ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК: НЕОКОНЧЕННАЯ ИСТОРИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

А. В. САМОХИН

Московский государственный технический университет гражданской авиации

THE FOUR-COLOR THEOREM: AN UNFINISHED HISTORY OF THE PROOF

A. V. SAMOKHIN

The history of the famous four-color theorem is given. Its extremely tedious proof as well as the use of a computer in some verifications give rise to the question: what a proof is in mathematics and what its place is among other exact sciences? Some equivalent formulations and generalizations are given. A corresponding five-color theorem is proved.

Излагается история теоремы о четырех красках. Ее чрезвычайно длинное доказательство, притом использующее компьютер для проверки части утверждений, вызывает вопрос о том, что понимать под доказательством в математике и каково ее место среди других точных наук. Приведены некоторые эквивалентные формулировки и обобщения. В статье доказывается соответствующая теорема о пяти красках.

www.issep.rssi.ru

КРАТКАЯ ИСТОРИЯ

Раскрашивая географическую карту естественно пользоваться по возможности меньшим количеством цветов, однако так, чтобы две страны, имеющие общую часть границы (не только общую точку), были окрашены по-разному. В 1852 году Френсис Гутри (Guthrie), составляя карту графств Англии, обратил внимание, что для такой цели вполне хватает четырех красок. Его брат, Фредерик, сообщил об этом наблюдении известному математику О. Де Моргану (DeMorgan), а тот – математической общественности. Точная формулировка гипотезы опубликована А. Кэли (Cayley, 1878).

Первое доказательство появилось год спустя и принадлежало В. Кемпе (Kempe). Одиннадцать лет спустя П. Хивуд (Heawood) обнаружил в нем ошибку. (Однако из доказательства Хивуд понял, что пяти красок действительно достаточно. Тем не менее для любой конкретной карты хватало четырех красок!) За первым ошибочным доказательством последовало множество других. В этом отношении проблема четырех красок уступала лишь знаменитой проблеме Ферма. До середины XX века, хотя проблемой четырех красок занимались многие выдающиеся математики, положение с доказательством изменилось несущественно: идеи Дж. Д. Биркгофа позволили П. Франклину в 1913 году доказать гипотезу для карты с не более чем 25 странами. Позже это число было увеличено до 38.

В 1977 году доказательство гипотезы четырех красок было наконец получено К. Аппелем и У. Хакеном (Appel, Haken) и опубликовано в двух статьях [1]. Значительную часть рутинных проверок выполнил компьютер, и это революционное нововведение в сложившуюся практику дедуктивных рассуждений в чистой математике служит основанием для некоторого естественного скептицизма по отношению к данному доказательству и по сей день (подробнее об этом в конце статьи). Сначала мы приведем точные формулировки, докажем теорему о пяти красках и укажем некоторые эквивалентные проблемы.

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Проблемы раскраски карты на глобусе и плоскости эквивалентны. Действительно, в случае карты на сфере можно вырезать кусок внутренней области какой-либо страны; продырявленную сферу можно деформировать (растянуть) в плоскую область – представим, что карта сделана из тонкой резины. На плоской карте отверстие превратится в “океан”, омывающий со всех сторон одну страну. Разумеется, длины границ, их форма, размеры стран подвергнутся при растяжении значительным изменениям, но сетка границ останется, добавится лишь растянутая граница прорезанного отверстия, внешняя граница океана. Ее можно убрать, то есть раскрасить океан так же, как и окруженную им страну. Такие деформации стран и их границ, очевидно, не меняют задачи раскраски. Ниже рассматривается плоская карта.

Начнем с того, что заменим задачу раскраски плоской карты на эквивалентную ей проблему, касающуюся плоских графов. Выберем столицу у каждой страны (то есть выберем по одной внутренней точке в каждой из стран) и соединим дугами столицы стран, имеющих общий сегмент границы. В результате получится так называемый плоский граф.

Определение 1. *Графом G* называется конечное множество вершин $V(G)$ и конечное множество ребер $R(G)$, так что каждое ребро имеет своими концами две различные вершины. Граф называется *плоским*, если вершины являются точками плоскости, а ребра – ломаными линиями (составленными из отрезков) в этой же плоскости, имеющими своими концами вершины, не пересекающимися между собой и не включающими других вершин, кроме своих концов.

Отметим, что в плоском графе не допускаются петли (ребра, имеющие началом и концом одну и ту же вершину).

Плоский граф разрезает плоскость на совокупность $D(G)$ неперекрывающихся многоугольных областей, необязательно конечных (рис. 1).

Если перенумеровать используемые краски 1, 2, ..., n, то на соответствующем карте плоском графе этими числами окажутся занумерованы вершины/столицы.

Определение 2. *Правильной n-раскраской плоского графа G* называется отображение $\phi: V(G) \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$, причем $\phi(\upsilon_1) \neq \phi(\upsilon_2)$ в случае, если существует такое ребро $r \in R(G)$, что граница r состоит из υ_1 и υ_2.

Наконец, можно сформулировать проблему четырех красок в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Любой плоский граф допускает правильную 4-раскраску.*

Вот решение этой-то проблемы и заняло более столетия. Однако на первый взгляд чуть более слабое утверждение о правильной 5-раскраске доказать достаточно просто. Для доказательства понадобится формула Эйлера, связывающая число вершин, ребер и областей. Пусть $|M|$ обозначает число элементов конечного множества M.

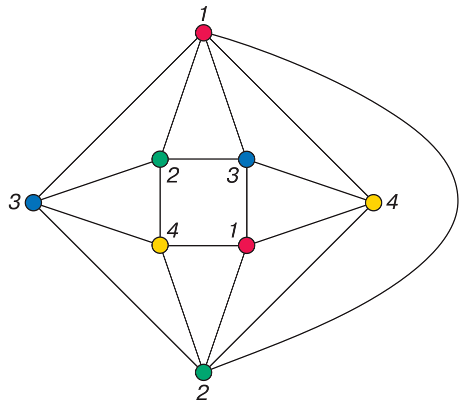

Рис. 1. 4-раскраска плоского графа

Теорема Эйлера (см. [3]). *Для любого плоского графа* $|V(G)| - |R(G)| + |D(G)| = 2$.

Заметим, что если не учитывать внешнюю бесконечную область, то формула Эйлера для триангуляции конечного плоского графа имеет вид $|V(G)| - |R(G)| + |D(G)| = 1$.

Теорема 2. *Любой плоский граф допускает правильную 5-раскраску.*

Доказательство. Сначала упростим граф. Если есть несколько ребер, соединяющих некоторую пару вершин (такая ситуация может возникнуть, если две страны имеют несколько несвязанных между собой кусков границы, например как у России и Китая), то оставим только одно ребро: правильность раскраски такого уменьшенного графа все равно гарантирует правильную раскраску исходного.

Проведем теперь индукцию по числу вершин графа. Для графа с тремя вершинами утверждение теоремы очевидно. Пусть оно справедливо для всех графов с $n - 1$ вершиной.

Пусть $D_1, D_2, ..., D_m$ – полный набор всех $m = D(G)$ областей графа, а $N(D_i)$ – число ребер, составляющих границу i-й области графа. При этом $N(D_i) \geq 3$ для любого i. Любое ребро входит в границу в точности двух областей, поэтому

$$N(D_1) + N(D_2) + ... + N(D_m) = 2R(G).$$

Вследствие неравенств $N(D_i) \geq 3$ имеем

$$2R(G) = N(D_1) + N(D_2) + ... + N(D_m) \geq 3m = 3D(G),$$

откуда $2R(G) \geq 3D(G)$.

По формуле Эйлера $|V(G)| - 2 + |D(G)| = |R(G)|$, откуда

$$3|R(G)| = 3|V(G)| - 6 + 3|D(G)| \leq 3|V(G)| - 6 + 2|R(G)|$$

и, следовательно,

$$|R(G)| \leq 3|V(G)| - 6. \qquad (1)$$

Заметим, что удвоенное число ребер можно отождествить и с другой характеристикой графа. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$ есть полный набор $n = V(G)$ вершин графа, а $M(\alpha_j)$ – число ребер, сходящихся в вершине с номером j. Но каждое ребро заканчивается двумя вершинами, поэтому

$$2R(G) = M(\alpha_1) + M(\alpha_2) + \ldots + M(\alpha_n).$$

Кроме того, как это следует из неравенства (1), $2|R(G)| \leq 6|V(G)| - 12$. Следовательно,

$$M(\alpha_1) + M(\alpha_2) + \ldots + M(\alpha_n) \leq 6|V(G)| - 12. \qquad (2)$$

Из последнего неравенства можно вывести, что существует по крайней мере одна вершина, в которой сходится не более пяти ребер. Действительно, предположим противное, то есть $\forall j \quad M(\alpha_j) \geq 6$. Тогда

$$M(\alpha_1) + M(\alpha_2) + \ldots + M(\alpha_n) \geq 6n = 6V(G),$$

что противоречит (2).

Перенумеруем вершины так, что в вершине $\alpha = \alpha_n$ сходится не более пяти ребер.

Если в вершине α сходятся не более четырех ребер, то рассмотрим граф $G \backslash \alpha$, который получается из G устранением вершины α и всех оканчивающихся в ней ребер. Граф $G \backslash \alpha$ допускает правильную 5-раскраску по предположению индукции. А так как ребра соединяют вершину α не более чем с четырьмя вершинами этого меньшего графа, то для правильной раскраски α остается по крайней мере один цвет (из пяти).

Пусть теперь в α сходится ровно пять ребер. Рассмотрим граф $H \subset G$, состоящий из тех пяти вершин, куда приходят ребра, выходящие из α и соединяющих их (в G) ребер. В графе H обязательно найдутся две вершины, не соединенные ребром. Действительно в противном случае в пятиугольнике H будет $C_5^2 = 10$ ребер (это нетрудно посчитать и непосредственно). Однако в силу (1)

$$|R(H)| \leq 3|V(H)| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9,$$

и мы приходим к противоречию.

Пусть β и γ суть те вершины H, которые не соединены между собой. Не соединены они и в $G \backslash \alpha$. Рассмотрим граф G', который получается из $G \backslash \alpha$ при помощи деформации, которая отождествляет (совмещает) β и γ. Граф G' – это плоский граф, так как при отождествлении вершин в этой ситуации не может возникнуть петли. Но для G' справедливо предположение индукции, и существует некоторая его правильная 5-раскраска φ. Разъединим в этом раскрашенном графе вершины β и γ. Тогда правильную 5-раскраску получает и граф $G \backslash \alpha$, причем такую, что $\varphi(\beta) = \varphi(\gamma)$. Иными словами, β и γ раскрашены одинаково и, следовательно, раскраска пяти соседних с α вершин графа H использует не более четырех цветов.

Используем оставшийся цвет для раскраски вершины α и получим правильную 5-раскраску G!

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОРМУЛИРОВКАХ

Проблема четырех красок кажется на первый взгляд изолированной задачей, мало связанной с другими разделами математики и практическими задачами. На самом деле это не так. Известно более 20 ее переформулировок, которые связывают эту проблему с задачами алгебры, статистической механики и задачами планирования. И это тоже характерно для математики: решение задачи, изучаемой из чистого любопытства, оказывается полезным в описании реальных и совершенно различных по своей природе объектов и процессов. Здесь мы рассмотрим одну задачу, эквивалентную проблеме четырех красок.

Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ суть стандартные единичные направляющие векторы координатных осей x, y и z соответственно. В трехмерном пространстве определено векторное произведение векторов, обозначаемое знаком $\times$. Если $u, \upsilon \in \mathbb{R}^3$ – два вектора, то их векторное произведение $u \times \upsilon$ имеет длину $|u| \cdot |\upsilon| \cdot |\sin(\widehat{u, \upsilon})|$, а направление определяется по правилу буравчика или правой руки. Легко убедиться в том, что это произведение не ассоциативно, то есть произведение $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$, вообще говоря, не определено, если в нем не расставлены скобки. Действительно, например, $0 = \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq$ $\neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$. Для того чтобы выражение $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ имело определенный смысл, в нем нужно правильным образом расставить $n - 2$ пары скобок. Такое выражение со скобками называется ассоциацией.

Теорема 3. *Для каждой пары ассоциаций, связанных с выражением $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$, существует такая подстановка $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \longrightarrow \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (то есть $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ подставляются каким-то образом вместо всех u_k), что значения ассоциаций будут равны между собой и отличны от нуля.*

Утверждение касается только векторов в трехмерном пространстве и кажется простым, но доказать его так же трудно, как и теорему о 4-раскраске. Доказательство эквивалентности последней теоремы проблеме четырех красок дано Л. Кауфманом [4] и объяснено на пальцах в [5]. Здесь мы только коротко объясним связь этих задач.

Во-первых, причем здесь графы? Графически ассоциацию можно представлять себе в виде дерева, то есть графа специального вида, устроенного следующим образом. Произведению всякой пары $u \times \upsilon$ соответствует пара ребер (веток), имеющих общую вершину, при этом концы ветвей соответствуют сомножителям, а общее начало – произведению. Шаг за шагом выполняя действия, предписанные в ассоциации скобками, приходим к корню этого дерева, соответствующему результату выполнения всех перемножений в заданной ассоциации. В верхней части рис. 2 представлены деревья, определяемые ассоциациями $(u_1 \times u_2) \times (u_3 \times u_4)$ (внизу, ветвями вверх) и $(((u_1 \times u_2) \times u_3) \times u_4)$ (вверху, ветвями вниз).

Склеим теперь оба эти дерева по концам веток (концы соответствуют всем элементам ассоциации u_1, u_2, u_3, u_4) и затем соединим корни обоих деревьев дополнительным ребром. Получится плоский граф, изображенный в нижней части рис. 2. Отметим два специфических свойства такого графа: в любой его вершине сходится ровно три ребра (это свойство называется кубичностью графа). Удаление любого ребра не приводит к разделению графа на две не связанные между собой компоненты (это свойство назовем отсутствием разделяющего ребра).

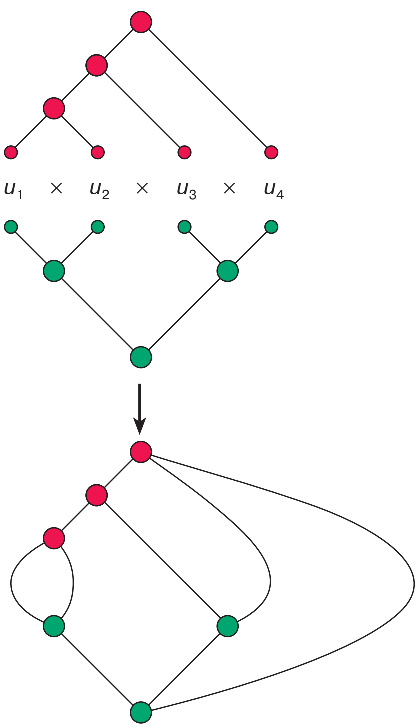

Рис. 2. Две ассоциации порождают кубический граф

Эта конструкция обобщается для любой пары ассоциаций с одинаковым количеством сомножителей.

Во-вторых, причем здесь раскраски? Будем считать векторы $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ и $\pm\mathbf{k}$ тремя красками, приписанными всем элементам ассоциации или, что то же, концевым веткам деревьев. Остальные ветки вплоть до корня окрасятся по правилам вычисления векторного произведения. Если мы хотим после вычислений получить ненулевой результат, то, как легко проверить, три ребра, сходящиеся в любой вершине, должны быть раскрашены по-разному.

Тем самым кубический плоский граф, полученный склеиванием двух деревьев различных ассоциаций, получит такую раскраску ребер, что в любой вершине сходятся три по-разному окрашенных ребра. Это так называемая правильная 3-раскраска ребер.

В-третьих, причем здесь проблема четырех красок? Дело в том, что проблемы правильной 4-раскраски вершин и правильной 3-раскраски ребер эквивалентны. Точнее, справедлива

Теорема 4. *Всякий кубический граф без разделяющих ребер допускает правильную* 3*-раскраску ребер.*

Эта теорема эквивалентна теореме 1 о правильной 4-раскраске карт. Доказательство эквивалентности не очень сложно, и его можно найти в большинстве учебников по теории графов.

Объясним лишь, как 4-раскраска областей кубического графа порождает 3-раскраску его ребер. Пусть области кубического графа окрашены четырьмя красками. Вместо того чтобы нумеровать краски числами 1, 2, 3 и 4, занумеруем их парами (0, 0), (0, 1), (1, 0) и (1, 1). При отсутствии разделяющих ребер к каждому ребру примыкают две разные области. Припишем ребру, разделяющему области, окрашенные с помощью (i, j) и (k, l), цвет по формуле $(i + k, j + l)(\mathrm{mod}\,2)$. Здесь $n(\mathrm{mod}\,2)$ означает остаток от деления n на 2. Различающиеся пары цветов областей порождают только три пары (0, 1), (1, 0) и (1, 1) для раскраски ребер.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Доказательство Аппеля и Хакена, в целом хотя и принятое математическим сообществом, вызывает до сих пор определенный скептицизм. Для читателя, поверхностно знакомого с математикой, предыдущая фраза должна вызвать изумление: а как же обязательный для математики принцип исключенного третьего, в соответствии с которым утверждение либо справедливо, либо нет? Дело обстоит не так просто. Вот что пишут сами авторы доказательства: “Читатель должен разобраться в 50 страницах текста и диаграмм, 85 страницах с почти 2500 дополнительными диаграммами, 400 страницами микрофишей, содержащими еще диаграммы, а также тысячи отдельных проверок утверждений, сделанных в 24 леммах основного текста. Вдобавок читатель узнает, что проверка некоторых фактов потребовала 1200 часов компьютерного времени, а при проверке вручную потребовалось бы гораздо больше. Статьи устрашающи по стилю и длине, и немногие математики прочли их сколько-нибудь подробно”.

Говоря прямо, компьютерную часть доказательства невозможно проверить вручную, а традиционная часть доказательства длинна и сложна настолько, что ее никто целиком и не проверял. Между тем доказательство, не поддающееся проверке, есть нонсенс. Согласиться с подобным доказательством означает примерно то же, что просто поверить авторам. Но и здесь все сложнее.

Вернемся сначала к доказательствам формулы Эйлера и теоремы о 5-раскраске. Ее-то вроде бы нетрудно проверить, взяв лист бумаги и карандаш. Но рассуждения в ней основаны на очевидных соображениях типа: “Плоский граф разрезает плоскость на совокупность $D(G)$ неперекрывающихся многоугольных областей”. Между тем это утверждение не принадлежит к числу аксиом или школьных теорем плоской геометрии, и его нужно доказывать. Соответствующая теорема, сформулированная К. Жорданом, доказывается очень непросто, однако основные трудности связаны с тем, как следует понимать слова типа “разрезает”, интуитивно вполне ясные, но с трудом поддающимся формализации. В свете этого замечания становится уже не совсем понятным, доказана ли теорема о пяти красках или мы поверили правдоподобным рассуждениям, основанным на интуитивных представлениях о свойствах геометрических фигур.

Долгое время идеалом математической строгости были формулировки и доказательства Евклида, в которых осуществлялась программа вывода теорем из аксиом по определенным правилам (метод дедукции, позволяющий получать неочевидные утверждения из очевидных посредством ряда явно предъявляемых элементарных, очевидно законных, умозаключений). Этот образец строгости и в наше время недостижим в курсе школьной математики, но для современной чистой математики стандарты Евклида недостаточны. Евклид, по-видимому, не задумывался над тем, почему прямая делит плоскость на две части (и что это значит), он не определял понятия “между”, считая это понятие очевидным и т.д. Большая часть соответствующих утверждений доказана или включена в аксиоматику геометрии только в последнюю сотню лет. Формальные выводы из новой системы аксиом стали гораздо длиннее, чем в античные времена.

Трудно даже вообразить длину полного вывода теоремы о пяти красках в соответствии с современными стандартами математической логики и системы аксиом геометрии. Но совершенно точно, что такое рассуждение никто никогда не проделывал из-за бесполезности этого занятия: формальные выводы практически не поддаются проверке в силу свойств человеческой психики: помимо их гораздо большей (по сравнению с привычными рассуждениями) длины их сознательное усвоение идет гораздо медленнее. Поэтому обычно удовлетворяются уверенностью в том, что формальный вывод возможен в принципе.

В формуле Эйлера, например, математики не сомневаются. Вообще принятие доказательства есть некий социальный акт. Выдающийся алгебраист Ю.И. Манин в своей книге “Доказуемое и недоказуемое” [6] пишет по этому поводу: “...отсутствие ошибок в математической работе (если они не обнаружены), как и в других естественных науках, часто устанавливается по косвенным данным: имеют значение соответствие с общими ожиданиями, использование аналогичных аргументов в других работах, разглядывание “под микроскопом” отдельных участков доказательства, даже репутация автора, словом, воспроизводимость в широком смысле. “Непонятные” доказательства могут сыграть очень полезную роль, стимулируя поиски более доступных рассуждений.”

Именно такая история происходит и с доказательством теоремы о четырех красках. Не так давно появилось новое доказательство (см. [5], где изложены основные идеи), причем та часть, которая выполнена не на компьютере, уже поддается проверке. Однако компьютерная часть все еще остается скорее предметом веры. Ведь даже проверка распечаток всех программ и всех входных данных не может гарантировать от случайных сбоев или даже от скрытых пороков электроники (вспомним, что ошибки при выполнении деления у первой версии процессора Pentium были случайно обнаружены спустя полгода после начала его коммерческих продаж – кстати, математиком, специалистом в теории чисел). По-видимому, единственный способ проверки компьютерных результатов – написать другую программу и для другого типа компьютера. Это, конечно, совсем непохоже на стандартный идеал дедуктивных рассуждений, но именно так осуществляется проверка утверждений во всех экспериментальных науках.

Из которых математика, стало быть, исключена напрасно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appel K., Haken W.* Every Planar Map Is Four Colorable. Contemporary Mathematics. Providence (R.I.): Amer. Math Soc., 1989. Vol. 98. 308 p.

2. *Cipra B.* Map Coloring Theorists Look at New Worlds. What's Happening in the Mathematical Sciences. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 1. p. 43–47.

3. *Прасолов В.В.* Наглядная топология. М.: ТЕИС МЦНМО, 1995. 112 с.

4. *Kauffman L.H.* Map Coloring and the Vector Cross Product // J. Combin. Theory. Ser. B. 1990. Vol. 48. p. 145–154.

5. *Thomas R.* An Update on the Four-Color Theorem // Not. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 45, № 7. P. 848–859.

6. *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. М.: Сов. радио, 1979. 168 с.

Рецензент статьи Ю.П. Соловьев

* * *

Алексей Васильевич Самохин, кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Московского государственного технического университета гражданской авиации. Область научных интересов – алгебраические и геометрические структуры, связанные с нелинейными дифференциальными уравнениями. Автор 28 научных работ, одной монографии и 17 методических пособий для студентов.