среды между обкладками, S - площадь обкладок, d - расстояние между ними.

При последовательном соединении конденсаторов одноименные заряды на обкладках всех конденсаторов одинаковы, при параллельном соединении конденсаторов напряжения на всех конденсаторах одинаковы.

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{cu^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Объемная плотность энергии ЭП (энергия, приходящаяся на единицу объема ЭП)

$$w = \frac{ED}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. В вершинах квадрата находятся одинаковые точечные заряды 30 нКл. Какой отрицательный заряд надо поместить в центре квадрата, чтобы указанная система зарядов находилась в равновесии?

Дано:

Квадрат

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 30$ нКл $= 30 \cdot 10^{-9}$ Кл.

$q_5 = ?$

Решение. Все заряды, расположенные в вершинах квадрата, находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центр квадрата, чтобы какой-нибудь из четырех зарядов, например q_1, находился в равновесии. Заряд q_1 , будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна 0 (рис.1)

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 = \vec{F} + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 = 0 , \qquad (1)$$

где $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$ - силы, с которыми соответственно действуют на заряд q_1 заряды q_2 , q_3 , q_4, q_5 ; $\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ - равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_4$.

По закону Кулона, имея в виду, что $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$, получим

$$F_2 = F_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\varepsilon r^2} , \qquad (2)$$

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\varepsilon r^2} , \qquad (3)$$

$$F_5 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q|q_5|}{\varepsilon(r/2)^2} , \qquad (4)$$

где a - сторона квадрата; $r = a\sqrt{2}$ - диагональ квадрата.

Равнодействующая сил $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_4$, как следует из рис.1, по напра-влению совпадает с силой F_3 и по модулю равна $F = \sqrt{F_2^2 + F_4^2} = F_2\sqrt{2}$. С учетом этого векторное равенство (1) можно заменить скалярным

$$F + F_3 - F_5 = F_2\sqrt{2} + F_3 - F_5 . \qquad (5)$$

Равенство (5) с учетом (2) - (4) примет вид

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2\sqrt{2}}{\varepsilon a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\varepsilon 2a^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q|q_5|}{\varepsilon a^2/2} = 0 .$$

Откуда $\quad |q_5| = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{4} \right) q$.

Произведя вычисления, получим

$|q_5| = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{4} \right)$ $3 \cdot 10^{-8}$ Кл = $2{,}87 \cdot 10^{-8}$ Кл.

Следует отметить, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым.

Пример 2. Два точечных заряда 2 нКл и -1 нКл находятся в воздухе на расстоянии 5 см друг от друга. Определить напряженность и потенциал поля в точке, удаленной от первого заряда на расстояние 6 см и от второго заряда на 4 см.

Дано:

q_1 = 2 нКл

q_2 = - 1 нКл

d = 5 см

r_1 = 6 см

r_2 = 4 см

E - ?

φ - ?

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Напряженность результирующего поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Напряженности полей, создаваемых в воздухе ($\varepsilon = 1$) зарядами q_1 и q_2 :

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\varepsilon r_1^2} , \qquad (1)$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{\varepsilon r_2^2} . \qquad (2)$$

Направления векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ указаны на рис.2. Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по теореме косинусов

$$E = (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos\square)^{1/2} , \qquad (3)$$

где α - угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Из рис.2 видно, что $\beta = \pi - \alpha$. Тогда $\cos\beta = -\cos\alpha$.

Следовательно,

$$E = (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos\square)^{1/2} . \qquad (4)$$

Из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d по теореме косинусов находим $\cos\beta = (r_1^2 + r_2^2 - d^2) / (2r_1r_2)$.

Вычислим $\cos\beta$ отдельно

$$\cos\beta = \frac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 4} = 0{,}565 .$$

Выразим все величины в единицах СИ: $q_1 = 2\cdot10^{-9}$ Кл, $q_2 = -10^{-9}$ Кл, $r_1 = 6\cdot10^{-2}$ м, $r_2 = 4\cdot10^{-2}$ м, $1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot10^9$ м/Ф, $\varepsilon = 1$.

Произведя вычисления по формулам (1), (2), (4), (5), получим:

$$E_1 = 9\cdot10^9 \frac{2\cdot10^{-9}}{\left(6\cdot10^{-2}\right)^2} = 5\cdot10^3 \text{ В/м},$$

$$E_2 = 9\cdot10^9 \frac{10^{-9}}{\left(4\cdot10^{-2}\right)^2} = 5{,}62\cdot10^3 \text{ В/м}.$$

При вычислении E_2 знак заряда q_2 опущен, так как знак минус определяет направление вектора $\vec{E}_2$, а направление $\vec{E}_2$ было учтено при его графическом изображении (рис. 2).

$$E = \sqrt{\left(5\cdot10^3\right)^2 + \left(5{,}62\cdot10^3\right)^2 - 2\cdot5\cdot10^3\cdot5{,}62\cdot10^3\cdot0{,}565} = 4{,}97\cdot10^3 \text{В / м} .$$

По принципу суперпозиции потенциал результирующего поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2, равен алгебраической сумме потенциалов φ_1 и φ_2, т.е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\varepsilon r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\varepsilon r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right) . \qquad (5)$$

Произведя вычисления, получим

$$\varphi = 9\cdot10^9\left(\frac{2\cdot10^{-9}}{6\cdot10^{-2}} + \frac{-10^{-9}}{4\cdot10^{-2}}\right) = 75 \text{ В}.$$

Пример3. На тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом 6 см, равномерно распределен заряд с линейной плотностью 20нКл/м. Определить напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги, если длина нити составляет 1/3 длины окружности.

Дано:
$R = 6$ см
$\tau = 20$ нКл/м
$l = 2/3\ \pi R$

E - ? φ - ?

Решение. Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось OY была бы расположена симметрично относительно концов дуги (рис.3). Разобьем нить на элементарные участки и выделим элемент длиной dl с зарядом $dq = \tau dl$. Этот заряд можно рассматривать как точечный.

Определим напряженность электрического поля в точке 0. Для этой точки напряженность поля, создаваемого зарядом dq, равна

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau dl}{\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, направленный от элемента dl в точку 0.

Разобьем вектор $d\vec{E}$ на составляющие $d\vec{E}_X$ и $d\vec{E}_Y$. Из симметрии задачи следует, что сумма составляющих $d\vec{E}_X$ от всех элементарных участков нити равна нулю и результирующий вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси OY. Поэтому напряженность поля определится как

$$E = E_Y = \int_l dE_Y, \qquad (1)$$

где $dE_Y = dE \sin\alpha$.

Так как $r = R$ и $dl = R \cdot d\alpha$, то

$$dE_y = \frac{\tau R \cdot d\alpha}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\sin\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\sin\alpha\, d\alpha. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в (1), получим

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\tau\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \qquad (3)$$

Найдем потенциал электрического поля в точке 0. В этой точке потенциал поля, созданного точечным зарядом dq, равен

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \qquad (4)$$

Потенциал результирующего поля получим интегрированием выражения (4)

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}\int_0^l dl = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

Так как $l = 2\pi R / 3$, то

$$\varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon\varepsilon_0} \quad . \qquad (5)$$

Выразим все величины в единицах СИ: $\tau = 2\cdot10^{-8}$ Кл/м, $R = 6\cdot10^{-2}$ м, $1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot10^9$ м/Ф, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

Произведя вычисления по формулам (3) и (5), получим:

$$E = 9\cdot10^9\,\frac{2\cdot10^{-8}\cdot\sqrt{3}}{1\cdot6\cdot10^{-2}} = 5{,}2\cdot10^3 \text{ В/м},$$

$$\varphi = \frac{2\cdot10^{-8}}{6\cdot1\cdot8.85\cdot10^{-12}} = 3{,}77\cdot10^2 \text{ В}.$$

Пример 4. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом 1 см, равномерно заряженным с линейной плотностью заряда 20 нКл/м. Определить работу сил поля по перемещению точечного заряда 25 нКл из точки, находящейся на расстоянии 1 см, в точку, находящуюся на расстоянии 3 см от поверхности цилиндра в средней его части.

Дано:
цилиндр
$R = 1$ см $= 1\cdot10^{-2}$ м
$\tau = 20$ нКл/м $= 2\cdot10^{-8}$ Кл/м
$q = 25$ нКл $= 2{,}5\cdot10^{-8}$ Кл
$a_1 = 1$ см $= 1\cdot10^{-2}$ м
$a_2 = 3$ см $= 3\cdot10^{-2}$ м

A - ?

Решение. Работа сил поля по перемещению заряда равна
$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Для нахождения разности потенциалов воспользуемся соотношением $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$. Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, можно записать

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \qquad \text{или} \qquad d\varphi = -E\,dr \, .$$

Интегрируя это выражение, найдем разность потенциалов между двумя точками, отстоящими на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr \, , \qquad (1)$$

где $r_1 = a_1 + R$, $r_2 = a_2 + R$.

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то можно воспользоваться формулой напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром,

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon r} \quad . \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon}\ \ln\frac{r_2}{r_1}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ \ln\frac{r_2}{r_1} \quad . \qquad (3)$$

Таким образом,

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ \ln\frac{R + a_2}{R + a_1} \ .$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу работы. Для этого в правую часть вместо символов величин подставим их единицы

$$\frac{[q][t]}{[e_0]} = \frac{1Кл \cdot 1Кл/м}{1Ф/м} = \frac{1Кл \cdot 1Кл}{1Ф} = \frac{1Кл \cdot 1Кл}{1Кл/В} = 1Кл \cdot 1В = 1Дж \text{.}$$

Выразим все величины в единицах СИ: $\varepsilon = 1$; $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м; $q=2{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл; $1/2\pi\varepsilon_0 = 2 \cdot 9 \cdot 10^{9}$ м/Ф. Учитывая, что величины r_2 и r_1 входят в формулу (3) в виде отношения, их можно выразить в сантиметрах.

Произведя вычисления, получим

$$A = 2{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 10^{9} \cdot 2 \cdot 10^{-8} \ln\frac{1+3}{1+1} = 6{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Пример 5. Электрическое поле создано тонкой бесконечно длинной нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда 30 нКл/м. На расстоянии 20 см от нити находится плоская круглая площадка радиусом 1 см. Определить поток вектора напряженности через площадку, если её плоскость составляет угол 30^o с линией напряженности, проходящей через середину площадки.

Дано:
нить
τ = 30 нКл/м
a = 20 см
R = 1 см
$\beta = 30^o$

ΔN_E - ?

Решение. Поле, создаваемое нитью (очень тонким цилиндром), является неоднородным, так как оно изменяется в пространстве,

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon r} \quad . \qquad (1)$$

Поэтому поток вектора $\vec{E}$ равен

$$N_E = \int_S E_n dS = \int_S E \cos\alpha\, dS,$$

где α - угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$ (рис.4). Так как линейные размеры площадки малы по сравнению с расстоянием до нити (a>>R), то E в пределах площадки меняется незначительно. Поэтому значения E и $\cos\alpha$ под знаком интеграла можно заменить их средними значениями $\langle E \rangle$ и $\langle \cos\alpha \rangle$ и вынести за знак интеграла

$$N_E = \langle E\rangle \langle\cos\alpha\rangle \int_S dS = \langle E\rangle \langle\cos\alpha\rangle S,$$

где $S = \square a^2$.

Заменяя $\langle E\rangle$ и $\langle\cos\square\rangle$ их приближенными значениями E_A и $\cos\square_A$, вычисленными для средней точки площадки, получим

$$N_E = E_A S \cos\square_A = E_A \square a^2 \cos\square_A \ . \qquad (2)$$

Из рис.4 следует, что $\cos\square_A = \cos(\square\square\square\square) = \sin\square$. С учетом этого формула (2) примет вид

$$N_E = E_A \pi a^2 \sin\square = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{\varepsilon R}\pi a^2 \sin\square$$

Выразим все величины в единицах СИ: $\tau = 3\cdot 10^{-8}$ Кл/м; $\varepsilon = 1$; R = 0,2 м; a = 10^{-2} м; $1/2\pi\varepsilon_o = 2\cdot 9\cdot 10^9$ м/Ф.

Произведя вычисления, получим

$$N_E = 2\cdot 9\cdot 10^9 \frac{3\cdot 10^{-8}}{1\cdot 0{,}2} 0{,}5\cdot 3{,}14\cdot (10^{-2})^2 = 0{,}42 \text{ В}\cdot\text{м}.$$

Пример 6. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом 100 В электрон имел скорость 4 Мм/с. Определить потенциал точки поля, дойдя до которой, электрон потеряет половину своей скорости.

Дано:

$\varphi_1 = 100$ В

v_1 = 4 Мм/с = $4 \cdot 10^6$ м/с
v_2 = 2 Мм/с = $2 \cdot 10^6$ м/с

φ_2 - ?

Решение. Из-за отсутствия сил трения полная механическая энергия электрона не изменяется, то есть $W = mv^2/2 + (-e\varphi) = const$, где $mv^2/2$ - кинетическая и $(-e\varphi)$ - потенциальная энергия электрона. Полная энергия в начале движения

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \left(-e\varphi_1\right), \qquad (1)$$

в конце движения с учетом того, что $v_2 = v_1/2$,

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + \left(-e\varphi_2\right) = \frac{mv_1^2}{8} + \left(-e\varphi_2\right) . \qquad (2)$$

Приравнивая выражения (1) и (2), получим для потенциала

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{3mv_1^2}{8e}$$

Выразим все величины в единицах СИ: $v_1 = 4 \cdot 10^6$ м/с; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Произведя вычисления, получим

$$\varphi_2 = 100 - \frac{3 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(4 \cdot 10^6\right)^2}{8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 66 \text{ В} .$$

Возможен и другой подход к решению. Изменение кинетической энергии частицы равно работе результирующей силы, т.е.

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A .$$

Так как электрон тормозится силами поля, то $A = -e(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Пример7. Сила взаимного притяжения пластин плоского воздушного конденсатора 50 мН. Площадь каждой пластины 200 см^2. Определить объемную плотность энергии поля конденсатора.

Дано:
F = 50 мН = $5 \cdot 10^{-2}$ Н
S = 200 см^2 = $2 \cdot 10^{-2}$ м^2

W - ?

Решение. Объемная плотность энергии поля конденсатора

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} , \qquad (1)$$

где $E = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0$ - напряженность электрического поля между пластинами конденсатора; σ - поверхностная плотность заряда на пластинах. Подставив выражение для E в (1), получим

$$w = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} . \qquad (2)$$

Найдем силу взаимного притяжения пластин. Заряд $q = \sigma S$ одной пластины находится в поле напряженностью $E_1 = \sigma / 2\varepsilon\varepsilon_0$, созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на заряд первой пластины действует сила

$$F = qE_1 = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon\varepsilon_0} . \qquad (3)$$

Выразив σ^2 из выражения (3) и подставив в (2), получим

$$w = F / S.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу объемной плотности энергии. Для этого в правую часть формулы вместо величин подставим их единицы измерений:

$$\frac{[F]}{[S]} = \frac{1Н}{1м^2} = \frac{1Н \cdot 1м}{1м^2 \cdot 1м} = 1 \text{ Дж/м}^3 .$$

Выразим все величины в единицах СИ: $F = 5 \cdot 10^2$ Н, $S = 2 \cdot 10^{-2}$ м^2.

Произведя вычисления, получим

$$w = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2{,}5 \text{ Дж/м}^3.$$

Пример 8. Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 600 В, находятся два слоя диэлектриков: стекла толщиной 5 мм и эбонита толщиной 3 мм. Площадь каждой пластины 200 см^2. Определить: а) напряженность поля, индукцию и падение потенциала в каждом слое; б) электрическую емкость конденсатора.

Дано:
U = 600 В
стекло,
$d_1 = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м
эбонит
$d_2 = 3$ мм $= 3 \cdot 10^{-3}$ м
$S = 200$ см$^2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м^2

___

E - ? D - ?
U_1 - ? U_2 - ?
C - ?

Решение. При переходе через границу раздела диэлектриков нормальная составляющая вектора $\vec{D}$ в обоих слоях диэлектриков имеет одинаковые значения $D_{1n} = D_{2n}$.

В конденсаторе силовые линии вектора $\vec{D}$ перпендикулярны к границе раздела диэлектриков, следовательно, $D_{1n} = D_1$ и $D_{2n} = D_2$. Поэтому

$$D_1 = D_2 = D. \qquad (1)$$

Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, и сокращая на ε_0, из равенства (1) получим

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \qquad (2)$$

где E_1 и E_2 - напряженности поля в первом и во втором слоях диэлектриков; ε_1 и ε_2 - диэлектрические проницаемости слоев.

Разность потенциалов между пластинами конденсатора очевидно равна сумме напряжений на слоях диэлектриков

$$U = U_1 + U_2. \qquad (3)$$

В пределах каждого слоя поле однородно, поэтому $U_1 = E_1 d_1$ и $U_2 = E_2 d_2$. С учетом этого равенство (3) примет вид

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (2) и (4), получим

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}, \qquad E_2 = \frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}.$$

Выразим все величины в единицах СИ: $d_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $d_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $\varepsilon_1 = 7$; $\varepsilon_2 = 3$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Произведя вычисления, получим

$$E_1 = \frac{3 \cdot 600}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$E_2 = \frac{7 \cdot 600}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 11{,}7 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$U_1 = E_1 d_1 = 5 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 250 \text{ В};$$

$$U_2 = E_2 d_2 = 11{,}7 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 350 \text{ В};$$

$$D = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 5 \cdot 10^1 = 3{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Определим емкость конденсатора

$$C = q / U, \qquad (5)$$

где $q = \sigma S$ - заряд каждой пластины конденсатора. Учитывая, что поверхностная плотность зарядов σ на пластинах конденсатора численно равна модулю электрического смещения, т.е. $\sigma = D$, получим

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{U} = \frac{DS}{U}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу электроемкости. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы измерений

$$\frac{[D][S]}{[U]} = \frac{1 Кл/м^2 \cdot 1 м^2}{1 В} = 1 Ф \; .$$

Произведя вычисления, получим

$$C = \frac{3{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{600} = 103 \cdot 10^{-12} Ф = 103 \text{ пФ}.$$

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Основные законы и формулы

Закон Ома для участка цепи (не содержащего ЭДС)

$$I = \frac{U}{R} \; ,$$

где I - сила тока, U - напряжение на концах участка цепи, R - сопротивление участка цепи.

Закон Ома для замкнутой (полной) цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_0} \; ,$$

где ε - ЭДС источника тока, R - сопротивление внешней цепи, R_0 - внутреннее сопротивление источника тока.

Сопротивление цилиндрического проводника постоянного диаметра

$$R = \rho \frac{l}{S} \; ,$$

где ρ - удельное сопротивление проводника, l - длина проводника, S - площадь поперечного сечения проводника.

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \; ,$$

где j - плотность тока в проводнике, $j =$ I/S, $\vec{E}$ - напряженность ЭП в проводнике.

Закон Джоуля-Ленца

$$P = IU = I^2R,$$

где P - тепловая мощность, развиваемая (выделяющаяся) в проводнике сопротивлением R, когда по проводнику течет ток силой I.

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$P = \frac{1}{\rho} E^2 \; ,$$

где P - тепловая мощность, развиваемая (выделяющаяся) в единице объема проводника.

Правила (законы) Кирхгофа для произвольного замкнутого контура разветвленной цепи:

а) $\sum_{к=1}^{N} I_к = 0$ (первое правило);

б) $\sum_{к=1}^{N} I_к R_к = \sum_{i=1}^{L} \varepsilon_i$ (второе правило),

где $\sum_{к=1}^{N} I_к$ - алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в каждом узле;

$\sum_{к=1}^{N} I_к R_к$ - алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления участков контура,

$\sum_{i=1}^{L} \varepsilon_i$ - алгебраическая сумма ЭДС, встречающихся при обходе контура.

Для расчета разветвленных цепей необходимо учитывать следующее.

- Перед составлением уравнений необходимо произвольно выбрать: а) направления токов на всех участках цепи и указать их стрелками на чертеже; б) направление обхода контуров.

- При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа надо считать токи, подходящие к узлу, положительными, отходящие от узла, - отрицательными. Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, должно быть на единицу меньше числа узлов, содержащихся в цепи.

- При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: а) если ток по направлению совпадает с выбранным направлением обхода контура, то соответствующее падение напряжения IR входит в уравнение со знаком плюс. В противном случае произведение IR берется со знаком минус; б) ЭДС входит в уравнение со знаком плюс, если она повышает потенциал в направлении обхода конутра, т.е. двигаясь по контуру, сначала встречаем отрицательный полюс источника тока, затем положительный, в противном случае - ЭДС берется со знаком минус.

- Чтобы все уравнения, составленные на основании второго закона Кирхгофа, были независимыми, необходимо каждый раз рассматривать контуры, содержащие хотя бы одну новую ветвь, не входящую в уже использованные контуры.

- Общее число независимых уравнений, составленных по первому закону и второму закону Кирхгофа, должно быть равно числу токов, текущих в контуре.

- Для упрощения выкладок, связанных с решением системы уравнений, необходимо предварительно подставить числовые значения всех известных величин.

Если при решении уравнений получены отрицательные значения силы тока или сопротивления, то это означает, что, в действительности, ток через данное сопротивление течет в направлении, противоположном произвольно выбранному.

Примеры решения задач

Пример 1. Сопротивление величиной 5 Ом, вольтметр и источник тока соединены параллельно. Вольтметр показывает напряжение 10 В. Если увеличить сопротивление до 12 Ом, то вольтметр покажет напряжение 12 В. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока. Током через вольтметр пренебречь.

Дано:
R_1 = 5 Ом
U_1 = 10 В
R_2 = 12 Ом
U_2 = 12 В

□ - ? R_0 - ?

Решение. Прежде всего необходимо изобразить электрическую схему .

Поскольку током через вольтметр можно пренебречь, то ток через резистор такой же, как и через источник.

Обозначим этот ток через I. Он определяется по закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_0} ,$$

где R_0 - внутреннее сопротивление источника, а R - сопротивление нагрузки. Вольтметр измеряет падение напряжения на нагрузке. При нагрузке R_1 = 5 Ом ток равен I_1, при нагрузке R_2 ток равен I_2:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_0} , \qquad (1)$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R_0} \quad . \qquad (2)$$

При этом падения напряжения соответственно равны U_1 и U_2:

$$U_1 = I_1 R_1 \ , \qquad (3)$$

$$U_2 = I_2 R_2 \ . \qquad (4)$$

Найдем отношение левых и правых частей уравнений (1) и (2)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + R_0}{R_1 + R_0} \quad . \qquad (5)$$

Освобождаясь от знаменателей, получаем из уравнения (5)

$$I_1R_1 + I_1R_0 = I_2R_2 + I_2R_0 \, .$$

Объединяя слагаемые с R_0, находим

$$R_0 = \frac{I_2R_2 - I_1R_1}{I_1 - I_2} \, .$$

Или, учитывая формулы (3) и (4), получаем

$$R_0 = (U_2 - U_1)\left(\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_2}\right)^{-1} \, .$$

Подставляя в эту формулу данные из условия, получим

$$R_0 = (12 - 10)\left(\frac{10}{5} - \frac{12}{12}\right)^{-1} = 2 \text{ Ом.}$$

Значение ЭДС можно найти из соотношения (1) либо (2). Получаем из (1)

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + R_0) = \frac{U_1}{R_1}(R_1 + R_0) = \frac{10}{5}(5 + 2) = 14 \text{ В} \, .$$

Пример 2. Электрическая цепь состоит из трех источников тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 6$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В, $\mathcal{E}_3 = 4$ В и реостатов с сопротивлениями $R_1 = 2$ Ом и $R_2 = R_3 = 4$ Ом (рис.6). Найти силу тока в реостате R_2 и напряжение на его концах.

Дано:

$\mathcal{E}_1 = 6$ В

$\mathcal{E}_2 = 2$ В

$\mathcal{E}_3 = 4$ В

$R_1 = 2$ Ом

$R_2 = R_3 = 4$ Ом

I_2 - ? U_2 - ?

Решение. Выберем направления токов, и условимся обходить контур ABCD по часовой, а контур CDFG против часовой стрелки.

По первому закону Кирхгофа для узла C имеем

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

По второму закону Кирхгофа для контура ABCD имеем

$$I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Соответственно, для контура CDFG -

$$I_2R_2 - I_3R_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 .$$

После подстановки числовых значений получим

$I_1 - I_2 - I_3 = 0;$

$2I_1 + 4I_2 = 8;$

$4I_2 - 4I_3 = 6.$

Эту систему 3х уравнений с тремя неизвестными можно решить, пользуясь методом определителей.

Составим и вычислим определитель Δ системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -32$$ и определитель Δ_{I2} $$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -44.$$

Отсюда получаем силу тока

$I_2 = \Delta_{12} / \Delta = -44 / -32 = 1{,}375$ А.

Напряжение на концах реостата равно

$U_2 = I_2R_2 = 1{,}375 \cdot 4 = 5{,}5$ В.

Пример 3. Сила тока в проводнике сопротивлением 20 Ом равномерно нарастает от 0 до 4 А в течение 2 с. Определить количество теплоты, выделившейся в проводнике за первые полторы секунды.

Дано:

$R = 20$ Ом

$I_1 = 0$ А

$I_2 = 4$ А

$t_1 = 2$ с

$t_2 = 2$ с

$t_3 = 1{,}5$ с

ΔQ - ?

Решение. Согласно закону Джоуля-Ленца, тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении R, равна

$$P = I^2R .$$

Количество тепла dQ, выделяющегося за время dt в данный момент t, равно

$$dQ = Pdt = I^2Rdt . \qquad (1)$$

По условию задачи сила тока равномерно нарастает, т.е. является линейной функцией времени

$$I = at + b . \qquad (2)$$

В начальный момент $t_1 = 0$ ток I_1 равен нулю, поэтому в уравнении (2) имеем $b = 0$. Таким образом,

$$I = at . \qquad (3)$$

Коэффициент "a" найдем из условия, что $I_2 = 4$ А при $t_2 = 2$ с

$$I_2 = at_2 .$$

Откуда получаем

$$a = \frac{I_2}{t_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ А/с.}$$

Подставляя в формулу (1) выражение (3) и интегрируя по времени от 0 до t_3, найдем количество выделившегося тепла

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_3} I^2Rdt = a^2R\int_{t_1}^{t_3} t^2dt = \frac{a^2R}{3}\left(t_3{}^3 - t_1{}^3\right). \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (4) значения входящих в нее параметров, получим

$$\Delta Q = \frac{2^2 \cdot 20}{3}\left(1{,}5^3 - 0\right) = 90 \text{ Дж.}$$

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Диэлектрическая проницаемость

Вещество	**Проницаемость**	**Вещество**	**Проницаемость**
Парафиновая бумага	2,0	Вода	81
Стекло	7,0	Масло трансформато-рное	2,2
Слюда	7,0	Эбонит	3,0

Удельное сопротивление металлов

Металл	**Удельное сопро-тивление (Ом·м)**	**Металл**	**Удельное сопро-тивление(Ом·м)**
Алюминий	$2{,}8\cdot10^{-8}$	Медь	$1{,}7\cdot10^{-8}$
Железо	$9{,}8\cdot10^{-8}$	Серебро	$1{,}6\cdot10^{-8}$
Нихром	$1{,}1\cdot10^{-6}$		

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	**Обозначение**	**Значение**
Заряд электрона	e	$-1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Масса электрона	m_e	$9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Заряд протона	p	$1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Масса протона	m_p	$1{,}67\cdot10^{-27}$ кг
Заряд □-частицы	$q_{□}$	$3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл
Масса □-частицы	$m_{□}$	$6{,}64\cdot10^{-27}$ кг