

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Часть 2

Учебно-методическое пособие для студентов по специальности

010101 (010100)

Математика

Воронеж
2005

Утверждено научно- методическим советом
математического факультета
14 июня 2005 года
Протокол № 11

Составители: Михайлова И.В.
Баркова Л.Н.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 3 курса дневного и 5 курса вечернего отделений математического факультета

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с программой курса « Теория случайных процессов». Оно содержит краткие теоретические сведения и задачи для самостоятельного решения.

1. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Определение 1. Случайный процесс $\{x_t(w), t \in T \subseteq \mathbb{R}\}$ со значениями в фазовом пространстве (X, \mathcal{B}) называется **марковским**, если для любого $t \in T$ и любых событий $A \in \mathcal{A}_{\leq t}$, $B \in \mathcal{A}_{\geq t}$ справедливо равенство

$$P\{A \cap B | \mathcal{A}_{=t}\} = P\{A | \mathcal{A}_{=t}\} \cdot P\{B | \mathcal{A}_{=t}\} \quad \text{п. н.} \quad (1)$$

$\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ - основное вероятностное пространство, (X, \mathcal{B}) - измеримое пространство, в котором все одноточечные множества измеримы,

$\mathcal{A}_{\leq t} = \mathcal{S}\{x_s, s \in T, s \leq t\}$, $\mathcal{A}_{\geq t} = \mathcal{S}\{x_s, s \in T, s \geq t\}$, $\mathcal{A}_{=t} = \mathcal{S}\{x_t, t \in T\}$ - \mathcal{S} -алгебры, порожденные соответствующими семействами случайных величин.

Прежде чем сужать класс рассматриваемых процессов, дадим

Определение 2. Функция $P(s, t, x, \Gamma)$, определенная для $s, t \in T, s \leq t, x \in X, \Gamma \in \mathcal{B}$, называется **переходной функцией марковского процесса** $\{x_t(w), t \in T\}$, если:

4. Рассмотрим бросания правильной игральной кости и условимся говорить, что в момент n система находится в состоянии E_j , если j наибольшее из числа очков, выпавших при первых n бросаниях. Найти матрицу P^n .

5. Проверить, что равенство (1) эквивалентно любому из двух:

$$P\{B|A_{\leq t}\} = P\{B|A_{=t}\}, \quad t \in T, B \in A_{\geq t} \quad \text{п.н. или} \quad P\{A|A_{\geq t}\} = P\{A|A_{=t}\}, \quad t \in T, A \in A_{\leq t}$$

п.н.

где $I_i \geq 0$, $m_i \geq 0$, ($m_0=0$); $a_i(\Delta t)$, $b_i(\Delta t)$, ($b_0(\Delta t)=0$), $g_i(\Delta t)$ - бесконечно малые более высокого порядка, чем Δt при $\Delta t \rightarrow +0$

Определение 2. Числа I_i и m_i в определении 1 будем называть соответственно **параметрами рождения и гибели** соответствующего процесса $\{x_i(w), t \geq 0\}$.

Если значение $x_i(w)$ процесса рождения и гибели $\{x_i(w), t \geq 0\}$ интерпретировать как число особей некоторой популяции в момент времени t , то постулаты 1^{00} и 2^{00} означают, что вероятности "**рождения**" и "**гибели**" одной особи за время Δt с точностью до $O(\Delta t)$ есть линейные функции длины интервала при $\Delta t \rightarrow +0$.

Заметим, что постулаты 1^{00} - 3^{00} задают условные вероятности перехода в соседние состояния и условную вероятность остаться в данном состоянии за малый промежуток времени Δt . Поэтому естественными будут следующие два вопроса:

первый - чему же равны условные вероятности "**рождения**" и "**гибели**" более чем одной особи за время Δt при $\Delta t \rightarrow +0$;

второй - что можно сказать о вероятностях перехода $P_{ij}(t)$ за промежуток времени $t > 0$ для данного процесса рождения и гибели.

Ответ на первый вопрос вы получите, решив задачу 1 этого пункта.

Ответ на второй вопрос дают решения систем дифференциальных уравнений, которые можно вывести, используя постулаты 1^{00} - 3^{00} и уравнение **Колмогорова - Чепмена** 2^0 .

Для этого рассмотрим вероятности $P_{ij}(t + \Delta t)$, $t, \Delta t > 0$.

Деление интервала $(0; t + \Delta t)$ на два (этого требует 2^0) можно осуществить двумя способами:

- 1) $(0; \Delta t)$ и $(\Delta t; t + \Delta t)$;
- 2) $(0; t)$ и $(t; t + \Delta t)$ для $\Delta t > 0$.

Первый способ деления интервала $(0; t + \Delta t)$ приводит к обратной системе дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_{0j}(t)}{dt} = -I_0 P_{0j}(t) + I_0 P_{1j}(t), t > 0, \\ \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = m_i P_{i-1j}(t) - (I_i + m_i) P_{ij}(t) + I_i P_{i+1j}, t > 0, i \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3)$$

$P_{ij}(0) = d_{ij}$ - начальное условие, d_{ij} - символ Кронекера, где j - фиксированное из \mathbb{N}_0 .

Второй способ при более жестких условиях приводит к прямой системе дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_{i0}(t)}{dt} = -l_0 P_{i0}(t) + m_1 P_{i1}(t), \quad t > 0, \\ \frac{dP_{ij}(t)}{dt} = l_{j-1} P_{i,j-1}(t) - (l_j + m_j) P_{ij}(t) + m_{j+1} P_{i,j+1}(t), \quad t > 0, \quad j \in \mathbb{N}, \end{array} \right. \quad (4)$$

$P_{ij}(0) = d_{ij}$ - начальное условие, d_{ij} - символ Кронекера, где i - фиксированное из \mathbb{N}_0 .

Полезно помнить, что системе, аналогичной (4), удовлетворяют и безусловные вероятности для $t > 0$.

Обратим свое внимание на систему (4). При выполнении определенных условий, регулирующих степень роста параметров рождения по отношению к параметрам гибели, система (4) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1.$$

Но, к сожалению, решение системы (4) - процесс трудоемкий даже для такого, на первый взгляд, простого процесса рождения и гибели, как процесс с постоянными параметрами рождения и гибели ($l_i = l$; $m_i = m$, $i \in \mathbb{N}$).

Но, к счастью, систему (4), помимо непосредственного решения, в результате чего получаем вероятности перехода за $t > 0$ (в переходном режиме), можно использовать еще по двум направлениям (пункты 3,4).

Задачи и упражнения

1. Для процесса рождения и гибели $\{x_t(w), t \geq 0\}$ найти : $P\{|x_{t+\Delta t}(w) - x_t(w)| \geq 2 | x_t(w) = i\}$ при $\Delta t \rightarrow +0$

2. Вывести прямую систему дифференциальных уравнений для правых и левых производных и убедиться, что они совпадают с (3). Аналогичное сделать для системы (4). Вывести систему дифференциальных уравнений (для правых и левых производных) для безусловного распределения вероятностей состояний в произвольный момент времени $t > 0$, т.е. для $P_j(t)$, $j \in \mathbb{N}_0$.

3. **Случайный двоичный сигнал.** Так принято называть процесс рождения и гибели $\{x_t(w), t \geq 0\}$ с фазовым пространством $X = \{-1, 1\}$ и вероятностями перехода за Δt при $\Delta t \rightarrow +0$ $P_{-11}(\Delta t) = l\Delta t + O(\Delta t)$ и $P_{1-1}(\Delta t) = m\Delta t + O(\Delta t)$, где $l, m > 0$.

Для данного процесса найти:

1) вероятности перехода $P_{ij}(t)$;

2) безусловные вероятности при $P_j(t)$ данном начальном распределении:

$$P\{\Theta_0(w)=-1\}=P=P\{\Theta_0(w)=1\};$$

$$3) \lim_{t \rightarrow +\infty} P_{ij}(t);$$

$$4) \text{ среднее значение процесса } m(t)=M\Theta_t(w);$$

5) ковариационную функцию процесса $K(s,t)=\text{cov}(\Theta_s(w),\Theta_t(w))$, где $s,t \geq 0$;

б) $m(t)$ и $K(s,t)$ для случая, когда начальное распределение совпадает с распределением, полученным в 3). Будет ли процесс с таким распределением стационарным в широком смысле ?

4. **Процесс Юла** является примером процесса чистого рождения, т.е. $m_i=0, b_i(\Delta t) \equiv 0$ и $l_i=i$ для $i \in N_0, x_0 \equiv 0$.

Указанный процесс широко применяется в физике и биологии для описания эволюции следующей системы.

Рассмотрим совокупность элементов, которые могут независимо друг от друга порождать новые элементы, но не могут исчезать. Предположим, что каждый элемент с вероятностью $l\Delta t + O(\Delta t)$ производит новый элемент в интервале $(t; t + \Delta t)$.

Здесь естественно $x_t(w)$ интерпретировать как число рождений в интервале $(0,t)$.

1) Найти безусловное распределение случайного процесса $\{x_t(w), t \geq 0\}$ $P_j(t) = P\{x_t(w)=j\}$,

в предположении, что в начальный момент времени в совокупности был один элемент ("родоначальник" или стартовый элемент).

2) Предположим, что родоначальник, и только он, может погибнуть, причем его время жизни не зависит от поведения его потомков и имеет показательное распределение с параметром m . Найти распределение общего числа потомков всех поколений этой стартовой особи в момент ее гибели.

3) Найти безусловное распределение процесса x_t при наличии в данной популяции n стартовых особей.

5. **Пуассоновский процесс** - процесс чистого рождения с $l_i=1$ для $i \in N_0$ и $x_t(w)$ так же, как и в 1, число рождений в $(0,t)$.

1) Найти безусловное распределение вероятностей случайного процесса $\{x_t(w), t \geq 0\}$.

2) Введем следующую операцию "просеивания":

Каждую из родившихся особей независимо от других с вероятностью P объявим "синей", а с вероятностью $1-P$ - "красной".

Если обозначить h_t число "синих" особей, родившихся в $(0,t)$, тогда $x_t - h_t$ - число "красных" особей, появившихся в $-(0,t)$. Доказать, что

$\{h_i(w), t \geq 0\}$ пуассоновский процесс с параметром $1-P$, а $x_i - h_i$ пуассоновский с параметром $1(1-P)$.

Замечание

Процесс рождения и гибели $\{x_i(w), t \geq 0\}$ с множеством состояний $X = \{0, 1\}$ описывает эволюцию системы массового обслуживания (**СМО**) с одним обслуживающим прибором, в которой отсутствуют места для ожидания. Если считать, что длины интервалов между двумя последовательными моментами прихода требований $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ и их времена обслуживания $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ суть независимые последовательности независимых, показательно распределенных случайных величин для первой - с параметром 1 , а для второй - с параметром m , то $\{x_i(w), t \geq 0\}$, где $x_i(w)$ означает число требований в системе в момент времени t есть процесс рождения и гибели с параметрами 1 и m .

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Во многих случаях получение решения системы (3) не только технически трудно, но и не всегда обязательно для решения интересующей нас задачи. Иногда достаточно знать лишь некоторые из моментов случайного процесса $\{x_i(w), t \geq 0\}$.

Так, например, если нас интересует математическое ожидание $m(t) = Mx_i(w)$ в предположении его существования, то поступим следующим образом :

Умножим j -ое уравнение в (3) на j и просуммируем по j . Получим обыкновенное дифференциальное уравнение для :

$$m_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot P_{ij}(t)$$

с начальным условием $m_i(0) = i$, $i \in N_0$, тогда, очевидно:

$$m(t) = \sum_i m_i(t) \cdot P\{x_0(w) = i\}.$$

Задачи и упражнения

1. **Линейные процессы рождения и гибели.** Это процессы, для которых

$l_i = il + a$, $m_i = im + b$ для $i \in N_0$, $l_0 = a$, $m_0 = 0$ где $l, m > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Доказать, что условное среднее линейного процесса при $b = 0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению :

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = a + (1 - m) \cdot m_i(t) \text{ с начальным условием } m_i(0) = i, \text{ найти :}$$

$m_i(t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_i(t)$.

2. Рассмотрим СМО с одним обслуживающим прибором, неограниченной очередью и естественным порядком обслуживания. Последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ - те же, что и в замечании. Тогда $\{x_i(w), t \geq 0\}$ - процесс рождения и гибели с $l_i = l$, $m_i = m$. Найти $m_i(t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_i(t)$.

3. Для СМО с бесконечным числом обслуживающих приборов, т.е. для процесса с $l_i = l$, $m_i = im$, $i \in N_0$,

найти $m_i(t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} m_i(t)$

4. Найти дифференциальные уравнения процесса типа Юла с переходами только из E_n в E_{n-1} . Найти распределение $P_n(t)$, его математическое ожидание и дисперсию, предполагая, что исходным состоянием является состояние E_i .

5. В автопарк, рассчитанный на N мест, прибывает пуассоновский поток машин с интенсивностью l до тех пор, пока имеются свободные места. Найти дифференциальные уравнения для вероятностей $P_n(t)$ того, что ровно n мест заняты.

4. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Определение 1 Будем говорить, что процесс рождения и гибели $\{x_t(w), t \geq 0\}$ имеет **стационарное распределение** $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$, если пределы:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_{ij}(t) = P_j$$

существуют, не зависят от i и удовлетворяют условиям :

- $P_j \geq 0$, $j \in N_0$;

- $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$.

Имеет место следующее утверждение, оправдывающее название "**стационарное распределение**":

Теорема Пусть процесс $\{x_t(w), t \geq 0\}$ имеет стационарное распределение $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$. Если это распределение вероятностей взять в качестве начального распределения $P_j = P\{x_0(w) = j\}$, $j \in N_0$, то безусловное распределение вероятностей значений процесса не зависит от времени и

$$P\{x_t(w)=j\} = P_j = P\{x_0(w)=j\}, \quad j \in N_0, \quad t \geq 0.$$

Стационарное распределение в предположении, что оно существует, можно найти, переходя в (4) к пределу при $t \rightarrow +\infty$. Получим систему линейных уравнений :

$$\begin{cases} 0 = -I_0 P_0 + m_1 P_1 \\ \dots \\ 0 = I_{j-1} P_{j-1} - (I_j + m_j) P_j + m_{j+1} P_{j+1}, \quad j \in N \end{cases} \quad (5)$$

Решение (5) имеет вид $P_j = p_j \cdot P_0$, где $p_0 = 1$, $p_j = \frac{I_0 I_1 \dots I_{j-1}}{m_1 m_2 \dots m_j}$ для $j \in N$

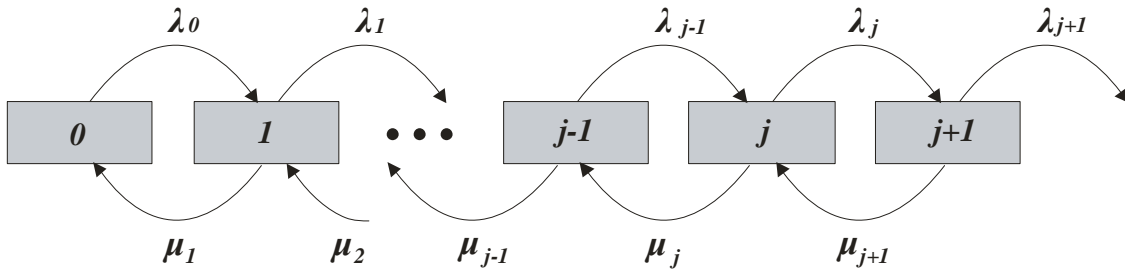
и

$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k \right)^{-1}$ - из условия нормировки. А так как мы предположили существование стационарного распределения, то необходимым условием существования стационарного распределения является сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k.$$

Для составления системы уравнений (5) можно воспользоваться следующим мнемоническим правилом.

Сначала построим граф системы, изменение состояний которой во времени описывается процессом рождения и гибели $\{x_t(w), t \geq 0\}$.



В уравнении системы (5), соответствующем состоянию j , слева - "0", а справа - алгебраическая сумма (со знаком "+" слагаемые, соответствующие входящим в состояние j стрелкам - произведение параметра на вероятность того состояния, из которого стрелка выходит, со знаком "-" - аналогично строящиеся слагаемые, соответствующие выходящим стрелкам).

Задачи и упражнения

1. Доказать, что стационарное распределение СМО, описанной в задаче 2 пункта 3, есть геометрическое распределение с параметром $\frac{1}{m}$, ($1 < m$)

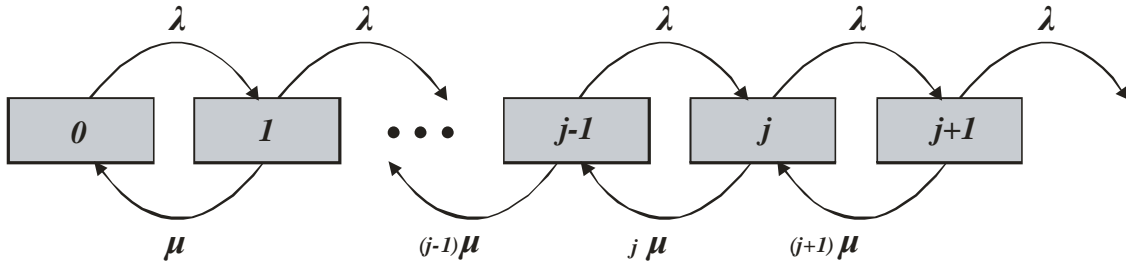
Предполагая, что система работает в стационарном режиме, т.е.:

$$P_j(t) = P\{x_t(w) = j\} = P_j, \text{ для } j \in N_0,$$

найти следующие характеристики занятости (для произвольного момента времени) :

- 1) среднее число требований в системе;
- 2) среднее число требований в очереди;
- 3) вероятность занятости прибора.

2. Рассмотрим СМО с бесконечным числом обслуживающих приборов, граф которой

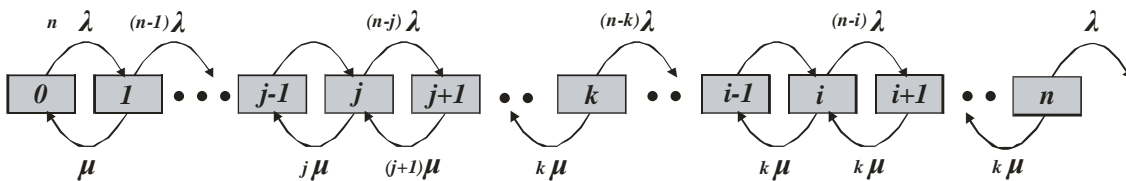


Составить систему для стационарного распределения и решить ее.

3. Доказать, что для линейных процессов рождения и гибели, для которых $a > 0$, $b = 0$ при $1 < m$ стационарное распределение имеет вид :

$$P_j = \left(\frac{1}{m}\right)^j \cdot \frac{1}{j!} \cdot \frac{a}{I} \cdot \left(\frac{a}{I} + 1\right) \dots \left(\frac{a}{I} + j - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{a}{I}}, \quad j \in N_0.$$

4. Рассмотрим систему, которую условно назовем "*n автоматов, к ремонтных площадок (наладчиков)*". Это пример замкнутой СМО. Граф такой системы имеет вид:



Составить систему для стационарного распределения и решить ее. Найти среднее число поломанных автоматов, среднее число простаивающих наладчиков в стационарном режиме.

5. **Задача о телефонных линиях.** Предположим, что имеется бесконечное число телефонных линий и что вероятность окончания разговора в течение времени $(t, t + \Delta t)$ равна $m\Delta t$ плюс слагаемые, которыми при $\Delta t \rightarrow 0$ можно пренебречь. Поступающие вызовы образуют нагрузку пуассоновского типа с параметром 1 . Система находится в состоянии E_n , если заня-

то n линий. Выбирая в качестве параметров системы $l_n = 1$, $m_n = nm$, составить дифференциальные уравнения системы, найти стационарное распределение, а также найти математическое ожидание, используя систему дифференциальных уравнений и его предел при $t \rightarrow \infty$.

б. Решить предыдущую задачу, если число линий конечно и равно m . Если все линии заняты, то каждый новый вызов становится в очередь и ожидает, пока освободится какая-нибудь линия. Это значит, что все линии имеют общую очередь. Система находится в состоянии E_n , если n - общее количество лиц, которые обслуживаются или ожидают обслуживания. Найти предельное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 400 с.
2. Ширяев А.Н. Вероятность - 2 / А.Н. Ширяев. - М. : МЦНМО, 2004. - 408 с.
3. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. - М. : Наука, 1975. - 320 с.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| 1. Марковские процессы с дискретным множеством состояний и непрерывным временем | 3 |
| 2. Процессы рождения и гибели | 5 |
| 3. Дифференциальные уравнения для моментов процессов рождения и гибели | 9 |
| 4. Стационарное распределение процессов рождения и гибели | 10 |

Составители: Михайлова Ирина Витальевна
Баркова Лариса Николаевна

Редактор Тихомирова О.А.

