ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ)

Учебно-методическое пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2008

Утверждено научно-методическим советом факультета ПММ 11 февраля 2008 г., протокол № 5

Составители: Г.А. Виноградова, А.А. Ларин, Н.В. Рогова, П.С. Украинский

Рецензент д. ф.-м. н. И.Я. Новиков

Учебное пособие подготовлено на кафедре дифференциальных уравнений факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Рекомендовано для студентов второго курса факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

Для специальностей: 010501 – Прикладная информатика и механика,
010901 – Механика,
010503 – Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Введение

Курсовая работа предусмотрена программой курса математического анализа. Пособие содержит 25 вариантов заданий для курсовой работы по математическому анализу. Задания предполагают индивидуальную работу студентов для более глубокого освоения раздела «интегральное исчисление функций многих переменных». При решении задач можно использовать литературу, список которой приведен в конце пособия.

Вариант № 1

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$, где $D = \left\{(x,y) : \min\left\{\sqrt{x^2+y^2}+x,\ 3\sqrt{x^2+y^2}-x\right\} \le x^2+y^2 \le 4\right\}$.
2. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где $D = \{(x,y):\ x+y \le 3,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$.
4. Найти объем $x^2+y^2+z^2 \le 2cz$, $x^2+y^2 \ge 2az$ $(a < c \le 2a)$.
5. Найти площадь поверхности $z^2 = 2xy$, если $0 \le x \le a,\quad 0 \le y \le b$.
6. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ интеграл в виде одного из повторных в сферической системе координат, если $D = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 8z-8,\ 3(x^2+y^2) \le z^2\right\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \left\{(x,y,z):\ 0 \le z \le 4-x^2,\quad x^2-y^2 \ge 0,\ x \ge 0\right\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right)^6 = \frac{z}{h}$.
9. Найти массу тела плотностью $\rho = y$, ограниченного поверхностями $2x+z = 2a$, $x+z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$ $(y \ge 0)$.
10. Плотность в каждой точке прямоугольника пропорциональна квадрату расстояния от этой точки до одной из его вершин. Найти момент инерции этого прямоугольника относительно его сторон, проходящих через эту вершину, длины которых соответственно равны a и b.

11. Найти массу части однородного параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \le z \le 1$ плотности ρ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S |x + y| dS$, где S – часть поверхности геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $0 \le v \le 2\pi$, $0 \le u \le 1$.
13. Найти координаты центра масс дуги винтовой линии $L = \{(x, y, z) : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le \pi\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{ds}{x - y}$, где L – отрезок AB, A = (0,–2), B = (4,0).
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (2 - y)dx + xdy$, взятый вдоль ориентированной кривой $L = \{(x, y) : x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi\}$, где кривая проходится по возрастанию параметра.
16. Пользуясь формулой Стокса, вычислить $\int\limits_L (xy + z)dx + (yz + x)dy + y\sqrt{a^2 - x^2}dz$, где L – кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = a^2$, положительно ориентированная на внутренней стороне цилиндра.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dydz + (y^2 + z^2)dzdx + (z^2 + x^2)dxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.
18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F} = \frac{-ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где i, j, k – единичные орты.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $div\,(u\nabla u) = u\Delta u + (\nabla u)^2$.
20. Под действием силы $\vec{g}$, направленной по оси OZ, тело единичной массы скатывается от точки $A = (a, 0, 2\pi b)$ до точки $B = (a, 0, 0)$ по спирали $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b(2\pi - \varphi)$. Найти работу поля.
21. Найти поток векторного поля $F = (x^3 + yz)\vec{i} + (y^3 + xz)\vec{j} + (z^3 + xy)\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \ge 0$.

Вариант № 2

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi)dr$, где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le \max\,(2ax, 2ay)\}$.

2. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{|x-y^2|}dxdy$, где $D=\{(x,y): |y|\le 1, \quad 0\le x\le 2\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x=ar\cos^\alpha\varphi$, $y=br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2y}{c^3}$.
4. Найти объем тела $x^2+y^2+z^2\le a^2$, $x^2+y^2\ge a(a-2z)$.
5. Найти площадь поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, если $x^2+y^2\le 2ax$.
6. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ интеграл в виде одного из повторных в сферической системе координат, если $D=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 2yR,$ $x^2+y^2\ge z^2\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D=\{(x,y,z):\ 0\le z\le 4-x, \quad y^2\le 2x+2\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^4=z^4\Big/\left[k^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right]$.
9. Найти массу тела плотностью $\rho=z^2$, ограниченного поверхностями $2x^2+2y^2-4ax-4ay+az=a^2$, $2x^2+2y^2-4ax-4ay+az=0$, $z=0$ $M(a,a,a)\in V$.
10. Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки плотности ρ, занимающей область, ограниченную линиями $x^2+y^2=9$, $x+y=0$, $x-y=0$ $(x\ge 0)$.
11. Найти массу части цилиндра $x^2+z^2=2az$, лежащей внутри конуса $x^2+y^2=z^2$, если плотность $\rho=|y|$.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S |xy|dS$, где S – поверхность тела, образованного пересечением цилиндров $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.
13. Найти координаты центра масс дуги $L=\{(x,y,z): x=a(t-\sin t),$ $y=a(1-\cos t),\ z=4a\sin\frac{t}{2}, \quad 0\le t\le 2\pi\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L yds$, $L=\{(x,y): y=\sin x, \ 0\le x\le\pi\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L \frac{ydx+xdy}{1+x^2y^2}$, где L – отрезок АВ, А = (0,0) и $B=(1,1)$.

16. Пользуясь формулой Стокса, вычислить $\int\limits_L xyzdx + y^2 zdy + zx^2 dz$, где L – кривая $x^2+z^2 = a^2$, $z^2+y^2 = a^2$, $x \ge 0$, положительно ориентированная на внешней стороне первого цилиндра.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xz^2 dydz + yx^2 dzdx + zy^2 dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 2az$, $x \ge y$, $x^2 + y^2 \ge 3z^2$.
18. Найти $div\,\overrightarrow{F}$, если $\vec{F} = \vec{r}$, где $\vec{r} = (x, y, z)$.
19. Пусть u, v – скалярные поля. Доказать, что $div(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$.
20. Найти работу поля $\vec{F}$, где $\vec{F}$ – упругая, направленная к началу координат и пропорциональная удалению точки от начала координат, вдоль кратчайшей дуги эллипса $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$ от точки $A = (a, 0)$ до точки $B = (0, b)$.
21. Найти поток векторного поля $F = (xy + x^2)\vec{i} + (2y - 2xy)\vec{j} + (z - yz)\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S: $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le H$.

Вариант № 3

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi)dr$, где $D = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le \dfrac{a^2 y^2}{x^2} \le 3a^2,\ \ x \ge 0,\ \ \ y \ge 0\right\}$.
2. Вычислить $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4)dxdy$, где $D = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 9\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\dfrac{x^4}{h^4} + \dfrac{y^4}{k^4} = \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^3$.
4. Найти объем тела $a^2 \le y^2 + x^2 \le b^2$, $x^2 - y^2 - z^2 \ge 0$, $x \ge 0$.
5. Найти площадь поверхности $2z = x^2$, если $x \le 2y \le 4x$, $x \le 2\sqrt{2}$.
6. Записать $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ интеграл в виде одного из повторных в сферической системе координат, если $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 2yR,$ $x^2 + y^2 \le z^2\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \{(x, y, z):\ x + y + z \le 2,\ \ 0 \le 4z \le 4 - x^2 - y^2,\ \ y \ge 0,\ \ x \ge 0\}$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^4=\sin\left(\pi z\Big/\left[c\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\right]\right)$.
9. Найти массу куба со стороной a, если плотность его в каждой точке равна квадрату расстояния этой точки до фиксированной вершины куба.
10. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму кругового сектора с углом α и радиусом R.
11. Найти массу части конуса $x^2=y^2+z^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2=2ax$, если плотность $\rho=x$.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x-y)dS$, где S – часть цилиндра $x^2+y^2=a^2$, $x\ge 0$, лежащая внутри цилиндра $z^2=a(a-x)$.
13. Найти координаты силы притяжения однородной полуокружности массой M и радиусом R массы m, помещенной в центре соответствующей окружности.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^2+y^2)ds$, где L – отрезок АВ, А = (0,1), В = (–2,3).
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (-x^2ydx+xy^2dy)$, где $L=\{(x,y):\ x^2+y^2=r^2\}$ – окружность, которая обходится в положительном направлении.
16. Пользуясь формулой Стокса вычислить $\int\limits_L z^2xdx+(y+z+x)dy+y^2zdz$, где L – кривая $x^2+y^2=ax$, $x^2=y^2+z^2$, положительно ориентированная на внешней стороне цилиндра.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S yz^2dydz+zy^2dzdx+yx^2dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $0\le z\le x^2+y^2$.
18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=|\vec{r}|$.
19. Пусть u,v – скалярные поля. Доказать, что $grad\ (u+v)=grad\ u+grad\ v$.
20. Найти работу поля $\vec{F}$, где $\vec{F}$ – сила, имеющая постоянную величину и направленную вдоль оси OY вдоль кратчайшей дуги эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ от точки $A=(a,0)$ до точки $B=(0,b)$.
21. Найти поток векторного поля $F=(x-y+z)\vec{i}+(y-z+x)\vec{j}+(z-x+y)\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S: $|x|+|y|+|z|=1$.

Вариант № 4

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$, где $D = \left\{(x,y):\ a^2 \le x^2 + y^2 \le a(y + \sqrt{x^2 + y^2})\right\}$.
2. Вычислить $\iint\limits_D ([x]+[y])dxdy$, где D – квадрат с вершинами $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y = br\sin^{\alpha}\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\frac{x^4 y}{c^5} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3$.
4. Найти объем тела $az + x^2 \le a^2$, $0 \le az \le 4a^2 - x^2 - y^2$.
5. Найти площадь поверхности $cz = xy$, если $\left(x^2 + y^2\right)^2 \le 2c^2 xy$, $z \ge 0$.
6. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ интеграл в виде одного из повторных в сферической системе координат, если $D = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \ge R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2zR\right\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \left\{(x,y,z):\ |x+y| \le 2,\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\right\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = \frac{z}{k}$.
9. Найти массу шара радиусом R, если плотность его в каждой точке равна удвоенному расстоянию этой точки до поверхности шара.
10. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, занимающей область, ограниченную линиями: $y = x$, $y = -x$, $x = 1$, если плотность пластинки в каждой ее точке численно равна расстоянию от этой точки до начала координат.
11. Найти массу части конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le 4$, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния до вершины.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x}dS$, где S – часть цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, лежащая вне гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$.
13. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (xy + yz + zx)dS$, где $S = \left\{(x,y,z):\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 < 2ax\right\}$.

14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L xyds$, где L – контур квадрата, ограниченного линиями $x \pm y = 1,\ x \pm y = -1$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_L ydx - (y + x^2)dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$ от точки $A=$ (2,1) до точки $B=$ (0,0).
16. Пользуясь формулой Стокса, вычислить $\int_L z^2dx + x^2dy + y^2dz$, где L – кривая $x^2+y^2 = 2ax$, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)/3}$, положительно ориентированная на внешней стороне конуса.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S (x + y^2)dydz + (y + z^2)dzdx + (z + x^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le H$.
18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F} = \frac{f(xyz)}{yz}i + \frac{f(xyz)}{xz}j - 2\frac{f(xyz)}{xy}k$, где i, j, k – единичные орты, а $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция.
19. Доказать, что $div\,(\vec{F} + \vec{\Phi}) = div\,\vec{F} + div\,\vec{\Phi}$.
20. Найти работу поля $\vec{F} = (2xy, x^2)$ вдоль кратчайшей дуги эллипса $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$ от точки $A = (a,0)$ до точки $B = (0,b)$.
21. Найти поток векторного поля $F = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S: $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le H$.

Вариант № 5

1. В двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$, где $D = \{(x,y):\ |x-1| + |y| \le 1\}$, перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.
2. Вычислить $\iint_D xydxdy$, где область D ограничена осями координат и кривой $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\quad 0 \le t \le \pi/2$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\frac{x^2}{c^2} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3$.
4. Найти объем тела $x^2 \le az \le 4a^2 - x^2 - y^2$.
5. Найти площадь поверхности $\left(x^2 + y^2\right)^3 = c^2z^4$, если $x^2 + y^2 \le \frac{c^2}{16}$.

6. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ интеграл в виде одного из повторных в сферической системе координат, если $D = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, \quad x^2+y^2+z^2 \le 2zR\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, если $D=\{(x,y,z):\ x^2 \ge y^2+z^2, \quad 5x \le 4+z^2+y^2\}$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую).
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{xyz}{h^3}$
9. Найти массу сферического слоя между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность его в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат и на внешней сфере равна ρ_0.
10. Найти массу круглой пластинки радиусом R, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки до центра пластины и равна ρ_0 на краю пластины.
11. Найти статический момент части цилиндра $x^2 + y^2 = 2Ry$, лежащей между плоскостями $z=0$ и $z=c$, относительно плоскости XZ, если плотность $\rho = y+z$.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x-y^2+z^2)dS$, где S – часть цилиндра $x^2+y^2=a^2$, $x \ge 0$, лежащая между плоскостями $x+z=0$ и $x-z=0$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y,z):$ $x^2+y^2+z^2=a^2, \quad |y|=x, \quad z \ge 0\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L xyds$, где L – четверть окружности $x^2+y^2=1$, лежащая в первом квадранте.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L ydx-(y+x^2)dy$, где L – контур, составленный линиями $y=0, y=x, y=\sqrt{1-x^2}$ с положительным направлением обхода.
16. Пользуясь формулой Стокса, вычислить $\int\limits_L (z^2-x^2-y)dx+(y+z+x)dy+(y+2x+z^3)dz$, где L – кривая $x^2=y^2+z^2$, $x \ge 0$, $x^2+y^2+z^2=2az$, положительно ориентированная на внешней стороне правой $x \ge 0$ полусферы.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+zdxdy$, где S – часть внутренней стороны гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1, \quad 0 \le z \le 3$.

18. Найти $div\,\overrightarrow{F}$, если $\vec{F} = xf\left(\frac{xy}{z}\right)i - 2yf\left(\frac{xy}{z}\right)j - zf\left(\frac{xy}{z}\right)k$, где i, j, k – единичные орты, а $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $div(u\vec{c}) = \vec{c}\ grad\ u$, $\vec{c}$ – постоянный вектор.
20. Найти работу поля $\vec{F} = (xy, x+y)$ вдоль кратчайшей дуги эллипса $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$ от точки $A = (a,0)$ до точки $B = (0,b)$.
21. Найти поток векторного поля $F = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $3z \le x^2 + y^2$.

Вариант № 6

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $D = \{(x,y):\ (x^2+y^2)^2 \le a^2xy\}$, перейти к полярным координатам r и φ, и, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.
2. Вычислить $\iint\limits_D x^2 dxdy$, где $D = \{(x,y):\quad |x| + |y| \le 1\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $x^2 + y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3$.
4. Найти объем тела $0 \le z \le 1 - y^2$, $0 \le x \le 2 - z$.
5. Найти площадь поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, если $(x^2+y^2)^3 \le a^2(x^2 - y^2)$, $x \ge 0$.
6. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ интеграл в виде одного из повторных в сферической системе координат, если $D = \{(x,y,z): Rz \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4Rz,$ $x^2 + y^2 \le z^2/3\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \{(x,y,z):\ (x^2+y^2)^2 \le a^2(x^2-y^2),\ 0 \le az \le 4(x^2+y^2),\quad x \ge 0\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $((x^2+y^2)^2+z^4)^2 = a^3z(x^2+y^2)^2$.
9. Найти массу конуса $R^2(z-H)^2 \ge (x^2+y^2)H^2$, $0 \le z \le H$, если плотность $\rho = |xy|$.
10. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны соответственно 1 и 3. Зная, что плотность материала пропорциональна расстоянию от центра окружно-

стей, найти массу кольца, если плотность на внутренней окружности равна единице.

11. Найти момент инерции однородной поверхности $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 \ge y^2 + z^2$ плотности ρ относительно оси OZ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S xzdS$, где S – часть цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, лежащая между конусом $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ и параболоидом $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2a}$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L = \{(r,\varphi): \quad r = a(1+\cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L y^2 ds$, $L = \{(x,y):$ $: y = \max(2\sqrt{x}, 2x \quad 0 \le x \le 2)\}.$
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (x+y)dx - xydy$, где L – дуга кривой $x^{1/4} + y^{1/4} = a^{1/4}$ от точки $A = (0,a)$ до точки $B = (a,0)$.
16. Пользуясь формулой Стокса вычислить $\int\limits_L (z^2+y^2)dx + (z^2+x^2)dy + (y^2+x^2)dz$, где L – кривая $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2+z^2 = 4z$, положительно ориентированная на внешней стороне верхней полусферы ($z \ge 2$).
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\int\int\limits_S (xz^2 + y^2)dydz + (yx^2 + z^2)dzdx + (zy^2 + x^2)dxdy,$ где S – часть внешней стороны конуса $1 - z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \ge 0$.
18. Найти $rot\,\vec{F}$, если $\vec{F} = (x+z)i + (y+z)j + (x^2+z)k$, i, j, k – единичные орты.
19. Пусть u, v – скалярные поля. Доказать, что $grad(uv) = ugrad\ v + vgrad\ u$.
20. Найти работу поля $\vec{F} = (y,a)$ вдоль кратчайшей дуги эллипса $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$ от точки $A = (a,0)$ до точки $B = (0,b)$.
21. Найти поток векторного поля $F = -x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z^3\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S куба $0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

Вариант № 7

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $D=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\le 1,\quad y+x\ge 0\}$, перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}g(r,\varphi)dr$.
2. Вычислить $\iint\limits_D x^3y^5dxdy$, где $D=\{(x,y):\ |x|+|y|\le 1\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x=ar\cos^\alpha\varphi$, $y=br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\frac{xy}{c^2}=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3$.
4. Найти объем тела $(x-a)^2+y^2\le az\le 2a^2-2ax$.
5. Найти площадь поверхности $x^2+y^2=2az$, если $x^2+y^2\le a^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $y\le x$.
6. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ интеграл в виде одного из повторных в сферической системе координат, если $D=\left\{(x,y,z):\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\le 1,\right.$ $\left.x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D=\{(x,y,z):\ x+4y+z\le 1,\quad 0\le z\le 4xy\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $((x^2+y^2)^3+z^6)^2=a^6z(x^2+y^2)^3$.
9. Найти массу прямого кругового цилиндра, высота которого равна H, а радиус основания R, если плотность в любой точке равна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.
10. Найти массу пластинки, имеющей форму кольца, радиусы внутренней и внешней окружностей кольца равны соответственно r и R, если плотность пластинки в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра кольца.
11. Найти момент инерции однородной поверхности плотности ρ, полученной при вращении одной арки циклоиды $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ вокруг оси OX, относительно оси OX.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S(x+y+z)dS$, где S – часть конуса $x^2=y^2+z^2$, $z\ge 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=2ax$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y,z):$ $:x=e^t\cos t,\ \ y=e^t\sin t,\ \ z=e^t,\ -\infty<t\le 0\}$.

14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L x^2 yds$,

$L = \{(x,y): x = 4\cos t, y = \sin 2t \quad x \ge 0, y \ge 0\}$.

15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_L xy^2dx - x^2ydy$, где $L = \{(x,y):\ 2(x+y) = (x-y)^2\}$ от точки $A = (0,2)$ до точки $B = (2,0)$.

16. Пользуясь формулой Стокса, вычислить $\int_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$, где L – контур сечения куба, построенного на положительных единичных векторах осей координат, плоскостью, проходящей через точки P = (1,0,0), Q = (0,1,0), R = (1,0,1), положительно ориентированный на правой стороне плоскости.

17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\int\int_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

где S – верхняя сторона части параболоида $x^2 + y^2 = 2 - z$, $z \ge 0$.

18. Найти $rot\,\vec{F}$, если $\vec{F} = (x^2 + y^2)i + (y^2 + z^2)j + (x^2 + z^2)k$, i, j, k – единичные орты.

19. Доказать, что $div\,[\vec{F} \times \vec{\Phi}] = \vec{\Phi} rot\,\vec{F} - \vec{F} rot\,\vec{\Phi}$.

20. Найти работу поля $F = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ вдоль кривой $L = AB$ (часть кривой $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$, $y = x$ от точки $A = (1,1,0)$ до точки $B = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$).

21. Найти поток векторного поля $F = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ через поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ в направлении внешней нормали.

Вариант № 8

1. В двойном интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$, где $D = \{(x,y):\ x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ -1 \le x \le 0\}$, перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.

2. Вычислить $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} xydy$.

3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = by$, точка $M(b/2, a/2) \in D$.

4. Найти объем тела $3x + 4y \le 12a$, $0 \le az \le a^2 - y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

5. Найти площадь поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, если $x^2 + y^2 + z^2 \le 2cz$.

6. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ интеграл в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если $D=\{(x,y,z):|z|\le 5-\sqrt{3x^2+3y^2}$, $z^2\le x^2+y^2+1\}$.
7. Выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, если $D=\{(x,y,z):\ x\le y,\ \ 0\le z\le 3-\sqrt{x^2+2y^2}\ \}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{p^2}$.
9. Найти статический момент относительно плоскости XY однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2=z^2tg^2\alpha,\ x^2+y^2=z^2tg^2\beta,\ (0<\alpha<\beta<\pi/2)$.
10. Найти массу квадратной пластины со стороной a, если плотность пластины в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от этой точки до одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.
11. Найти момент инерции части однородного цилиндра $x^2+y^2=ax,$ плотности ρ, лежащей внутри сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ относительно плоскости XZ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (xy+yz+xz)dS$, где S – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=2ax$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y,z):$ $:x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ z=bt,\ \ 0\le t\le 2\pi\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L yds$, где L – дуга параболы $y^2=2x$ от точки $A(2,-2)$ до точки $B(8,4)$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L xydx-x^2dy$, где $L=\{(x,y):x^4-2x^2y^2+y^3=0\}$ от точки A = $(-1/4,-1/8)$ до точки $B=(0,0)$.
16. Пользуясь формулой Стокса, вычислить $\int\limits_L 2xydx+z^2dy+x^2dz$, где L – эллипс $2x^2+2y^2=z^2$, $x+z=a$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S – правая сторона части цилиндра $x+y^2=1$, $0\le z\le 2$, $x\ge 0$.
18. Найти $rot\,\overrightarrow{F}$, если $\vec{F}=z^3i+y^3j+x^3k$, i,j,k – единичные орты.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $div\,(u\vec{F})=udiv\,\vec{F}+\vec{F}grad\,u$.

20. Найти работу поля $F = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ вдоль кривой $L = AB$ (наименьшая дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$ от точки $A = (1,0)$ до точки $B = (0,1)$).
21. Найти поток векторного поля $F = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ в направлении внешней нормали через нижнюю полусферу $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \le 0$.

Вариант № 9

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$, где $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + (y-1)^2 \le 1\right\}$.
2. Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{xdy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.
4. Найти объем тела $0 \le z \le 4 - x^2$, $x^2 - y^2 \ge 0$, $x \ge 0$.
5. Найти площадь поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если $x + y \le R$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.
6. Записать интеграл $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если $D = \left\{(x,y,z):\ 4x^2 + 3y^2 + z^2 \le 48,\ 0 \le 2z \le 4x^2 + 3y^2\right\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 \le 16\quad y^2 \le z \le 4\right\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^4)^2 = z^2$.
9. Найти статический момент относительно плоскости XY однородного тела плотностью ρ, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
10. Найти статический момент однородного прямоугольника плотности ρ со сторонами a и b относительно его сторон.
11. Найти момент инерции части однородной верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$ плотности ρ, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, относительно плоскости YZ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S xyzdS$, где S – часть конуса $2xy = z^2$, $z \ge 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L = \{(x, y):$ $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ 0 \le t \le \beta\}$ $(0 < \beta < 2\pi)$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x + y)ds$, $L = \{(x, y) : x = a\cos t, y = a\sin t\ ,\ 0 \le t \le {}^{\pi}\!/_{2}\ \}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L y^3 dy - 2xy^2 dx$, где L – часть кривой $x^3 + 2x^2 + y^2 = 3$ от точки $A = (-1, \sqrt{2})$ до точки $B = (1,0)$.
16. Пользуясь формулой Стокса, вычислить $\int\limits_L (z^2 - y^2)dx + (x^2 - z^2)dy + (y^2 - x^2 + x)dz$, где L – эллипс $x^2 + y^2 = 8x$, $x + y + z = 0$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}dydz + \sqrt{x^2 + y^2}dzdx + \sqrt{z}dxdy$, где S – правая сторона части поверхности тела $x^2 + y^2 \le z^2$, $x^2 + y^2 \le 2 - z$, $z \ge 0$ ($x \ge 0$).
18. Найти $rot\ \overrightarrow{F}$, если $\vec{F} = \frac{y}{z}i + \frac{z}{x}j + \frac{x}{y}k$, i, j, k – единичные орты.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $divgrad\ u = \Delta u$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = (3x - 1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}$ вдоль контура L, где L – контур треугольника, $ABCA$, A, B, C – точки пересечения плоскости $2x - y - 2z + 2 = 0$ соответственно с осями координат OX, OY, OZ.
21. Найти поток векторного поля $F = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S пирамиды $x + y + z \le a$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Вариант № 10

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi)dr$, где $D = \left\{(x, y):\ \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ \ \ y - x \le 0,\ \ \ y - \frac{1}{2}x \ge 0\right\}$.
2. Вычислить $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dy}{1 + y^2}$.

3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y = br\sin^{\alpha}\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^4+y^4)$.
4. Найти объем тела $0 \le z \le x^2 - y^2$, $2x + y \le 1$.
5. Найти площадь поверхности $x^2+y^2+z^2 = R^2$, если $x^2+y^2 \le z^2 tg^2\alpha$, $z \ge 0$.
6. Записать интеграл $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le 2ax,$ $x^2+y^2 \le a^2 - az,\ z \ge 0\}$.
7. Выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, если $D = \{(x,y,z):\ 2x-1 \le y,\quad x \ge 0\quad 0 \le z \le x^2-y^2\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $(x+y+z)^2 = ay$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, ($x>0, z>0$).
9. Найти момент инерции относительно осей координат тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x=0,\ x=a$, $y=0,\ y=b$, $z=0,\ z=c$.
10. Найти статический момент однородной пластины плотности ρ, занимающей область, ограниченную одной аркой циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ и отрезком прямой $y=0$ относительно оси OX.
11. Найти момент инерции относительно плоскости XY части однородного конуса $x^2+y^2 = z^2 tg^2\,\alpha$, $x^2+y^2 \le R^2$ $(0<\alpha<\pi/2)$, массой M.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \sqrt{a^2+y^2+z^2}\,dS$, где S – часть параболоида $ax = yz$, лежащая внутри цилиндра $(y^2+z^2)^2 = 2b^2yz$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L = \{(x,y):$ $: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (4x^2 - y^2)ds$, $L = \{(x,y): x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t\ \}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (y+\pi)dx + x\cos y dy$, где L – часть кривой $\pi\ln x - y + \sin y = 0$ от точки $A = (1,0)$ до точки $B = (e,\pi)$.
16. Пользуясь формулой Стокса вычислить $\int\limits_L (xy+z)dx + (yz+x)dy + (y+xz)dz$, где L – окружность, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xydydz + yzdzdx + xzdxdy$, где S – часть внешней стороны конуса $x + y^2 = z^2$, $0 \le z \le H$.
18. Найти $rot\,\overrightarrow{F}$, если $\vec{F} = \vec{r}$, где $\vec{r} = (x, y, z)$.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $rot\ grad\ u = 0$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = (x+y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$ вдоль контура L, где L – контур треугольника $MNPM$, $M = (0,0,0)$, $N = (0,1,0)$, $P = (0,0,1)$.
21. Найти поток векторного поля $F = y^2\vec{j} + z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через часть параболоида S: $x^2 + y^2 = z$, $z \le 2$.

Вариант № 11

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$, где $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \ge 1,\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1\}$.
2. Вычислить $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$.
3. Вычислить площадь области, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$, переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$).
4. Найти объем тела $x^2 + y^2 \le az \le a\sqrt{x^2 + y^2}$.
5. Найти площадь поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если $\left(x^2 + y^2\right)^2 \le R^2(y^2 - x^2)$.
6. Записать интеграл $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если $D = \left\{(x,y,z):\ (x - R)^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ \ x^2 + (y-R)^2 + z^2 \le R^2\right\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \{(x,y,z):\ a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2,\ \ x^2 - y^2 - z^2 \ge 0,\ \ x \ge 0\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $((x^2 + y^2)^3 + z^6)^2 = a^3 zxy$.
9. Найти момент инерции относительно осей координат тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $z + x = 4$.

10. Найти статический момент однородной пластины плотности ρ, занимающей область, ограниченную линиями $y = x^2$ и $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ относительно оси OX.
11. Найти момент инерции однородной поверхности $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $x = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(b > a)$ плотности ρ относительно оси OX.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dS$, где S – поверхность, полученная вращением кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ относительно полярной оси.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L = \{(x, y):$ $: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ \ y \ge 0\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L 4xyds$,
$L = \left\{(x, y):\ y = \min\left(x^2/a, \sqrt{2a^2 - x^2}\right), x \ge 0\right\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L x^2dy - xydx$, где L – часть кривой $x^4 - y^4 = 6x^2y$ от точки $A = (-4\sqrt{2}, 4)$ до точки $B = (0,0)$.
16. Пользуясь формулой Стокса, вычислить
$\int\limits_L (x^2 + y)dx + (y^2 + z)dy + (x + z^2)dz$, где L – эллипс $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (xy^2 + z^2)dydz + (yz^2 + x^2)dzdx + (zx^2 + y^2)dxdy$, где S – внешняя сторона верхней полусферы $x + y^2 + z^2 = a^2$, ($z \ge 0$).
18. Найти $rot\ \vec{F}$, если $\vec{F} = \vec{c}f(r)$, где $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$, $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\vec{c}$ – постоянный вектор.
19. Доказать, что $rot\ (\vec{F} + \vec{\Phi}) = rot\ \vec{F} + rot\ \vec{\Phi}$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = (x + 3y + 2z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ вдоль контура L, где L – контур треугольника $MNPM$, $M = (2,0,0)$, $N = (0,3,0)$, $P = (0,0,1)$.
21. Найти поток векторного поля $F = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 3R^2$, $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$ в направлении внешней нормали.

Вариант № 12

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где D – область, лежащая вне окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и внутри кривой $r = 2a(1+\cos\varphi)$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.
2. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)dxdy$, где $D = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le a^2\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\frac{x^6}{a^6}+\frac{y^6}{b^6}=\frac{x^4}{h^4}+\frac{y^4}{k^4}$.
4. Найти объем тела $x^2 \le ay \le bx$, $x^2+y^2 \le hz \le 2x^2+2y^2$.
5. Найти площадь поверхности $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$, если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le \frac{z^2}{c^2}$.
6. Записать интеграл $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если $D = \{(x,y,z):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \{(x,y,z):\ 3z^2 \le x^2+y^2,\ x^2+y^2-z^2 \le 2\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2)^3+z^6 = 3a^3z^3$.
9. Найти момент инерции относительно осей координат тела плотностью ρ, ограниченного поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
10. Вычислить момент инерции однородного круга массой M и радиусом R относительно точки на его окружности.
11. Найти массу части однородного параболоида $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0 \le z \le 1$ плотности ρ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$, где $S = \{(x,y,z):\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 < 2ax\}$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L = \{(x,y) : \ : \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\}$.

14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^2+y^2)^n\,ds$,

$L=\{(x,y): x=a\cos t, y=a\sin t\}$.

15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L xdy-ydx$, где L – часть кривой $x(x-y)^2+y=0$ от точки $A=(0,0)$ до точки $B=(2/5,-8/5)$.

16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L x^2ydx-y^2xdy$, где L – верхняя часть $(y\ge 0)$ правой петли $(x\ge 0)$ лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ от точки $A=(0,0)$ до точки $B=(a,0)$.

17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности тела $x+2y+3z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

18. Найти $rot\,\vec{F}$, если $\vec{F}=\vec{r}f(r)$, где $\vec{r}=(x,y,z)$, $r=|\vec{r}|$, $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $rot\,(u\vec{F})=u\,rot\,\vec{F}+[grad\,u\times\vec{F}]$.

20. Найти циркуляцию векторного поля $F=(x+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+x\vec{k}$ вдоль контура L, положительно ориентированного на верхней стороне плоскости $z=5$, где $L=\left\{(x,y,z): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

21. Найти поток векторного поля $F=x\vec{i}-xy\vec{j}+z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S, где S – часть цилиндра $x^2+y^2=R^2$, ограниченная плоскостями $z=0$ и $x+z=R$.

Вариант № 13

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D – область, лежащая вне окружности $x^2+y^2=a^2$ и внутри кривой $r=2a\sin 3\varphi$, перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.

2. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, где $D=\{(x,y): x^2+y^2\le a^2\}$.

3. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2=\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}$, $y=0$, переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x=ar\cos^\alpha\varphi$, $y=br\sin^\alpha\varphi$).

4. Найти объем тела $-x \le y \le x$, $x^2 + y^2 \le az \le 2x^2 + 2y^2$, $z \le h$.
5. Найти площадь поверхности $z^2 = x^2 + a^2$, если $(2x^2 + a^2)y^2 \le x^2 a^2$, $0 \le z \le a$.
6. Записать интеграл $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если $D = \{(x, y, z):\ x^2 + y^2 \le z,$ $0 \le z \le H\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \left\{(x, y, z):\quad 3x^2 - y^2 + 3z^2 \le 0,\quad x^2 + y^2 + z^2 \le 2ay\right\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3(y - x)$.
9. Найти момент инерции относительно осей координат тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - ax = 0$, $z^2 = 2ax$, $z = 0$ ($z > 0$).
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой M, ограниченной кривой $x^2 + y^2 = R^2$, относительно прямой, проходящей через центр круга и лежащей в его плоскости.
11. Найти массу части цилиндра $x^2 + z^2 = 2az$, лежащей внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$, если плотность $\rho = |y|$.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, где S – граница тела $\left\{(x, y, z):\ \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\right\}$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L = \left\{(x, y) : x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),\quad 0 \le t \le 2\pi\right\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L xyds$, $L = \{(x, y):\ y = 1 - \cos t, x = 1 - \sin t\ ,\ 0 \le t \le 2\pi\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L xdy - ydx$, где L – петля кривой $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ с положительным направлением обхода.
16. Пользуясь формулой Грина вычислить $\int\limits_L y^2 xdx + (y^2 - x^2)dy$, где L – положительно ориентированная кривая $r = a(1 + \cos\varphi)$.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $x + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le H$.

18. Найти $rot\,\vec{F}$, если $\vec{F} = [\vec{c} \times f(r)\vec{r}]$, где $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$, $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\vec{c}$ – постоянный вектор.
19. Найти $div\,(grad f(r))$, где $r = |\vec{r}|$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $f(r)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Выяснить, при каких условиях $div\,(grad f(r)) = 0$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = x\vec{j} - y\vec{i}$ вдоль контура $L = \{(x, y):\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$, положительно ориентированного на плоскости.
21. Найти поток векторного поля $F = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S, где S – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсеченная плоскостью $z = 2$, $z \geq 2$.

Вариант № 14

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где D – область, лежащая вне окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и внутри кривой $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi)dr$.
2. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2 + y^2}dxdy$, где $D = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \leq ax\right\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y = br\sin^{\alpha}\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}$.
4. Найти объем тела $x^2 \leq ay \leq b^2$, $0 \leq bz \leq x^2 + y^2$.
5. Найти площадь поверхности $z^2 + y^2 = 2ax$, если $y^2 \leq ax \leq a^2$.
6. Записать интеграл $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если $D = \{(x, y, z):\ x/2 + y/3 + z/4 \leq 1,$ $x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x \geq 0\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \left\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ x^2 - y^2 - z^2 \leq 2ax\right\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3 z$.
9. Найти момент инерции относительно оси $0X$ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $z = 1$.

10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой M, ограниченной кривой $x^2 + y^2 = R^2$, относительно касательной к границе этого круга.
11. Найти массу части конуса $x^2 = y^2 + z^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, если плотность $\rho = x$.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (y+z)dS$, где S – часть поверхности, лежащая в первом октанте $(x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad z \ge 0)$, полученная вращением арки циклоиды $x = a(t - \cos t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, вокруг оси OX.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L = \{(x, y) : x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)\quad 0 \le t \le \pi\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{ds}{x^2 + y^2}$, $L = \{(x, y) :\ y = \cos t + \sin t,\quad x = \sin t - t\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L xydx - x^3y^3dy$, где L – контур квадрата $|x - y| + |x + y| = 1$ с отрицательным направлением обхода.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить $\int\limits_L y^{5/3}dx - x^{5/3})dy$, где L – положительно ориентированная кривая $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S – часть внешней стороны параболоида $x + y^2 = z$, $0 \le z \le H$.
18. Найти $rot\,\vec{F}$, если $\vec{F} = (x+z)i + (y+z)j + (x^2+z)k$, i, j, k – единичные орты.
19. Найти $div(f(r)\vec{c})$, где $r = |\vec{r}|$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $f(r)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\vec{c}$ – постоянный вектор.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль контура $L = \{(x, y, z) :\ 2x^2 - y^2 + z^2 = a^2,\ x = y\}$, положительно ориентированного на правой стороне плоскости.
21. Найти поток векторного поля $F = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S, где
$$S = \{(x,y,z):\ x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2}z^2,\ 0 \le z \le H.$$

Вариант № 15

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D – область, лежащая вне окружности $x^2+y^2=1$ и вне кривой $r=\cos 3\varphi$, перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.
2. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le ay\}$.
3. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$, $y=0$, переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x=ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y=br\sin^{\alpha}\varphi$).
4. Найти объем тела $0\le z\le x$, $x^2+y^2\le 2ax$.
5. Найти площадь поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$, если $x^4\le a^2x^2-b^2y^2$, $a<b$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, если $D=\{(x,y,z):\ \mathrm{x}^2+y^2\le R^2,\ \ 0\le z\le H,\ \ (H\ge R)\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, если $D=\{(x,y,z):\ 4(x^2+y^2)\le z^2,\quad 0\le z\le 1+\sqrt{x^2+y^2}\ \}$, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую).
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2=a^6\sin^2\left(\pi z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$.
9. Найти момент инерции относительно оси OZ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2$, $x+y+z=2$, $z=0$ $(z>0)$.
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой М, ограниченной кривой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, относительно большой и малой осей.
11. Найти массу части конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le 4$, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния до вершины.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{2-y^2-z^2}}$, где S – поверхность, полученная вращением линии $L=\{(x,y):\ \ y=\sin x,\ \ 0\le x\le\pi\}$ вокруг оси OX.

13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y):$ $: y=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\quad 1\le y\le 2\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L xds$, где L – верхняя половина кривой $r=1+\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L xzdx+axdy-x^2dz$, где L – часть кривой $x+y+z=a,\ az=xy$ $x\ge 0,\ y\ge 0$ от точки $A=(0,a,0)$ до точки $B=(a,0,0)$.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L (e^{-x}\cos y-y^2)dx+(e^{-x}\sin y-x^2)dy$. L – правая $(x\ge a)$ полуокружность $x^2+y^2=2ax$ от точки $A=(a,a)$ до точки $B=(a,-a)$.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S – внутренняя сторона эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.
18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F}=\vec{r}$, где $\vec{r}=(x,y,z)$.
19. Найти $div\,(f(r)\vec{r})$ где $r=|\vec{r}|,\ \vec{r}=(x,y,z),\ f(r)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Выяснить, когда $div\,(f(r)\vec{r})=0$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F=x\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ вдоль контура $L=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0\}$, положительно ориентированного на верхней стороне плоскости.
21. Найти поток векторного поля $F=(y-x)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$ в направлении нормали верхней стороны треугольника ABC, где $A=(1,0,0)$, B = (0,1,0), C = (0,0,1).

Вариант № 16

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $D=\{(x,y):\ (x-1)^2+y^2\le 1,\quad x^2+y^2\ge 1\}$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}g(r,\varphi)dr$.
2. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D y^2\sqrt{R^2-x^2}dxdy$, где $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le R^2\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x=ar\cos^\alpha\varphi$, $y=br\sin^\alpha\varphi$), вычис-

лить площадь области, ограниченной кривыми $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^3}{h^3}-\frac{y^3}{k^3}$, $y=0$.

4. Найти объем тела $x^2+y^2\le hz\le h^2$.
5. Найти площадь поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$, если $y^2\ge a(a+x)$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, если $D=\{(x,y,z):\ \mathrm{x}^2+y^2+z^2\le R^2,\quad z\ge R/3\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, если $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le R^2,\quad x^2+z^2\le R^2\}$, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую).
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3ze^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$.
9. Найти момент инерции относительно оси OZ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=cz,\quad z=c$.
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой М, ограниченной кривыми $y=\sin x,\quad 0\le x\le\pi$, $y=0$ относительно прямой $y=1$.
11. Найти статический момент части цилиндра $x^2+y^2=2Ry$, лежащей между плоскостями $z=0$ и $z=c$, относительно плоскости XZ, если плотность $\rho=y+z$.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S yzdS$, где S – часть поверхности, полученная вращением линии $L=\{(x,y):\quad y=\cos x,\quad \pi/2\le x\le\pi/2\}$, удовлетворяющая условию $0<y<z$ вокруг оси OX.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y):$ $:y^2=ax^3-x^4$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L(x+4y)ds$, где L – правая петля кривой $r^2=\cos 2\varphi,\ (\mathrm{x}\ge 0)$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L yzdx+aydz-azdy$, где L – часть кривой $x^2+y^2=z^2,\ \mathrm{y}^2+x^2=ax$ $z\ge 0,\ y\ge 0$ от точки $A=(0,0,0)$ до точки $B=(a,0,a)$.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L(1-y/2)dx+x/2dy$, где L – верхняя часть полуокружности $x^2+y^2=a^2$, $(y\ge 0)$ от точки $A=(a,0)$ до точки $B=(-a,0)$.

17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \le a^2$, $-H \le z \le H$.
18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = |\vec{r}\,|$.
19. Электростатическое поле точечного заряда q равно $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\vec{r}_0}{r^2}$, где $\vec{r}_0 = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|}$. Вычислить $div\,\vec{E}$ в точке $M = (x, y, z)$, ($xyz \ne 0$).
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вдоль положительно ориентированного на верхней стороне плоскости контура $L = \{(x, y, z):\ x^2 + y^2 = 1,\quad x + y + z = 1\}$.
21. Найти поток векторного поля $F = (3x-1)\vec{i} + (y - x + z)\vec{j} + 4z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S, где S – поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $2x - y - 2z + 2 = 0$ и координатными плоскостями.

Вариант № 17

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, где $D = \left\{(x, y):\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\quad 1 \le \mathrm{x} \le 2\right\}$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi)dr$.
2. Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл $\iint\limits_D \dfrac{xdxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, где $D = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le ax\right\}$.
3. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (или обобщенным полярным координатам $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = br\sin^\alpha\varphi$), вычислить площадь области, ограниченной кривой $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^5 = \dfrac{x^3}{h^3} + \dfrac{y^3}{k^3}$.
4. Найти объем тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2$, $x^2 + y^2 \le 2az$.
5. Найти площадь поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если $x^3 + by^2 \le a^2 x$, $a \le b$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$, если $D = \left\{(x, y, z):\ \mathrm{x}^2 + y^2 + z^2 \le 4az,\quad x^2 + y^2 \le 3z^2\right\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \left\{(x, y, z):\ 2(z^2 + y^2) \ge Rx,\quad x^2 + y^2 + z^2 \le 3\mathrm{R}^2\right\}$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^4 = a^3 z(x^4+y^4)$.
9. Найти момент инерции относительно оси OZ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой М, ограниченной кривыми $ay = x^2$, $x+y=2a$ относительно осей координат.
11. Найти момент инерции однородной поверхности $x^2+y^2=2ax$, $x^2 \ge y^2+z^2$ плотности ρ относительно оси OZ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2+z-\frac{1}{2})dS$, где S – часть параболоида $2z = 2-x^2-y^2$, $z\ge 0$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\left\{(x,y):\ y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a}),\ \ 0\le x\le a\right\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L y^2 ds$, где L – петля кривой $r = a\cos 4\varphi$, пересекающая положительную часть оси OX.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz$, где L – часть кривой $x^2+y^2=r^2$, $z = H$ от точки $A = (r, 0, H)$ до точки $B = (-r, 0, H)$.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(yx+x-y)dy$, где L – часть окружности $x^2+y^2=ax$, $(x\le a/2)$ от точки $A=(a/2,-a)$ до точки $B=(a/2,a)$.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, где S – часть внешней стороны верхней $(z\ge 0)$ полусферы $x^2+y^2+z^2=2Rx$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=2ax$, $a<R$.
18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F}=\frac{f(xyz)}{yz}i+\frac{f(xyz)}{xz}j-2\frac{f(xyz)}{xy}k$, где i, j, k – единичные орты, а $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $div\,(u\nabla u)=u\Delta u+(\nabla u)^2$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = ye^{xy}\vec{i}+xe^{xy}\vec{j}+xyz\vec{k}$ вдоль контура $L=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=(z-1)^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$, положительно ориентированного на внутренней стороне конуса.

21. Найти поток векторного поля $F=(x-3y+6z)\vec{i}$ в направлении внешней нормали через поверхность S, где S – поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $-x+y+2z-4=0$ и координатными плоскостями.

Вариант № 18

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $D=\{(x,y):\ (x-1)^2+y^2\le 1,\quad 0\le x\le 1\}$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}g(r,\varphi)dr$.
2. Вводя новые переменные u и v, вычислить интеграл $\iint\limits_D(x^2y^2+y^2)dxdy$, где $D=\{(x,y):\ 1/x\le y\le 2/x,\quad x\le y\le 3x\}$.
3. Найти площадь петли кривой $(x+y)^4=ax^2y$.
4. Найти объем тела $0\le bz\le x^2y^2\quad ax\le x^2+y^2\le 2ax$.
5. Найти площадь поверхности $x^2+y^2=2ax,$ если $z^2\le x^2+y^2$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, если $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 4R^2,\quad x^2+y^2\le 2Rx\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D=\{(x,y,z):\ y^2+x+z\le a,\ x\ge z\ge 0\}$..
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3z(x^2-y^2)$.
9. Найти момент инерции относительно оси OZ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$.
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой М, ограниченной кривыми $2py=x^2$, $y^2=2px$ относительно осей координат.
11. Найти момент инерции однородной поверхности плотности ρ, полученной при вращении одной арки циклоиды $x=a(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a(1-\cos\varphi)$ вокруг оси OX, относительно оси OX.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S(x^2+y^2+z)dS$, где S – верхняя полусфера $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y):y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a}),\ -a\le x\le a\}$.

14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L |y|\,ds$, где L – кривая $r = a(2 + \cos\varphi)$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (2-y)dx + xdy$, взятый вдоль ориентированной кривой $L = \{(x,y):$ $x = t - \sin t,\quad y = 1 - \cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi\}$, где кривая проходится по возрастанию параметра.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L xdy + ydx$, где L – часть кривой $y = \begin{cases} x^2 \sin 1/x + 4/\pi^2, x \ne 0 \\ 4/\pi^2, \qquad x = 0 \end{cases}$ от точки $A = (0, 4/\pi^2)$ до точки $B = (2/\pi, 8/\pi^2)$.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdz$, где S – часть внешней стороны конуса $\sqrt{x^2 + z^2} = y$, $0 \le y \le b$.
18. Найти $div\,\vec{F}$, если $\vec{F} = xf\left(\frac{xy}{z}\right)i - 2yf\left(\frac{xy}{z}\right)j - zf\left(\frac{xy}{z}\right)k$, где i, j, k – единичные орты, а $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция.
19. Пусть u, v – скалярные поля. Доказать, что $div(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$ вдоль контура $L = \{(x,y,z):\ x^2 + y^2 = az,\ x = 0,\ y = 0,\ z = a,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$, положительно ориентированного на внешней стороне параболоида.
21. Найти поток векторного поля $F = 2x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $3z \le x^2 + y^2$.

Вариант № 19

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$, где $D = \{(x,y):\ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$.
2. Вводя новые переменные u и v, вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x}dxdy$, где $D = \{(x,y):\ 1 - x \le y \le 3 - x,\quad x/2 \le y \le 2x\}$.
3. Найти площадь петли кривой $(x+y)^3 = axy$.
4. Найти объем тела $z \ge 0$, $x + z \le 1$, $x \ge y^2$.
5. Найти площадь поверхности $x^2 + y^2 = 2ax$, если $0 \le az \le x^2 + y^2$.

6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, если $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\le 4R^2,\quad z\ge R\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+ax-xz\le 0,\quad z\ge 0\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3(x^3+y^3)$.
9. Найти момент инерции относительно оси OZ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=z^2tg^2\ \alpha$ ($z\ge 0$, $x^2+y^2\le z^2tg^2\ \alpha$, $\alpha<\pi/2$).
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой M, ограниченной кривой $r=a(1+\cos\phi)$ относительно полярной оси.
11. Найти момент инерции части однородного цилиндра $x^2+y^2=ax$, плотности ρ, лежащей внутри сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ относительно плоскости XZ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (3x^2+5y^2+3z^2-2)dS$, где S – часть конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, лежащая между плоскостями $y=0$, $y=b$.
13. Найти координаты центра масс дуги однородной кривой $L=\{(x,y):x^2+y^2=R^2,\ x\ge 0, y\ge 0\}$.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^2+y^2)ds$, $L=\{(x,y):(x^2+y^2)^2=2a^2xy,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L \frac{ydx+xdy}{1+x^2y^2}$, где L – отрезок AB, A= (0,0) и $B=(1,1)$.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L (4xy-15x^2y)dx+(2x-5^2x^3+7)dy$, где L – часть кривой $y=x^3-3x^2+2$ от точки $A=(1-\sqrt{3},0)$ до точки $B=(1+\sqrt{3},0)$.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (x^2+z^2)dydz$, где S – часть внешней стороны цилиндра $\sqrt{9-y^2}=x$, $0\le z\le 2$.
18. Найти $div\ \vec{F}$, если $\vec{F}=\frac{-ix+jy+kz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где i,j,k – единичные орты.
19. Пусть u,v – скалярные поля. Доказать, что $grad\ (u+v)=grad\ u+grad\ v$.

20. Найти циркуляцию векторного поля $F = z^3\vec{i} + x^3\vec{j} + y^3\vec{k}$ вдоль контура $L = \{(x, y, z):\ 2x^2 + z^2 - y^2 = a^2,\ \ x + y = 0\}$, положительно ориентированного на правой стороне поверхности.
21. Найти поток векторного поля $F = -x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z^3\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S куба $0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

Вариант № 20

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r, \varphi)dr$, где $D = \left\{(x, y):\ \ x^2 + y^2 \ge 1,\ \ y–2x \le 0,\ \ y - \frac{1}{2}x \ge 0,\ \ x \ge 0\right\}$.
2. Вводя новые переменные u и v, вычислить интеграл $\iint\limits_D (x^3 + y^3)dxdy$, где $D = \{(x, y):\ 1/x \le 2y \le 3/x,\ \ \ x^2 \le y \le 3x^2\}$.
3. Найти площадь петли кривой $(x + y)^5 = ax^2y^2$.
4. Найти объем тела $y^2 \le 4x,\ \ \ x^2 \le 4y$, $0 \le z \le y$.
5. Найти площадь поверхности $x^2 = y^2 + z^2$, если $x^2 + y^2 \le a^2$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$, если $D = \{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2az,\ \ \ x^2 + y^2 \le z^2\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \{(x, y, z):\ (y^2 + x^2)^2 \le a^2(x^2 - y^2),\ 0 \le az \le 4(x^2 + y^2),\ x \ge 0\}$..
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2z^2y^2$.
9. Найти момент инерции относительно оси OZ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2z$ ($z \ge 0$).
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой M, ограниченной кривой $r^2 = a^2\cos 2\phi$ относительно полярной оси.
11. Найти момент инерции части однородной верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$ плотности ρ, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, относительно плоскости YZ.

12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}dS$, где S – лежащая внутри цилиндра $\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)^2 = a^2\left(\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}\right)$ часть параболоида $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$, $x \ge 0$.
13. Найти момент инерции витка конической винтовой линии L плотности $\rho = kz$ $L=\{(x,y,z): x = at\cos\pi t,\ \ y = at\sin\pi t,\ \ z = bt \quad 0 \le t \le 2\pi\}$ относительно оси OZ.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (2x - yz^2)ds$, где $L=\{(x,y,z):\ x = t^2/2, y = 2\sqrt{2}t^{3/2}/3, z = t, 0 \le t \le 1\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (-x^2 y dx + xy^2 dy)$, где $L = \{(x,y):\ \ x^2 + y^2 = r^2\}$ – окружность, которая обходится в положительном направлении.
16. Пользуясь формулой Грина вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L x^3y^3dx + (x-y)^2 dy$, где L – ломаная линия ABC, где $A = (2,1)$, B = (0,3), C = (–2,1).
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (a^2x + by^2 + cz^2)dydz$, где S – правая сторона цилиндра $y^2 = 2px$, $x \le 2p$, $0 \le z \le q$.
18. Найти $rot\ \vec{F}$, если $\vec{F} = (x^2+y^2)i + (y^2+z^2)j + (x^2+z^2)k$, i, j, k – единичные орты.
19. Доказать, что $div\ (\vec{F} + \vec{\Phi}) = div\ \vec{F} + div\ \vec{\Phi}$.
20. Найти работу поля $F = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ вдоль кривой $L = AB$ (часть кривой $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$, $y = x$ от точки $A = (1,1,0)$ до точки $B = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$).
21. Найти поток векторного поля $F = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ через поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ в направлении внешней нормали.

Вариант № 21

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D – квадрат с вершинами $O(0,0)$, A(0,1), B(1,0), C(1,1), перейти к полярным координатам r и φ,

полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.

2. Вводя новые переменные u и v, вычислить интеграл $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy$, где $D = \{(x,y):\ 1/x \le y \le 2/x,\quad -1 \le x-y \le 1\}$.
3. Производя удобную замену переменных, найти площадь, ограниченную кривыми $xy = p,\ \ xy = q,\ \ y^2 = ax,\ \ y^2 = bx,\ \ 0 < p < q,\ \ 0 < a < b$.
4. Найти объем тела $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1,\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1$.
5. Найти площадь поверхности $x^2 = y^2 + z^2$, если $x^2 - y^2 \le a^2$, $|y| \le b$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, если $D = \{(x,y,z):\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4R^2,\quad x^2 + y^2 \le R^2\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \{(x,y,z):\ 2x-1 \le y,\quad x \ge 0\quad 0 \le z \le x^2 - y^2\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = az(x^2 + y^2)^2$.
9. Найти момент инерции относительно оси OZ тела плотностью ρ, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.
10. Вычислить момент инерции однородной пластины массой М, ограниченной кривыми $xy = 4$, $xy = 8$, $x = 2y$, $x = y$, $(y > 0)$ относительно оси OY.
11. Найти момент инерции относительно плоскости XY части однородного конуса $x^2 + y^2 = z^2 tg^2\alpha$, $x^2 + y^2 \le R^2$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, массой М.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}dS$, где S – часть параболоида $ax = yz$, лежащая внутри цилиндра $(y^2 + z^2)^2 = 2b^2 yz$.
13. Найти момент инерции однородной дуги плотности ρ $L = \{(x,y,z): x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = \frac{ht}{2\pi}\quad 0 \le t \le 2\pi\}$ относительно оси OX.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)ds$, где $L = \{(x,y,z):\ x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad z = t,\quad 0 \le t \le 2\pi\}$.

15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L} ydx-(y+x^2)dy$, где L – дуга параболы $y=2x-x^2$ от точки $A=(2,1)$ до точки $B=(0,0)$.
16. Пользуясь формулой Грина вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_{L}(x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, где L – ломаная линия ABC, где $A=(0,0)$ до точки $B=(2,2)$, C= (0,1).
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{S}(x^2-2y^2+6z)dxdy$, где S – часть нижней стороны цилиндра $y^2=6z$, $z\le 6$, $0\le x\le 3$.
18. Найти $rot\,\overrightarrow{F}$, если $\vec{F}=z^3i+y^3j+x^3k$, i,j,k – единичные орты.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $div\,(u\vec{c})=\vec{c}grad\;u$, $\vec{c}$ – постоянный вектор.
20. Найти работу поля $F=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}$ вдоль кривой $L=AB$ (наименьшая дуга окружности $x^2+y^2=1$ от точки $A=(1,0)$ до точки $B=(0,1)$).
21. Найти поток векторного поля $F=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ в направлении внешней нормали через нижнюю полусферу $S:\ x^2+y^2+z^2=1,\ \ z\le 0$.

Вариант № 22

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$, где D – треугольник с вершинами $O(0,0)$, A(1,0), B(1,1), перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}g(r,\varphi)dr$.
2. Вводя новые переменные u и v, вычислить интеграл $\iint\limits_{D}x^2dxdy$, где $D=\{(x,y):\ x^3\le y\le 2x^3,\quad x\le 2y\le 6x\}$.
3. Производя удобную замену переменных, найти площадь, ограниченную кривыми $xy=p,\ \ xy=q,\quad y=ax,\quad y=bx,\quad 0<p<q,\quad 0<a<b$.
4. Найти объем тела $\left(x^2+y^2\right)^2\le a^2\left(x^2-y^2\right)\quad 0\le bz\le x^2+y^2$.
5. Найти площадь поверхности $x^2=y^2+z^2$, если $x^2\le ay$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат в интеграле $\iiint\limits_{D}f(x,y,z)dxdydz$, если $D=\{(x,y,z):\ \mathrm{x}^2+y^2\le k^2z^2,\quad 0\le z\le H\}$.
7. Записать $\iiint\limits_{D}f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D=\{(x,y,z):\ \mathrm{a}^2\le x^2+y^2\le b^2,\quad x^2-y^2-z^2\ge 0,\quad x\ge 0\}$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4$.
9. Найти момент инерции относительно плоскости XZ однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=k^2z^2$, $z=h$.
10. Найти координаты центра масс однородной пластинки плотности ρ, ограниченной линиями $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$.
11. Найти момент инерции однородной поверхности $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$, $x=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$, $z=a\sin\psi$ $(b>a)$ плотности ρ относительно оси OX.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S xyzdS$, где S – часть конуса $2xy=z^2$, $z\ge 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.
13. Найти момент инерции однородной дуги $L=\{(x,y):\ x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $x\ge 0$, $y\ge 0\}$ плотности ρ относительно оси OY.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{z^2ds}{x^2+y^2}$, где $L=\{(x,y,z):\ x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=at,\quad 0\le t\le 2\pi\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L ydx-(y+x^2)dy$, где L – контур, составленный линиями $y=0,\ y=x,\ y=\sqrt{1-x^2}$ с положительным направлением обхода.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить $\int\limits_L xydx+2xy^2dy$, где L – контур треугольника ABC, где $A=(1,0)$ до точки $B=(0,1)$, С = (0,0) с отрицательным направлением обхода.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (x^4+y^4+2a^2z^2)dxdy$, где S – часть нижней стороны параболоида $xy=az$, лежащая в первом октанте и внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=bxy$.
18. Найти $rot\ \vec{F}$, если $\vec{F}=\frac{y}{z}i+\frac{z}{x}j+\frac{x}{y}k$, i,j,k – единичные орты.
19. Пусть u,v – скалярные поля. Доказать, что $grad\ (uv)=ugrad\ v+vgrad\ u$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$ вдоль контура L, где L – контур треугольника $ABCA$, A,B,C – точки пересечения плоскости $2x-y-2z+2=0$ соответственно с осями координат OX, OY, OZ.
21. Найти поток векторного поля $F=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S пирамиды $x+y+z\le a$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

Вариант № 23

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,1)$, перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.
2. Вводя новые переменные u и v, вычислить интеграл $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy$, где $D = \{(x,y):\ x-1 \le y \le x+1,\ \text{-x}\ -1 \le y \le 1-x\}$.
3. Производя удобную замену переменных, найти площадь, ограниченную кривыми $x^2 = py,\ \ x^2 = qy,\ \ y^2 = ax, y^2 = bx,\ \ 0 < p < q,\ \ 0 < a < b$.
4. Найти объем тела $0 \le az \le a^2 - 2y^2,\ \ x^2 + y^2 \le a^2$.
5. Найти площадь поверхности $x^2 + z^2 = 2ax$, если $y^2 \le 2px$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат в интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$, если $D = \{(x,y,z):\ \text{x}^2 + y^2 \le R^2,\ \ 0 \le z \le H\}$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \left\{(x,y,z):\ \ 3\text{z}^2 \le x^2 + y^2,\ \ x^2 = y^2 - z^2 \le 2\right\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2)$.
9. Найти момент инерции относительно плоскости XZ однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $a^2 - x^2 - y^2 = az$, $z = 0$.
10. Найти координаты центра масс однородной пластинки плотности ρ, ограниченной линиями $y = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.
11. Найти момент инерции однородного параболоида $x^2 + y^2 = 2cz$, $0 \le z \le c$ плотности ρ относительно оси OZ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (xy + yz + xz)dS$, где S – часть конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z \ge 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.
13. Найти момент инерции однородной дуги $L = \{(x,y):\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $0 \le x \le a\}$ плотности ρ относительно оси OX.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)ds$, где $L = \left\{(x,y,z): x = (1-\cos t),\ x = a(t - \sin t),\ z = 4a\sin {}^1\!/_2\right\}$ от точки A=(0,0,0) до точки $B = (2a\pi,0,0)$.

15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (x+y)dx - xydy$, где L – дуга кривой $x^{1/4} + y^{1/4} = a^{1/4}$ от точки $A=(0,a)$ до точки $B=(a,0)$.
16. Пользуясь формулой Грина вычислить $\int\limits_L (x^2-y^2)dx + 2xydy$, где L – контур треугольника ABC, где $A=(1,1)$ до точки $B=(3,1)$, C = (3,3) с положительным направлением обхода.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (y^2+z^2)dxdy$, где S – часть верхней стороны цилиндра $z=\sqrt{a^2-x^2}$, $0 \le y \le b$.
18. Найти $rot\ \vec{F}$, если $\vec{F}=\vec{r}$, где $\vec{r}=(x,y,z)$.
19. Доказать, что $div\,[\vec{F}\times\vec{\Phi}] = \vec{\Phi} rot\ \vec{F} - \vec{F} rot\ \vec{\Phi}$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F=(x+y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$ вдоль контура L, где L – контур треугольника, $MNPM$ $M=(0,0,0)$, $N=(0,1,0)$, $P=(0,0,1)$.
21. Найти поток векторного поля $F=y^2\vec{j}+z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через часть параболоида $S:\ x^2+y^2=z$, $z\le 2$.

Вариант № 24

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где D – треугольник с вершинами $O(0,0)$, A(1,0), B(0,1), перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$.
2. Вводя новые переменные u и v, вычислить интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где $D=\{(x,y):\ ax^3 \le y \le bx^3,\quad px \le y^2 \le qx\}$.
3. Производя удобную замену переменных, найти площадь, ограниченную кривыми $y=ax^2$, $y=bx^2$, $y^2=px, y^2=qx$, $0<p<q$, $0<a<b$.
4. Найти объем тела $x+y+z\le a$ $x^2+y^2\le a^2$, $z\ge 0$.
5. Найти площадь поверхности $x^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$, если $y^2\le 2px$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в декартовой системе координат в интеграле $\int\limits_0^R dz \int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} f(x,y,z)dx$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D=\{(x,y,z):\ 3x^2-y^2+3z^2\le 0,\quad x^2+y^2+z^2\le 2ay\}$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz$.
9. Найти момент инерции относительно плоскости YZ однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $z=0$, $y=0$, $z=0$ $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.
10. Найти координаты центра масс однородной пластинки плотности ρ, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x=1$, $x=2$.
11. Найти момент инерции однородного сегмента сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \ge H$ $(H < R)$ плотности ρ относительно оси OZ.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, где S – часть конуса $x^2 = y^2+z^2$, $z \ge 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2 = 2ax$.
13. Найти момент инерции однородной дуги $L = \left\{(x,y): x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)\ 0 \le t \le \pi/2\right\}$ плотности ρ относительно оси OX.
14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L xzds$, где $L = \{(r,\varphi,z):\ : r = a(1+\cos\varphi),\quad z = 4a(1-\cos \varphi/2\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L xy^2dx - x^2ydy$, где $L = \{(x,y):\ 2(x+y) = (x-y)^2\}$ от точки $A = (0,2)$ до точки $B = (2,0)$.
16. Пользуясь формулой Грина, вычислить (замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой) $\int\limits_L (e^{-x}\cos y - y^2)dx + (e^{-x}\sin y - x^2)dy$, где L – правая полуокружность $x^2+y^2 = 2ax$, ($x \ge a$) от точки $A = (a,a)$ до точки $B = (a,-a)$.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (x^2+y^2)dydz + (y^2+z^2)dzdx + (z^2+x^2)dxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности тела $x^2+y^2+z^2 \le a^2$, $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.
18. Найти $rot\,\vec{F}$, если $\vec{F} = \vec{c}f(r)$, где $\vec{r} = (x,y,z)$, $r = |\vec{r}\,|$, $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\vec{c}$ – постоянный вектор.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $div\,(u\vec{F}) = udiv\,\vec{F} + \vec{F}grad\,u$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = (x+3y+2z)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ вдоль контура L, где L – контур треугольника $MNPM$, $M = (2,0,0)$, $N = (0,3,0)$, $P = (0,0,1)$.
21. Найти поток векторного поля $F = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность тела $x^2+y^2+z^2 \le 3R^2$, $0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2-R^2}$ в направлении внешней нормали.

Вариант № 25

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$, где $D = \left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \ge \frac{1}{4},\quad x^2+y^2 \le 1\right\}$.
2. Вводя новые переменные u и v, вычислить интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где $D = \{(x,y):\ \mathrm{a}x^2 \le y^3 \le bx^2,\quad \alpha\, x \le y \le \beta x\}$.
3. Производя удобную замену переменных, найти площадь, ограниченную кривыми $y = \frac{x^5}{a^4}$, $y = \frac{x^5}{b^4}$, $x = \frac{y^5}{c^4}$, $x = \frac{y^5}{d^4}$, $0 < c < d$, $0 < a < b$, $x > 0$, $y > 0$.
4. Найти объем тела $x + y + z - 4a \ge 0$, $x^2 + y^2 \le a^2$, $z \ge 0$.
5. Найти площадь поверхности $x^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$, если $x^{2/3} + y^{2/3} \le a^{2/3}$.
6. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в декартовой системе координат в интеграле $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{R-\sqrt{R^2-z^2-y^2}} f(x,y,z)dz$.
7. Записать $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного интеграла, выбрав одну из систем координат (декартову, цилиндрическую или сферическую), если $D = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le a^2,\ x^2 - y^2 - z^2 \le 2ax\}$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^3xyz$.
9. Найти момент инерции относительно плоскости XY однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2xy$, $x > 0$, $y > 0$.
10. Найти координаты центра масс однородной пластинки плотности ρ, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \ge 0,\quad y \ge 0)$.
11. Найти координаты центра масс однородной полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$.
12. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S xzdS$, где S – часть цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, лежащая между конусом $\sqrt{x^2+y^2} = z$ и параболоидом $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$.
13. Найти момент инерции однородной дуги $L = \{(x,y): x = a\cos t,\quad y = a\sin t \quad 0 \le t \le \alpha\}$ плотности ρ относительно оси OY.

14. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L ye^{-x}ds$, где $L = \{(x,y):\ x = \ln\,(1+t^2),\quad y = 2arctgt - t + 3,\quad 0 \le t \le 1\}$.
15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L xydx - x^2dy$, где $L = \{(x,y): x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0\}$ от точки $A = (-1/4,-1/8)$ до точки $B = (0,0)$.
16. Пользуясь формулой Грина вычислить $\int\limits_L y^{5/3}dx - x^{5/3})dy$, где L – положительно ориентированная кривая $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
17. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (x+y^2)dydz + (y+z^2)dzdx + (z+x^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \le z \le H$.
18. Найти $rot\vec{F}$, если $\vec{F} = \vec{r}f(r)$, где $\vec{r} = (x,y,z)$, $r = |\vec{r}|$, $f(u)$ – непрерывно дифференцируемая функция.
19. Пусть u – скалярное поле. Доказать, что $divgrad\ u = \Delta u$, где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.
20. Найти циркуляцию векторного поля $F = (x+z)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль контура $L = \left\{(x,y,z):\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$, положительно ориентированного на верхней стороне плоскости $z = 5$.
21. Найти поток векторного поля $F = x\vec{i} - xy\vec{j} + z\vec{k}$ в направлении внешней нормали через поверхность S, где S – часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченная плоскостями $z = 0$ и $x + z = R$.

Литература

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : Физматлит, 2002. – 558 с.
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л.Д. Кудрявцев [и др.]. – М. : Наука, 1995. – 495 с.
3. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов [и др.]. – М. : Физматлит, 2000. – 479 с.
4. Фихтенгольц Г.Н. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г.Н. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 1997. – Т. 2. – 800 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 584 с.

Учебное издание

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ)

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители:
Виноградова Галина Анатольевна,
Ларин Александр Александрович,
Рогова Наталья Ивановна,
Украинский Павел Сергеевич

Подписано в печать Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 2,3.
Тираж 50 экз. Заказ 848.

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10. Тел. 208-298, 598-026 (факс)
http://www.ppc.vsu.ru; e-mail: pp_center@ppc.vsu.ru

Отпечатано в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. 204-133.