Е.И. Тимошенко
М.С. Соппа

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

НОВОСИБИРСК 2009

УДК 519.2
ББК 22.172
Т417

Тимошенко Е.И.
Задачи и упражнения по теории вероятностей : учеб. пособие / Е. И. Тимошенко, М. С. Соппа ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин).– Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2009. – 67 с.

ISBN 978-5-7795-0395-2

Учебное пособие предназначено для использования в учебном процессе студентами всех специальностей и форм обучения при изучении теории вероятностей. Эта дисциплина является неотъемлемой частью общей математической подготовки в соответствии с требованиями, отраженными в ГОС. Данное пособие обеспечивает указанный курс упражнениями и задачами.

Сборник состоит из десяти разделов, в каждом из которых содержатся задачи, рекомендованные для решения как на практических занятиях и семинарах, так и во время самостоятельной работы студентов.

Печатается по решению издательско-библиотечного совета
НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:
– Ю.Е. Воскобойников, д-р физ.-мат. наук, профессор (НГАСУ (Сибстрин));
– С.М. Зеркаль, д-р техн. наук, профессор, вед. науч. сотр. (Институт геологии и геофизики СО РАН)

ISBN 978-5-7795-0377-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. КОМБИНАТОРИКА

1.1. Сколько существует различных способов для размещения трёх различных шаров по четырём ящикам?

Ответ: $n = 64$.

1.2. Сколько существует способов для разбиения генеральной совокупности из n элементов на m упорядоченных подмножеств, из которых первое содержит r_1 элементов, второе – r_2 и т.д. ($r_1+r_2+\ldots+r_m=n$)? Внутри подмножеств порядок не существенен.

Ответ: $\dfrac{n!}{r_1!r_2!...r_m!}$.

1.3. Каждая кость домино помечена двумя числами. Кости симметричны, так что числа в парах не упорядочены. Сколько различных костей можно образовать, используя числа 1, 2, …, n?

Ответ: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.4. В турнире по круговой системе приняли участие n шахматистов. Каждые 2 шахматиста встретились 1 раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

Ответ: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.5. Сколько существует семизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево, а произведение первой и шестой цифр равно 8?

Ответ: 4000.

1.6. Сколько существует четырёхзначных номеров автомобилей, имеющих все разные цифры, притом первая и последняя цифры должны в сумме давать 10?

Ответ: 720.

1.7. Сколько трёхзначных чётных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

Ответ: 168 .

1.8. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7?

1.9. Сколько существует двузначных чисел, у которых обе цифры чётные?

Ответ: 16 .

1.10. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются справа налево и слева направо?

Ответ: 900 .

1.11. Сколько существует шестизначных чисел, которые делятся на 5?

Ответ: 180000 .

1.12. В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 18 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, если одна команда может получить только одну медаль?

Ответ: 4896 .

1.13. Сколько всего семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

Ответ: 604800 .

1.14. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечётные?

Ответ: 20 .

1.15. Сколько всего шестизначных четных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, если в каждом из этих чисел ни одна не повторяется?

Ответ: 5040 .

1.16. Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

1.17. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладётся только одно письмо?

1.18. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из пяти имеющихся?

Ответ: $n = 10$.

1.19. 12 человек играют в городки. Сколькими способами они могут набрать команду из 4 человек на соревнование?

Ответ: $n = 495$.

1.20. В выпуклом семиугольнике проведены всевозможные диагонали, при этом никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения указанных диагоналей?

Ответ: $n = 35$.

1.21. В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 16 команд, при этом две любые команды играют между собой только один матч. Сколько всего календарных игр.

Ответ: $n = 120$.

1.22. Дано 5 различных чисел: α, β, γ, λ, μ. Сколько можно составить всевозможных произведений из этих чисел, состоящих из:
а) двух различных множителей;
б) трёх различных множителей;
в) четырех различных множителей;
г) пяти различных множителей?

Ответ: $а)\,10;\ б)\,10;\ в)\,5;\ г)\,1$.

1.23. Сколькими способами можно рассадить на скамейке пять человек?

Ответ: $n = 120$.

1.24. Сколькими способами можно составить список из семи учеников?

1.25. Упростить выражение

$$B = \frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!}\right).$$

1.26. Упростить выражение

$$D = \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!3!},$$ m – целое число, не меньше 1.

Ответ: $D = 20$.

1.27. Решить уравнение

$$\frac{m! - (m-1)!}{(m+1)!} = \frac{1}{6},$$ где m – целое число, не меньше 1.

Ответ: $m_1 = 2,\ m_2 = 3$.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

2.1. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

2.2. В урне a белых и b черных шаров ($a \geq 1$). Из урны вынули наугад один шар и отложили в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

Ответ: $P=(a-1)/(a+b-1)$.

2.3. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

Ответ: $P=a/(a+b)$.

2.4. Из урны, в которой a белых шаров и b черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

Ответ: $P=a/(a+b)$.

2.5. В урне a белых и b черных шаров ($a > 1$). Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что они будут белыми.

Ответ: $P=a(a-1)/((a+b)(a+b-1))$.

2.6. В партии, состоящей из k изделий, имеется l дефектных. Из партии для контроля выбирают r изделий. Найти вероятность того, что из них ровно s изделий будут дефектными ($r \leq k, s \leq l, k-l \geq r-s$).

Ответ: $P=\tilde{N}_l^s C_{k-l}^{r-s} / C_k^r$.

2.7. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий:

A = {появление четного числа очков};
B = {появление не менее 5 очков};
C = {появление не более 5 очков}.
Ответ: $P(A) \approx 0,5$; $P(B) \approx 0,33$; $P(C) \approx 0,83$.

2.8. Одновременно бросают две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:
A = {сумма выпавших очков равна 8};
B = {произведение выпавших очков равно 8};
C = {сумма выпавших очков больше, чем их произведение}.
Ответ: $P(A) \approx 0,14$; $P(B) \approx 0,06$; $P(C) \approx 0,31$.

2.9. Из урны, содержащей n пронумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: $1, 2, ..., n$.
Ответ: $P=1/n!$.

2.10. Та же урна, что и в предыдущей задаче, но каждый шар после извлечения вкладывается обратно и перемешивается с другими, а его номер записывается. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: $1, 2, ..., n$.
Ответ: $P=1/n^n$.

2.11. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и выкладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 07 (семь), 14 (четырнадцать) и т.п. Найти вероятность того, что число будет четным.
Ответ: $P \approx 0,56$.

2.12. На полке в случайном порядке расставлены n книг, среди которых находится двухтомник. Найти вероятность того, что оба тома расположены рядом.
Ответ: $P=2/n$.

2.13. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ наугад выбираются два числа. Пусть k – целое, $1 < k < n$. Какова вероятность, что одно из чисел меньше, а другое больше, чем k?

Ответ: $P=2(k-1)(n-k)/(n(n-1))$.

2.14. Колода из 36 карт хорошо перемешана. Найти вероятность того, что четыре туза лежат сверху.

Ответ: $P \approx 0,000017$.

2.15. Брошено десять монет. Какова вероятность, что первая и вторая выпадут гербом вверх? Какова вероятность, что они выпадут одной стороной?

Ответ: $P_1 = 0,25$; $P_2 = 0,5$.

2.16. Какова вероятность, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе состоит из одинаковых цифр?

Ответ: $P=0,001$.

2.17. Колода из 36 карт хорошо перемешана. Найти вероятность события A:

A = {четыре туза расположены рядом}.

Ответ: $P(A) \approx 0,00056$.

2.18. В лифт вошли 5 человек. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго по девятый. Какова вероятность, что они выйдут на разных этажах? Какова вероятность, что все пять человек выйдут на одном этаже?

Ответ: $P_1 \approx 0,21$; $P_2 \approx 0,00024$.

2.19. Какова вероятность, что на четырехзначном номере случайно взятого автомобиля в большом городе все цифры разные?

Ответ: $P \approx 0,5$.

2.20. Подбрасываются три игральные кости. Какова вероят-

ность, что на них выпадет одинаковое число очков? Какова вероятность, что все они выпадут разными гранями?
Ответ: $P_1 \approx 0{,}028$; $P_2 \approx 0{,}56$.

2.21. Бросаются четыре игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпадет одинаковое число очков.
Ответ: $P \approx 0{,}0046$.

2.22. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность того, что число одинаково читается как слева направо, так и справа налево (например, 13531)?
Ответ: P=0,01.

2.23. Из ящика, содержащего три билета с номерами 1, 2, 3, наугад вынимают по одному все билеты. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным.
Ответ: $P \approx 0{,}67$.

2.24. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность того, что: а) число кратно пяти; б) число состоит из нечетных цифр?
Ответ: $P_1 = 0{,}2$; $P_2 \approx 0{,}035$.

2.25. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, 3, случайно выбирается одна. Найти вероятность того, что она начинается с нуля.
Ответ: P=0,25.

2.26. Из совокупности чисел 1, 2, …, 50 извлекаются одно за другим без возвращения два числа. Какова вероятность, что второе число больше первого?
Ответ: P=0,5.

2.27. В записанном телефонном номере три последние цифры стерлись. Найти вероятность, что стерлись различные

цифры, отличные от 1, 3, 5.
Ответ: $P=0,21$.

2.28. На полке в случайном порядке расставлены 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).
Ответ: $P \approx 0,17$.

2.29. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных цифр нет одинаковых.
Ответ: $P=0,72$.

2.30. Из множества чисел 1, 2, …, 30 наугад без возвращения выбирают три числа. Какова вероятность, что хотя бы одно из них больше 10?
Ответ: $P \approx 0,97$.

2.31. В группе 15 юношей и 10 девушек. Наугад выбирают 7 человек. Какова вероятность, что среди них есть один юноша?
Ответ: $P \approx 0,0066$.

2.32. Из колоды в 36 карт наугад извлекают 9 карт. Какова вероятность, что среди них ровно два туза?
Ответ: $P \approx 0,21$.

2.33. В колоде 52 карты. Из нее случайным образом вынимают две карты. Найти вероятность того, что выбранные карты составляют последовательную пару одной масти (например, дама и валет, девятка и восьмерка).
Ответ: $P \approx 0,036$.

2.34. Случайным образом из телефонной книги выбирают два номера. Какова вероятность того, что числа в последнем разряде каждого номера будут: а) различными; б) одина-

ковыми?
<u>Ответ:</u> $P_1 = 0,9$; $P_2 = 0,1$.

2.35. В колоде 52 карты. Из нее случайно выбирают 4 карты. Найти вероятность того, что две из них – короли.
<u>Ответ:</u> $P \approx 0,025$.

2.36. N друзей садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что два фиксированных лица A и B сядут рядом, причем B слева от A.
<u>Ответ:</u> $P=1/(N-1)$.

2.37. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?
<u>Ответ:</u> $P \approx 0,69$.

2.38. В урне находятся 16 шаров, помеченные номерами 1, 2, 3, …, 16. Наудачу извлечены 5 шаров (без возвращения). Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров окажутся шары с номерами 1 и 2. Найти также вероятность того, что среди извлеченных нет шаров с номерами 1 и 2.
<u>Ответ:</u> $P_1 \approx 0,083$; $P_2 \approx 0,46$.

2.39. Колода из 36 карт хорошо перемешана. Найти вероятность того, что места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7.
<u>Ответ:</u> $P \approx 0,00025$.

2.40. Найти вероятность того, что дни рождения 10 человек придутся на разные месяцы года.
<u>Ответ:</u> $P \approx 0,0039$.

2.41. Из урны, содержащей n белых и m черных шаров $(n \geq 2, m \geq 2)$, один за другим извлекают четыре шара (выбор без возвращения). Какова вероятность, что среди этих шаров половина белых?

Ответ: $P=\tilde{N}_{\grave{o}}^{2} C_n^2 / C_{m+n}^4$.

2.42. В конверте среди 25 карточек находится разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 6 карточек. Какова вероятность того, что среди них окажется нужная?
Ответ: P=0,24.

2.43. Каждая из n палок разламывается на две части – длинную и короткую. Полученные $2n$ обломков объединяются в n пар, каждая из которых образует новую палку. Найти вероятность того, что все длинные палки соединены с короткими.
Ответ: $P=n!/(2n-1)!!$.

2.44. Какова вероятность, что два случайно выбранных человека родились в один и тот же день недели?
Ответ: $P \approx 0{,}14$.

2.45. Из урны, содержащей 5 белых и 3 чёрных шара, с возвращением извлекают два шара. Какова вероятность, что среди них есть хотя бы один белый?
Ответ: $P \approx 0{,}86$.

2.46. Какова вероятность, что, случайно расположив карточки с буквами «Т», «Е», «О», «Р», «И», «Я», мы получим слово «ТЕОРИЯ»?
Ответ: $P \approx 0{,}0014$.

2.47. Числа 1, 2, …, n расположены в случайном порядке. Найти вероятность того, что: а) 1 и 2; б) 1, 2 и 3 расположены рядом в указанном порядке.

Ответ: $P_1 = 1/n$; $P_2 = 1/(n(n-1))$.

2.48. Игрок A бросает шесть игральных костей и выигрывает, если выпадет хотя бы одна единица. Игрок $Б$ бросает двенадцать костей и выигрывает, если выпадут хотя бы две единицы. У кого больше вероятность выиграть?
Ответ: у игрока A.

2.49. Из шести карточек с буквами «Л», «И», «Т», «Е», «Р», «А» выбирают наугад в определённом порядке четыре. Найти вероятность того, что при этом получится слово «ТИРЕ».
Ответ: $P \approx 0{,}0028$.

2.50. Из ящика, содержащего 10 зелёных и 20 чёрных шаров, случайно, без возвращения выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что число чёрных шаров превышает число зелёных на 2.
Ответ: $P \approx 0{,}022$.

2.51. Какова вероятность, что взятое наугад пятизначное число начинается и заканчивается одной и той же цифрой?
Ответ: $P = 0{,}1$.

2.52. Какова вероятность, что взятое наугад четырёхзначное число имеет различные первую и вторую цифры?
Ответ: $P = 0{,}9$.

2.53. Подбрасывается 10 монет. Какова вероятность, что хотя бы на одной из них выпадет герб?
Ответ: $P \approx 0{,}999$.

2.54. Наугад выбирают шестизначное число. Какова вероятность, что оно оканчивается цифрой «5»?
Ответ: $P = 0{,}1$.

2.55. Из колоды в 52 карты извлекают 5 карт (выбор без возвращения). Какова вероятность, что среди них есть хотя бы один туз?

<u>Ответ:</u> $P \approx 0{,}34$.

2.56. На складе имеется 24 мяча двух цветов, причём красных на 4 больше, чем черных. Наугад выбирают 5 мячей. Какова вероятность того, что: а) среди них есть хотя бы один черный; б) среди них красных на 3 больше, чем чёрных?

<u>Ответ:</u> $P_1 \approx 0{,}95$; $P_2 \approx 0{,}24$.

2.57. В городе m улиц с запада на восток и n – с юга на север. Пункт A находится в юго-западном углу города, а пункт B – в северо-восточном. Один автомобилист проехал через город из A в B. Какова вероятность, что второй автомобилист, следуя из A в B кратчайшим маршрутом и ничего не зная о первом, проедет тем же маршрутом?

<u>Ответ:</u> $P = 1 / C_{m+n}^{n}$.

2.58. В лифт n-этажного дома ($n \geq 4$) вошли m человек, каждый из которых может выйти из лифта на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность, что группа из m_1 человек выйдет на одном этаже, группа из m_2 – на другом, а оставшиеся m_3 человек – на каком-то ещё этаже? (m_1, m_2, $m_3 \geq 1$)?

<u>Ответ:</u>

$$P = \tilde{N}_{\grave{o}}^{m_1} C_{m-m_1}^{m_2} (n-1)(n-2)(n-3)/(n-1)^m.$$

2.59. Играя в кости, необходимо для выигрыша получить при бросании трёх игральных костей сумму очков, превосходящую 16. Найти вероятность выигрыша.

<u>Ответ:</u> $P \approx 0{,}019$.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

3.1. На отрезке длины 20 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадает также и на меньший.

3.2. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $L/3$.
Ответ: $P \approx 0{,}33$.

3.3. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наугад брошенная в большой круг, попадет также и в малый.
Ответ: $P = r^2 / R^2$.

3.4. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятность следующего события: расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит x.
Ответ: $P=\pi x^2$ *при* $x<0{,}5$; $P=1$ *при* $x>1/\sqrt{2}$;
$P=\pi x^2 - 4S$ *при* $0{,}5 < x < 1/\sqrt{2}$.

3.5. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превосходит 10. Найти вероятность того, что $x + y \le 10$, а $y / x \le 2$.
Ответ: $P \approx 0{,}33$.

3.6. На паркет, составленный из правильных шестиугольников со стороной a, бросают монету радиуса r. Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границы шестиугольника.
Ответ: $P = (1 - 2r/(\sqrt{3}\,a))^2$.

3.7. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной a, случайно бросают монету радиуса r. Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границу ни одного из треугольников.
Ответ: $P = 4(\sqrt{3}/2 - 3r/a)^2/3$.

3.8. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость брошена наудачу монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.
Ответ: $P = 1 - r/a$.

3.9. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата.
Ответ: $P = (1 - 2r/a)^2$.

3.10. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точки.
Ответ: P=0,5.

3.11. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков длиной не более L можно построить треугольник. Указание: ввести в рассмотрение пространственную систему координат.
Ответ: P=0,5.

3.12. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y/x не больше двух.
Ответ: $P \approx 0{,}38$.

3.13. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – один час, а второго – два часа.

Ответ: $P \approx 0{,}12$.

3.14. Наугад взяты два отрицательных числа x и y, каждое из которых по модулю не превышает двух. Найти вероятность того, что частное y/x не больше двух.

Ответ: $P=0{,}75$.

3.15. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не больше единицы. Найти вероятность того, что x и y находятся в круге радиуса 1 с центром в начале координат, а частное y/x не меньше единицы.

Ответ: $P \approx 0{,}39$.

3.16. Найти вероятность того, что расстояние между двумя случайно выбранными точками на отрезке будет меньше, чем половина этого отрезка.

Ответ: $P=0{,}75$.

4. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1. Испытуемому предъявляются два теста. Вероятность решения тестов соответственно равна 0,7 и 0,8. Определить вероятность того, что хотя бы один тест будет решен.
Ответ: P=0,94.

4.2. В урне 6 белых и 8 черных шаров. Взято два шара без возвращения. Какова вероятность, что они одного цвета?
Ответ: $P \approx 0{,}47$.

4.3. В партии среди 15 изделий 10 первого и 5 второго сорта. Наудачу одно за другим без возвращения в партию берутся 3 изделия. Найти вероятность того, что хотя бы одно изделие окажется второго сорта.
Ответ: $P \approx 0{,}74$.

4.4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент не знает хотя бы один из трех предложенных ему вопросов.
Ответ: $P \approx 0{,}52$.

4.5. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.
Ответ: $P=1 - (1-p)^n$.

4.6. Из полной колоды (52 карты) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все они будут разных мастей. Найти также вероятность того, что все эти карты будут одной масти.
Ответ: $P \approx 0{,}011$.

4.7. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что корреспондент примет первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3 и третий – 0,4. По условиям приема события, состоящие в том, что i -й по счету вызов ($i = 1, 2, 3$) услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит радиста.
Ответ: $P \approx 0{,}66$.

4.8. Из колоды в 36 карт вынимаются одна за другой без возвращения три карты. Вычислить вероятность того, что среди выбранных карт будет хотя бы один туз.
Ответ: $P \approx 0{,}31$.

4.9. Брошены две игральные кости. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.
Ответ: $P \approx 0{,}14$.

4.10. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии первое устройство сработает, равна 0,8, для второго и третьего устройства эти вероятности соответственно равны 0,9 и 0,95. Найти вероятность того, что при аварии сработают только два устройства.
Ответ: $P \approx 0{,}28$.

4.11. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из первого, второго и третьего орудий соответственно равны 0,9; 0,8; 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадет в цель.
Ответ: $P \approx 0{,}12$.

4.12. Из полной колоды (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Рассматривают события:

A = {среди вынутых карт хотя бы одна бубновая};
B = { среди вынутых карт хотя бы одна червовая }.
Найти вероятность события $C = A+B$.
Ответ: $P \approx 0{,}95$.

4.13. Приемник смонтирован на 9 полупроводниках, для которых вероятность брака равна 0,05. Найти вероятность того, что радиоприемник будет неработоспособным, если он отказывает при наличии в нем не менее одного бракованного полупроводника.
Ответ: $P \approx 0{,}37$.

4.14. Из множества чисел $\{1, 2, ..., N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадает в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.
Ответ: $P \approx 0{,}33$.

4.15. Десять осветительных лампочек для елки включены в цепь последовательно. Вероятность для любой лампочки перегореть при повышении напряжения в сети равна 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при повышении напряжения в сети.
Ответ: $P \approx 0{,}65$.

4.16. В урне 2 белых и 4 черных шара. Два игрока поочередно извлекают шары (без возвращения). Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Вычислить вероятность выигрыша для каждого участника.
Ответ: $P_1 = 0{,}6$; $P_2 = 0{,}4$.

4.17. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, без возвращения один за другим извлекают шары до появления черного. Найти вероятность того, что придется производить 4 извлечения.

Ответ: $P \approx 0{,}095$.

4.18. Из урны, содержащей a белых и b ($b \geq 4$) черных шаров, один за другим (без возвращения) извлекают шары. Какова вероятность, что белый шар появится в первый раз только в пятом испытании?

4.19. На отрезок, разбитый на n равных частей, брошено n точек. Найти вероятность того, что на каждую часть попадет ровно одна точка.

Ответ: $P=n!/n^n$.

4.20. В урне a белых, b черных, c красных шаров при условии, что $(a+b+c>2)$. Наугад извлекают 3 шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

Ответ: $P=(a(a\text{-}1)(a\text{-}2)+b(b\text{-}1)(b\text{-}2)+$
$+c(c\text{-}1)(c\text{-}2))/((a+b+c)(a+b+c\text{-}1)(a+b+c\text{-}2))$.

4.21. Два человека бросают поочередно две игральные кости. Выигрывает тот, кто первый при одном бросании набирает 8 очков. Найти вероятность выигрыша для начинающего игрока.

Ответ: $P \approx 0{,}54$.

4.22. Из большой связки галстуков, в которой зеленый, красный и желтый цвета находятся в пропорции 5:3:2, трое мужчин случайным образом выбирают по галстуку. Какова вероятность, что они выберут галстуки одинакового цвета.

Ответ: $P = 0{,}16$.

4.23. В лотерее имеется 20 билетов. 8 из них помечены словом “выигрыш”, остальные пустые. Найти вероятность вытащить “выигрыш” (по крайней мере, один), если: а) покупают один билет; б) покупают два билета; в) покупают три билета.

<u>Ответ:</u> $P(A) \approx 0{,}4$; $P(B) \approx 0{,}65$; $P(C) \approx 0{,}81$.

4.24. Из ящика, содержащего 8 зеленых и 4 синих шара, случайно (без возвращения) выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что число зеленых шаров превосходит в выборке число синих больше, чем на два.

<u>Ответ:</u> $P \approx 0{,}27$.

4.25. Производится случайный выбор трех цифр из множества $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ с возвращением. Найти вероятность того, что: а) будут 2 повторения (т.е. все цифры будут одинаковыми); б) будет 1 повторение (т.е. 2 цифры будут одинаковыми).

<u>Ответ:</u> $P(A) \approx 0{,}01$; $P(B) \approx 0{,}27$.

4.26. Ребенок играет с буквами разрезной азбуки «А», «А», «А», «К», «Т». Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «АТАКА»?

<u>Ответ:</u> $P = 0{,}05$.

4.27. В записанном телефонном номере три последние цифры стерлись. Какова вероятность того, что точно две из стершихся цифр совпадают?

<u>Ответ:</u> $P=0{,}27$.

4.28. Студент может уехать в институт автобусом, который ходит каждые 20 минут, или троллейбусом, который ходит каждые 10 минут. Какова вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших пяти минут?

<u>Ответ:</u> $P \approx 0{,}63$.

4.29. Только один из n ключей подходит к данной двери. Найти вероятность того, что придется опробовать ровно k ключей $(k \le n)$ для открытия данной двери.

Ответ: $P = 1/n$.

4.30. В урне 2 белых, 3 черных, 5 красных шаров. Наугад из урны извлекают три шара без возвращения. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров хотя бы два будут разного цвета.

Ответ: $P \approx 0{,}91$.

4.31. Квадрат $ABCD$ разбит на десять частей одинаковой площади. Обозначим одну из них $A_1B_1C_1D_1$. В квадрате $ABCD$ выбраны четыре точки. Какова вероятность, что они попадут в прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$?

Ответ: $P = 0{,}0001$.

4.32. В круге радиуса R находится круг радиуса r. В большом круге выбирают две точки. Какова вероятность, что они попадут в маленький круг?

Ответ: $P = r^4 / R^4$.

4.33. В урне a белых и b чёрных шаров. Из неё достают три шара с возвращением. Какова вероятность того, что среди них два белых и один чёрный шар?

Ответ: $P = 3a^2b/(a+b)^3$.

4.34. На связке 5 ключей, из которых лишь один подходит к замку. Человек без возвращения вытягивает наугад ключи и пытается открыть дверь. Какова вероятность того, что дверь будет открыта с третьей попытки?

Ответ: $P = 0{,}2$.

4.35. Вероятность точно одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели первым из орудий, если известно, что для второго эта вероятность равна 0,8.

Ответ: $P = 0,7$.

4.36. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо. Вероятности отказа элементов равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность того, что в цепи будет разрыв.

Ответ: $P = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$.

4.37. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Внутри треугольника ABC выбирают две точки. Какова вероятность, что они попадут в треугольник ABM?

Ответ: $P = 0,25$.

4.38. Прибор имеет пять независимо работающих сигнализаторов, срабатывающих при аварии с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Какова вероятность, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор?

Ответ: $P = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3))(1 - p_4)(1 - p_5)$.

4.39. Из урны, содержащей пять белых и четыре чёрных шара, извлекают без возвращения три шара. Какова вероятность того, что первый и третий шары будут чёрными?

Ответ: $P \approx 0,17$.

4.40. Круг разделён на три непересекающиеся части, площади которых равны S_1, S_2, S_3. В круге наугад выбирают шесть точек. Какова вероятность, что в каждую часть попадёт ровно две точки?

Ответ: $P = 90 S_1^2 S_2^2 S_3^2 / (S_1 + S_2 + S_3)^6$.

5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

5.1. В первой урне a_1 белых и b_1 черных шаров; во второй – a_2 белых и b_2 черных, в третьей – a_3 белых и b_3 черных. Из второй урны переложили в третью один шар. После этого из третьей урны извлекли один шар. Какова вероятность, что он белый?

Ответ: $P = (a_2\,(a_3 +1) + b_2\,a_3)/((a_2 +b_2)(b_3 + a_3 +1))$.

5.2. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой – a белых и b черных; во второй – c белых и d черных; в третьей – только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Ответ: $P=(a/(a+b)+c/(c+d)+1)/3$.

5.3. В первой урне находятся 6 белых и 4 черных шара; во второй – 2 белых и 7 черных. Из первой урны переложили во вторую два шара, а затем из второй урны извлекли два шара. Какова вероятность, что из второй урны извлечены белые шары?

Ответ: $P \approx 0{,}068$.

5.4. В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 1 черный и 5 белых. Из каждой урны удалили по одному шару, а оставшиеся шары высыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

Ответ: $P \approx 0{,}36$.

5.5. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность брака для первого станка 0,02, для второго – 0,03, для третьего – 0,04. Первый станок производит 100, второй – 200, третий – 300 деталей, которые складываются в один ящик. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь будет бракованной.

Ответ: $P \approx 0{,}033$.

5.6. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3 % брака, второй – 0,2 %, третий – 0,4 %. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго – 2000, а с третьего – 2500 деталей.

Ответ: $P \approx 0{,}031$.

5.7. Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 45 % общего количества ламп, второй – 40 %, третий – 15 %. Продукция первого завода содержит 79 % стандартных ламп, второго – 80 %, третьего – 81 %. В магазин поступает продукция с трех заводов. Какова вероятность, что купленная в магазине лампа окажется стандартной?

Ответ: $P \approx 0{,}8$.

5.8. Литье поступает из двух цехов: 70 % из первого, 30 % из второго. При этом материал первого цеха имеет 10 % брака, второго – 20 %. Найти вероятность того, что взятая наугад болванка будет без дефектов.

Ответ: P=0,87.

5.9. Вероятность того, что мост будет разрушен одной попавшей в него бомбой равна $\frac{1}{2}$, двумя – $\frac{2}{3}$, тремя – $\frac{3}{4}$. Какова вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сброшены три бомбы? Вероятность попадания в мост для каждой бомбы $\frac{4}{5}$.

Ответ: $P \approx 0{,}69$.

5.10. Имеются две урны: в первой – A белых шаров и B черных; во второй – C белых и D черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Ответ: $P=(A/(C+1)+BC)/((A+B)(C+D+1))$.

5.11. Три самолета-штурмовика ведут стрельбу по наземной мишени, ориентируясь на команду “Огонь”, подаваемую с командного пункта. Команда “Огонь” подается первому самолету в два раза чаще, чем второму и третьему по отдельности. Вероятности попадания в цель для 1-го, 2-го и 3-го самолетов равны соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что мишень окажется непораженной.

Ответ: $P \approx 0{,}23$.

5.12. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры наудачу выбираются два мяча, а после нее возвращаются обратно. Затем и для второй игры наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

Ответ: $P \approx 0{,}45$.

5.13. Из десяти студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятности и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров плохо занимался весь семестр и успел повторить только 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. По прошествии отведенного времени на подготовку экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Какова вероятность того, что вызванный сдаст экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

Ответ: $P \approx 0,76$.

5.14. В спортивной секции десять стрелков: 3 стрелка первого разряда и 7 стрелков второго. Стрелок первого разряда попадает в цель с вероятностью 0,9. Стрелок второго разряда – с вероятностью 0,7. Наугад выбирают одного стрелка. Какова вероятность, что он попадет в цель?

Ответ: $P=0,76$.

5.15. Город разбит на три района. В первом районе обучаются 50 % учеников, 10 % школ этого района – школы с математическим уклоном. Во втором районе 15 % школ с математическим уклоном, в этом районе обучаются 30 % учеников. В третьем районе 5 % школ с математическим уклоном. В городе случайно выбран ученик. Какова вероятность, что он обучается в школе с математическим уклоном?

Ответ: $P \approx 0,2$.

5.16. Площадь комнаты 20 м^2. В комнате на полу лежит ковёр, площадь которого 5 м^2. Некоторый предмет два раза падает в место комнаты, выбранное наугад. При падении на ковёр он получает трещину с вероятностью p_1, а при падении на пол – с вероятностью p_2. Какова вероятность, что на предмете появится хотя бы одна трещина?

Ответ: $P = 1 - (1 - 0,25p_1 - 0,75p_2)^2$.

5.17. Для поиска месторождения нефти на заданной территории организовано n геологоразведочных партий, каждая из

которых независимо от других обнаруживает залежь с вероятностью p. После обработки и анализа сейсмографических записей вся территория была поделена на два района. В первом районе нефть может залегать с вероятностью p_1, а во втором – с вероятностью $1-p_1$. В первый район направлено m изыскательских партий, а во второй $n - m$. Какова вероятность, что нефть будет обнаружена хотя бы одной партией?
Ответ: $P = 1 - p_1(1-p)^m - (1-p_1)(1-p)^{n-m}$.

5.18. У грибника есть два излюбленных места для сбора грибов. Обычно, обходя первое место, он находит грибы с вероятностью p_1, обходя второе место, – с вероятностью p_2. Из-за близости первого места он посещает его в два раза чаще, чем второе. Какова вероятность, что при пяти обходах места грибник найдёт грибы, если мы не знаем, какое место он выбрал?
Ответ: $P = 2\,(1-(1-p_1)^5)/3 + (1-(1-p_2)^5)/3$.

5.19. В первой урне a_1 белых и b_1 чёрных шаров. Во второй урне a_2 белых и b_2 чёрных шаров. Человек наугад выбирает урну, а затем из неё извлекает с возвращением шары. Какова вероятность, что белый шар появится впервые при пятом испытании.
Ответ: $P = ((b_1/(a_1 + b_1))^4\, a_1/(a_1 + b_1)) + (b_2/(a_2 + b_2))^4\, a_2/(a_2 + b_2))/2$.

5.20. В ящике смешаны хорошие и ржавые гвозди, причём хорошие составляют 30 %. Хороший гвоздь гнётся при забивании в доску с вероятностью 5 %, а ржавый – с вероятностью 10 %. Из ящика наугад выбирают гвоздь и вбивают в доску. Какова вероятность, что он не согнётся?
Ответ: $P \approx 0{,}92$.

5.21. У грибника есть три излюбленных места для сбора грибов. Из-за разной удаленности он посещает первое место с вероятностью 0,3, второе – с вероятностью 0,2, третье – с вероятностью 0,5. Обычно, в первом месте он находит грибы с вероятностью 0,4, во втором – с вероятностью 0,7, в третьем – с вероятностью 0,6. Какова вероятность, что грибник найдёт грибы?
Ответ: P=0,56.

5.22. Студенту необходимо взять книгу в библиотеке. Он планирует обойти одну за другой три библиотеки. В каждой из них нужная книга может присутствовать с вероятностью 0,25. Если она есть в каталоге, то с равной вероятностью может быть уже взята или стоять на полке. Найти вероятность для студента взять книгу.
Ответ: $P \approx 0,33$.

6. ФОРМУЛА БЕЙЕСА

6.1. Для участия в отборочных спортивных соревнованиях из первой группы курса выделены 4 студента, из второй – 6, из третьей – 5. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей групп попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. Какова вероятность, что это студент из второй группы?
Ответ: $P \approx 0{,}36$.

6.2. В урне лежит шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается один белый шар, после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?
Ответ: $P \approx 0{,}67$.

6.3. Вероятность для изделия некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная схема проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.
Ответ: $P \approx 0{,}998$.

6.4. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна 0,9, второго – 0,8. При испытании в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность того, что отказали оба узла.
Ответ: $P \approx 0{,}071$.

6.5. В урне лежат два шара, каждый из которых с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность, что в урне изначально было два белых шара?
Ответ: $P \approx 0{,}38$.

6.6. У рыбака есть три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1, на втором – с вероятностью p_2, на третьем – с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.
Ответ: $P = p_1q_1^2/(p_1q_1^2 + p_2q_2^2 + p_3q_3^2)$.

6.7. В первой урне 20 белых шаров, во второй – 10 белых и 10 черных, в третьей – 20 черных. Из урны, выбранной наугад, был извлечен белый шар. Вычислить вероятность, что шар вынут из первой урны.
Ответ: $P \approx 0{,}67$.

6.8. Имеется десять одинаковых на вид урн, в девяти из которых находятся по два белых и по два черных шара, а в десятой урне – пять белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых и один черный шар?
Ответ: $P \approx 0{,}16$.

6.9. Сборщик получает 45 % деталей завода № 1, 30 % – завода № 2, 25 % – завода № 3. Вероятность того, что деталь первого завода отличного качества, 0,7, для деталей второго и третьего заводов эти вероятности равны 0,8 и 0,9. Наудачу взятая сборщиком деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена заводом № 1.

Ответ: $P \approx 0{,}4$.

6.10. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Ответ: вероятнее, что стрелок стрелял из винтовки без оптического прицела.

6.11. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

Ответ: $P \approx 0{,}43$.

6.12. В специализированную больницу поступают в среднем 50 % больных с заболеванием K, 30 % – с заболеванием L, 20 % – с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

Ответ: $P \approx 0{,}45$.

6.13. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении $n_1 : n_2 : n_3$, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны p_1, p_2 и p_3. Прибор, приобретенный научно-исследовательским институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что данный прибор произведен первым заводом (марка завода на приборе отсутствует)?

Ответ: $P = n_1 p_1 / (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3)$.

6.14. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны p_1, p_2 и p_3. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?

Ответ: $P = p_1(1-p_2)p_3 / (p_1(1-p_2)p_3 + p_1 p_2(1-p_3) + (1-p_1)p_2 p_3)$.

6.15. Три пушки ведут стрельбу по танку. Команда открыть огонь подаётся первой пушке с вероятностью p_1, второй – с вероятностью p_2, третьей – с вероятностью p_3. Первая пушка поражает танк с вероятностью 0,7, вторая – с вероятностью 0,8, третья – с вероятностью 0,9. Команда была подана одной из трёх пушек, и танк был поражён. Какова вероятность, что стреляла первая пушка?

Ответ: $P = 0{,}7p_1 / (0{,}7p_1 + 0{,}8p_2 + 0{,}9p_3)$.

6.16. В трёх урнах содержится по 20 белых шаров, в четырёх – по 16 белых и 4 чёрных шара, в двух – половина белых из 20, а в одной – четверть белых из 20. Человек наугад выбирает урну и вытягивает из неё наугад три шара без возвращения. Среди них оказалось ровно 2 белых шара. Какова вероятность, что в этой урне было 16 белых и 4 чёрных шара?

Ответ: $P \approx 0{,}65$.

6.17. Производительность труда трёх печатников относится как 2:3:5. Первый печатник допускает ошибку на листе текста с вероятностью p_1, второй – с вероятностью p_2, а третий – с вероятностью p_3. Были проверены три листа, на двух обнаружены ошибки. Какова вероятность, что этот текст набирал первый печатник?

Ответ: $P = 0{,}2p_1^2q_1/(0{,}2p_1^2q_1 + 0{,}3p_2^2q_2 + 0{,}5p_3^2q_3)$.

6.18. По каналу связи может быть передана одна из трёх последовательностей букв: *AAAA, BBBB, CCCC*. Известно, что вероятность каждой из последовательностей равна соответственно 0,3; 0,4; 0,3. В результате шумов буква принимается правильно с вероятностью 0,6. Вероятность принять переданную букву за две другие равна 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что при передаче *AAAA* на приёмном устройстве получено *ABCA*.

Ответ: $P \approx 0{,}56$.

7. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

7.1. Вероятность выигрыша по облигации равна 0,25. Найти вероятность того, что некто, приобретая 8 облигаций, выиграет по 6 из них.
Ответ: $P \approx 0{,}0038$.

7.2. В мастерской 12 мастеров. Вероятность того, что мастер работает, равна 0,8. Найти вероятность того, что в заданный момент работают не менее 10 мастеров.

7.3. В магазин вошли n покупателей. Найти вероятность того, что k из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого вошедшего равна p.

7.4. Вероятность рождения мальчика равна $\frac{1}{2}$. Найти вероятность того, что в семье из 4-х детей будет один мальчик.
Ответ: $P = 0{,}25$.

7.5. Монету подбрасывают 5 раз. Какова вероятность, что герб выпадет хотя бы один раз?
Ответ: $P \approx 0{,}97$.

7.6. Отрезок АВ разделён точкой C в соотношении 2:1. На отрезке наугад отмечены три точки. Какова вероятность, что две из них попадут левее точки C, а одна – правее?
Ответ: $P \approx 0{,}44$.

7.7. Какова вероятность выиграть две партии из четырёх у равносильного спортсмена?
Ответ: $P = 0{,}375$.

7.8. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет три раза.
Ответ: $P = 0{,}3125$.

7.9. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости и монеты. Какова вероятность, что в пяти испытаниях комбинация «6» и «герб» появится ровно три раза?
Ответ: $P = \dfrac{1210}{12^5}$.

7.10. Проведены 20 независимых испытаний, каждое из которых состоит в подбрасывании трёх монет. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадут три герба.

7.11. Система противовоздушной обороны обороняет территорию от воздушного налета, в котором принимают участие N самолетов. Для поражения каждого из самолетов выделяются два истребителя-перехватчика. Каждый истребитель поражает цель независимо от другого с вероятностью p. Найти вероятность того, что в результате воздушного налета будут поражены три самолета.
Ответ: $P = C_N^3\, p^3\, (2-p)^3\, (1-p)^{2N-6}$.

7.12. На отрезок AB длины a наудачу брошены 5 точек. Найти вероятность того, что две из них будут находиться от точки A на расстоянии меньшем, а три – на расстоянии большем, чем x $(0 \le x \le a)$.
Ответ: $P = C_5^2 \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 \left(\dfrac{a-x}{a}\right)^3$.

7.13. Отрезок разделен на четыре равные части. На отрезок наудачу брошены восемь точек. Найти вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попало по две точки.
Ответ: $P = C_8^2 C_6^2 C_4^2 \cdot \dfrac{1}{4^8}$.

7.14. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Чему равна вероятность того, что, вынув наудачу (с возвращением) 9 шаров, получим белых не менее 3?

7.15. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайно выбирается одна. Найти вероятность того, что последовательность содержит $m+2$ нуля, причем 2 из них находятся на концах последовательности $(m+2 \le n)$.

<u>Ответ:</u> $P = C_{n-2}^{m} \dfrac{2^{n-m-2}}{3^n}$.

7.16. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайно выбирается одна. Найти вероятность того, что в ней ровно m_0 нулей, m_1 единиц и m_2 двоек $(m_0 + m_1 + m_2 = n)$.

<u>Ответ:</u> $P = \dfrac{C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2}}{3^n}$.

7.17. В области на плоскости, заданной неравенствами $x \ge 0$; $y \ge 0$; $x + 2y \le 2$, выбирают семь точек. Какова вероятность, что они попадут ниже прямой $y = 0{,}5$?

<u>Ответ:</u> $P = (0{,}75)^7$.

8. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

8.1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,4	0,5

.

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Ответ: $M(X)=3,9$; $D(X)=1,29$.

8.2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

.

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Ответ: $M(X)=3,1$; $D(X)=1,29$.

8.3. Брошено n монет. Пусть X – количество гербов, выпавших на них. Составить ряд распределения случайной величины X, найти $M(X), D(X)$.

8.4. Кубик подбрасывается 3 раза. Составить ряд распределения случайной величины X (количество выпавших единиц). Найти $M(X), D(X)$.

Ответ: $M(X)=0,5$; $D(X)\approx 0,42$.

8.5. Один раз брошены две игральные кости. Случайная величина S – сумма выпавших очков. Вычислить $M(S)$ и $D(S)$.

Ответ: $M(S)=7$; $D(S)\approx 5,83$.

8.6. Игральная кость подбрасывается 600 раз. X – количество выпадений грани “1”. Найдите $M(X)$ и $D(X)$.

8.7. Вероятность, что деталь стандартна, 0,9. Из партии деталей с возвращением извлекаются 10 деталей. X – количество стандартных деталей среди извлеченных. Найти ряд распределения X и $M(X)$.

8.8. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, извлекают шар и записывают его цвет. Затем возвращают шар в урну, шары перемешивают и повторяют опыт n раз. Составить ряд распределения случайной величины X – числа белых шаров, извлеченных из урны. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

8.9. Три монеты подбрасывают 800 раз. X – количество опытов, в которых выпали три герба. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

8.10. В квадрат вписан круг. В квадрате наугад выбирают 100 точек. X – количество точек, попавших в круг. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

8.11. Две монеты подбрасывают до тех пор, пока они обе не упадут гербом вверх. Составить ряд распределения случайной величины X – числа подбрасываний. Найти $M(X)$.

Ответ: $M(X) = 4$.

8.12. Производят два независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Рассматривается случайная величина X – разность между числом попаданий и промахов. Построить ряд распределения случайной величины X и найти $M(X)$.

Ответ: $M(X) = 4p - 2$.

X	–2	0	2
p	q^2	$2pq$	p^2

8.13. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, независимо друг от друга. Первый делает n_1 выстрелов, второй – n_2. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка при одном выстреле p_1, для второго – p_2. Пусть X_1 – количество попаданий в мишень первого стрелка, X_2 – второго. Вычислить $M(3X_1 - 2X_2)$ и $D(X_1 - X_2)$.

Ответ: $M(3X_1 - 2X_2) = 3n_1 p_1 - 2n_2 p_2$;
$D(X_1 - X_2) = n_1 p_1 (1 - p_1) + n_2 p_2(1 - p_2)$.

8.14. На отрезке $[a,b]$ одну за другой наудачу выбирают точки, пока одна из них не попадет на интервал (c,d), где $a < c < d < b$. Пусть X – число выбранных точек. Составить закон распределения случайной величины X и найти $M(X)$.

Ответ: $M(X) = \dfrac{b-a}{d-c}$, $P(X = n) =$

$$= \frac{(d-c)(b-d-a+c)^{n-1}}{(b-a)^n}, n = 1,2,\dots .$$

8.15. Игральная кость брошена два раза, X_1 и X_2 – числа очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события:
$A_1 = \{X_1$ делится на 2, X_2 делится на $3\}$,
$A_2 = \{X_1$ делится на 3, X_2 делится на $2\}$.
Зависимы ли события A_1 и A_2?
Ответ: события A_1 и A_2 независимы.

8.16. Случайные величины X и Y независимы и имеют следующие характеристики: $M(X) = 1$, $D(X) = 3$, $M(Y) = 2$, $D(Y) = 4$. Вычислить математическое ожидание случайной величины $U = X^2 + 2Y^2 - XY$.
Ответ: $M(U) = 18$.

8.17. Человек подбрасывает две игральные кости до тех пор, пока на них не появится в сумме 6 очков. Найти математическое ожидание числа бросаний.
Ответ: $7,2$.

8.18. Две игральные кости подбрасывают, пока на них в сумме не появится 7 очков. Составить ряд распределения случайной величины X (количество опытов). Найти $M(X)$.

Ответ: $M(X) = 6$.

8.19. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь размера 40, равна 0,4. В обувной отдел вошли трое покупателей. Пусть X – число тех покупателей, которым требуется обувь размера 40. Вычислить $P(X \geq 2)$.

Ответ: $P = 0{,}352$.

8.20. В ячейку памяти ЭВМ записывается 8-разрядное двоичное число. Значения 0 и 1 в каждом разряде появляются с равной вероятностью. Случайная величина X – число единиц в записи двоичного числа. Найти вероятность событий:

$$A = \{X = 4\}, \quad B = \{X > 4\}.$$

Ответ: $P(A) = \dfrac{C_8^4}{2^8}$, $\quad P(B) = \dfrac{C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8}{2^8}$.

8.21. В квадрат вписан круг. В квадрате наугад выбираются точки, пока первая из них не попадет в круг. X – количество опытов. Найти $M(X)$.

Ответ: $M(X) \approx 0{,}785$.

8.22. Равносильные противники A и B играют в некоторую игру, в которой нет ничьих, до первого выигрыша игрока A. X – количество сыгранных партий. Составить ряд распределения X и найти $M(X)$.

Ответ: $M(X) = 2$; $P(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

8.23. Стрелок, имеющий неограниченное количество патронов, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна p. Пусть X – число израсходованных патронов. Построить ряд распределения X. Найти математическое ожидание $M(X)$.

8.24. Из колоды, содержащей 36 карт четырех мастей, с возвращением извлекают 72 карты. Найти математическое ожидание и дисперсию числа карт червовой масти.
Ответ: $M = 18, \quad D = 13{,}5$.

8.25. Случайные величины X и Y, заданные рядами распределения

X	0	1	2
P	0,1	0,2	0,7

,

Y	5	6
P	0,4	0,6

,

независимы. Составить ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$ и найти её математическое ожидание. Нарисовать график функции распределения случайной величины X.
Ответ:

Z	5	6	7	8
p	0,04	0,14	0,4	0,42

;

$M(X) = 7{,}2$.

8.26. В урне находятся 2 белых и один черный шар. Из урны без возвращения извлекают шары, пока не появится чёрный шар. X – количество извлечённых шаров. Составить ряд распределения случайной величины X, найти её математическое ожидание. Нарисовать график функции распределения случайной величины X.
Ответ:

X	1	2	3
p	≈0,33	≈0,33	≈0,33

;

$M(X) = 2$.

8.27. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, без возвращения извлекают два шара. X – количество белых шаров, среди извлечённых. Составить ряд распределения случайной величины X и найти её математическое ожидание. Нарисовать график функции распределения случайной величины X.

Ответ:

X	0	1	2
p	0,3	0,6	0,1

;

$M(X) = 0{,}8$.

9. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

9.1. На отрезке $[a,b]$ наугад выбирают точку. X – случайная величина – координата этой точки. Построить график функции распределения случайной величины X.

9.2. Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Вычислить $P(X\ge 1)$, $M(X)$, $D(X)$.

Ответ: $P=0,75$; $M(X)\approx 1,33$; $D(X)\approx 0,22$.

9.3. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти $A, p(x), M(X), D(X)$ и вероятность того, что в пяти испытаниях случайная величина X ни разу не примет значения больше 1.

Ответ: $A=0,5$; $p(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.5, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1;\end{cases}$

$M(X)=1$; $D(X)\approx 0,33$; $P\approx 0,03$.

9.4. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax(2-x), & 0<x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$$

Найти $a, M(X), D(X)$ и вероятность того, что в четырех испытаниях точно два значения случайной величины попадут в интервал $(-0,5; 0,5)$.

Ответ: $A = 1$; $M(X) \approx 0,33$; $D(X) \approx 0,06$; $P \approx 0,21$.

9.5. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $p(x)$:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a(3x - x^2), & 0 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти константу a, вероятность $P(1 < X < 2)$ и $M(X)$.

Ответ: $A \approx 0,22$; $P \approx 0,48$; $M(X) \approx 1,5$.

9.6. Функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin(ax), & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти a, $p(x)$, $P(-\dfrac{\pi}{8} \le X \le \dfrac{\pi}{8})$.

Ответ: $a = 2$; $P = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$.

9.7. Пусть функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} Cx, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

Найти постоянную C, функцию распределения $F(x)$, $P(X > 0,5)$.

Ответ: $C=2$; $P=0,75$; $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

9.8. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}x, & x\in[0;1],\\ 2-x, & x\in[1;2],\\ 0, & x\notin[0;2].\end{cases}$$

Найти $F(x)$, $M(X^3)$, $P(0,5\le X\le 1,5)$.

Ответ:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{4x-x^2-2}{2}, & 1\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$M(X^3)=1,5$; $P=0,75$.

9.9. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}Cx, & 2\le x\le 3,\\ 0, & x\notin[2,3].\end{cases}$$

Требуется найти $C, F(x), P(X>2,5), M(X), D(X)$.

9.10. Функция плотности случайно величины X имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}ae^{-2x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Найти $a, F(x), M(X), P(-1<X<1)$.

Ответ: $a=2$; $F(x)=1-e^{-2x}$, $x>0$; $M(X)=0,5$; $P=2e^{-2}$.

9.11. Функция плотности задана.

$$p(x)=\begin{cases} a\cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти коэффициент $a, F(x), P(0 \le X \le \pi/4)$.

Ответ:

$a=0,5$; $F(x)=0,5\sin x+0,5$, при $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; $P=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

9.12. Функция плотности имеет вид:

$$p(x)=\frac{a}{1+x^2}.$$

Найти коэффициент $a, F(x), P(-1 \le X \le 1)$.

Ответ: $a=\dfrac{1}{\pi}$; $F(x)=0,5+\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{\pi}$; $P=0,5$.

9.13. $p(x)=ae^{-\lambda|x|}$ – функция плотности случайной величины X, $\lambda>0$. Найти: коэффициент a, функцию распределения $F(x)$.

Ответ: $a=\dfrac{\lambda}{2}$, $\quad F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{\lambda x}, & x<0, \\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x>0. \end{cases}$

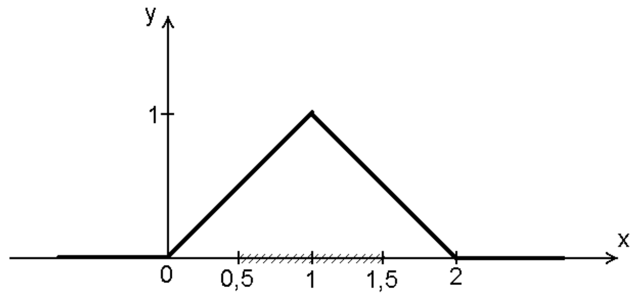
9.14. Случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$. Как распределена случайная величина $Y=F(X)$?

Ответ: равномерно на отрезке [0; 1].

9.15. Рассмотрим следующий опыт, состоящий из двух этапов. Бросают симметрическую монету. Затем, если выпал «герб», то на отрезке [–3; –1] случайно выбирают точку, а если выпала «решка», то точку наугад выбирают на отрезке [1; 2]. Пусть X – координата выбранной точки. Найти функцию распределения случайной величины X.

Ответ: $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-3, \\ \dfrac{x+3}{4}, & -3\le x\le -1, \\ \dfrac{1}{2}, & -1\le x\le 1, \\ \dfrac{x}{2}, & 1\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$

9.16. График функции плотности случайной величины X задан на рисунке.

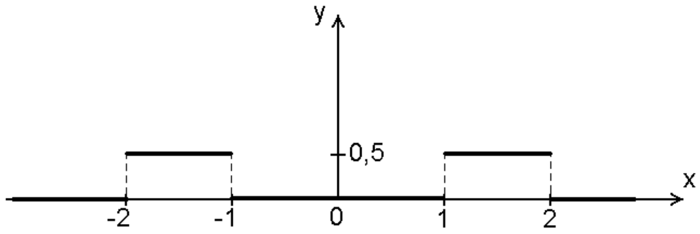


Наугад выбираются значения случайной величины X до тех пор, пока не произойдет попадание на интервал (0,5; 1,5). Пусть Y – количество выбранных значений. Составить ряд распределения случайной величины Y, найти $M\ (Y)$, вычислить $P\ (Y\le 2)$. Построить график функции распределения случайной величины X.

Ответ: $P(Y=n)=\dfrac{3}{4^n},\quad n=1,2,\ldots$

$M(Y)\approx 1{,}33;\quad P(Y\le 2)\approx 0{,}94.$

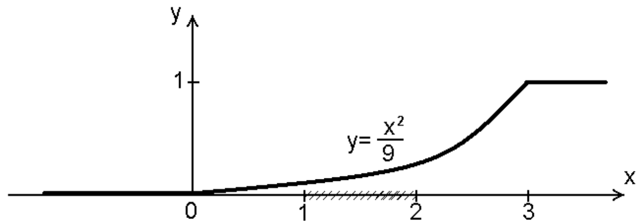
9.17. На рисунке изображён график функции плотности случайной величины X.



Найти функцию распределения случайной величины X. Построить её график.

Ответ: $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ (x+2)/2, & -2\le x\le -1, \\ 0,5, & -1\le x\le 1, \\ 0,5+(x-1)/2, & 1\le x\le 2, \\ 1, & x>2. \end{cases}$

9.18. График функции распределения случайной величины X задан на рисунке.



Наугад взяты 4 значения случайной величины X. Пусть Y – количество значений, попавших на [1; 2]. Составить закон распределения случайной величины Y, найти $M(Y)$, $D(Y)$, $P(Y\ge 2)$. Построить график функции распределения случайной величины Y.

Ответ: $P(Y=m)=C_4^m\dfrac{2^{4-m}}{81}$, $m=0,1,2,3,4$;

$M(Y)\approx 1,33$; $D(Y)\approx 0,89$.

9.19. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$P(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0\le \text{x}\le 2,\\ 0, & \text{x}\ge 2.\end{cases}$$

Найти значение параметра a. Наугад выбираются значения случайной величины X. Пусть Y – количество опытов до первого попадания случайной величины X в интервал (0; 1). Найти $M(Y)$, $P(Y=3)$. Построить график функции распределения случайной величины X.

<u>Ответ:</u> $a\approx 0{,}375$; $M(Y)=8$; $P\approx 0{,}095$.

9.20. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ ax+b, & 1\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти значение параметров a, b. Наугад взято 3 значения случайной величины X. Пусть Y – количество значений, превышающих 1,5. Составить закон распределения случайной величины Y. Найти $M(Y)$, $D(Y)$, $P(Y\le 1)$. Построить график функции распределения случайной величины Y.

<u>Ответ:</u>

$a=1$; $b=-1$; $P(Y=m)=C_3^m\ 0{,}125$, $m=0,1,2,3$;

$M(Y)=1{,}5$; $D(X)=0{,}75$; $P(Y\le 1)=0{,}5$.

9.21. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}c(x-3), & 3\le x\le 5,\\ 0, & \text{â î ñòàëüíûõ ñëó÷àÿõ}.\end{cases}$$

Найти константу c, вычислить $M\ (X)$, $D\ (X)$. Построить график функции распределения $y=F(x)$, вычислить вероятность того, что точно два из четырёх значений этой случайной величины попадут на интервал (4; 6).

<u>Ответ:</u> $c=0{,}5$; $M(X)\approx 4{,}33$; $D(X)\approx 0{,}22$; $P\approx 0{,}21$.

9.22. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = 2X - 1$.

Ответ: $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [-1;1], \\ 0, & \text{â î ñòàëüí û õ ñëó÷àÿõ}. \end{cases}$

9.23. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\alpha > 0$, т.е. ее функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти функцию плотности случайной величины $Y = X^2$.

Ответ: $p(x) = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{x}} e^{-\alpha\sqrt{x}}, \quad x > 0$.

9.24. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\alpha > 0$, т.е. ее функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти функцию плотности случайной величины $Y = \sqrt{X}$.

Ответ: $p(x) = 2\alpha x e^{-\alpha x^2}, \quad x > 0$.

9.25. Случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке $[0;1]$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = -\ln(1 - X)$.

Ответ: $p(x) = e^{-x}, \quad x > 0$.

9.26. Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины X. Найти функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины $Z = X^2 + 5$.

Ответ: $F_1(x) = F(\sqrt{x-5}) - F(-\sqrt{x-5}), \quad x \geq 5$.

9.27. $F(x)$ – функция распределения случайной величины X, принимающей только положительные значения. Найти функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины $Y = \ln X$.

Ответ: $F_1(x) = F(e^x)$.

9.28. $F(x)$ – функция распределения случайной величины X. Найти функцию распределения случайной величины $Y = e^X$.

Ответ: $F_Y(x) = F(\ln x), \ x > 0$.

9.29. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Найти функцию распределения $F_1(x)$ случайной величины $Z = 2X - 3$.

Ответ: $F_1(x) = \dfrac{e^{\frac{x+3}{2}}}{e^{\frac{x+3}{2}} + 1}$.

9.30. Случайная точка A равномерно распределена на отрезке $[0;1]$ и делит этот отрезок на две части. Пусть X – длина меньшей части. Найти $P(X < x)$ при любом x.

Ответ: $F(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 0,5$.

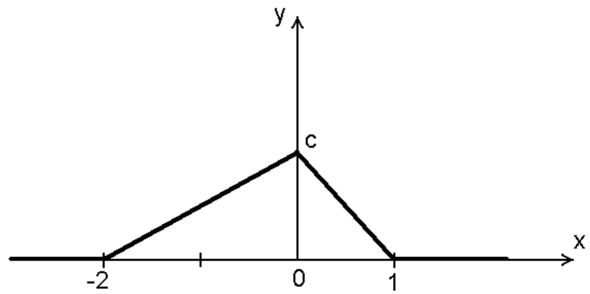
9.31. Случайные величины X и Y независимы. Случайные величины X принимает два значения 0, 1 с вероятностями $P(X=0)=P(X=1)=0{,}5$, а случайная величина Y равномерно распределена на отрезке [0; 1]. Найти распределение $X+Y$.

Ответ: равномерно на [0; 2].

9.32. Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены на отрезках [0; 1] и [1; 2]. Найти плотность распределения X/Y.

Ответ: $p(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}, & x\in[0;0{,}5],\\ \dfrac{1}{2}(x^{-2}-1), & x\in[0{,}5;1],\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$

9.33. Функция плотности случайной величины X имеет вид.



Найти константу c, $M(X)$ и функцию распределения случайной величины $Y=5X$.

Ответ:

$$c \approx 0,67;\ \grave{I}\ \ (\tilde{O}) \approx -0,33;\ F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < -10, \\ \dfrac{x^2}{150} + \dfrac{2x}{15} + \dfrac{2}{3}, & -10 \le x < 0, \\ 1 - \dfrac{(5-x)^2}{75}, & 0 \le x < 5, \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

9.34. Функция плотности случайной величины X имеет вид.

$$p(x) = \begin{cases} c(x-2), & 2 \le x \le 4, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $Y = 3X + 5$. Найти c и функцию распределения случайной величины Y.

Ответ: $c = 0,5;\quad F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 11, \\ \dfrac{(x-11)^2}{36}, & 11 \le x \le 17, \\ 1, & x > 17. \end{cases}$

9.35. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-3)^2}{200}}.$$

Найти $M(X)$ и $D(X)$.

9.36. Случайная величина X распределена по нормальному закону с функцией плотности.

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-1)^2}{8}}.$$

Вычислить $M(X^2)$.

Ответ: $M(X^2) = 5$.

9.37. Случайные величины $N_1, N_2, ..., N_{50}$ распределены нормально с параметрами $a = 2$, $\sigma = 1$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X:

$$X = \frac{N_1 + N_2 + ... + N_{50}}{50},$$

если $N_1, N_2, ..., N_{50}$ – независимые случайные величины.

Ответ: $M(X) = 2$, $D(X) = 0,02$.

9.38. Какая вероятность больше: P_1 или P_2?

$$P_1 = P(-7 \le N(5,1) \le 17),$$

$$P_2 = P(-7 \le N(5,10) \le 17),$$

где $N(a,\sigma)$ – нормально распределенная случайная величина с параметрами a, σ.

9.39. В какой точке график функции распределения нормально распределенной случайной величины $N(0,1)$ пересекает ось Y.

Ответ: в точке $M(0;0,5)$.

9.40. Случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами $a = 3$, $\sigma = 2$. В какой точке функция распределения этой случайной величины пересекает прямую $x = 3$.

9.41. $N_1(0,\sqrt{1}), N_2(0,\sqrt{2}), ..., N_n(0,\sqrt{n})$ – n независимые, нормально распределенные случайные величины. Найти математическое ожидание случайной величины $X = N_1^2 + N_2^2 + ... + N_n^2$.

Ответ: $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

9.42. Функция плотности случайной величины X имеет вид $p(x) = ce^{-x^2+2x}$. Найти константу c.

Ответ: $c=(e\sqrt{\pi})^{-1}$.

9.43. Случайная величина задана плотностью $f(x)=c10^{-2x^2-x}$. Найти вероятность попадания её в интервал $(-\frac{1}{4};\infty)$.

Ответ: $P=0,5$.

9.44. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ c(x-1), & 1\le x\le 2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

Определить: константу c, математическое ожидание $m=M(X)$, среднее квадратическое отклонение σ, $P(X>m)$, вероятность того, что хотя бы одно значение из пяти попадёт на интервал $(m/2;m)$.

Ответ: $c=1;\ m=1,5;\ \sigma\approx 0,08;\ P(X>m)=0,5;\ P\approx 0,97$.

10. ДВУМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

10.1. Двумерный случайный вектор (X,Y) распределен равномерно в квадрате $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$. Вычислить вероятность попадания случайной точки (X,Y) в круг $x^2 + y^2 \le 4$.

Ответ: $P = 0,785$.

10.2. (X,Y) – двумерная случайная величина, причем $2X + 3Y - 5 = 0$. Найти $r_{x,y}$.

10.3. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x, $0 \le x \le 0,5$.

Ответ: $P = (1-2x)^2$.

10.4. Случайная точка (X,Y) распределена равномерно в треугольнике ABC с вершинами $A(-3,0), B(0,3), C(3,0)$. Найти $M(X)$.

Ответ: $M(X) = 0$.

10.5. Система случайных величин (X,Y) распределена равномерно внутри треугольника ABC с вершинами $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(0,2)$. Найти функцию плотности системы случайных величин и каждой составляющей; математическое ожидание случайной величины $X^2 + Y^2$.

Ответ:

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in ABC,\\ 0, & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

$$p_1(x)=\begin{cases}2-2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

$$p_2(y)=\begin{cases}y, & 0\le y\le 1,\\ 2-y, & 1\le y\le 2,\\ 0, & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

$$M(X^2+Y^2)=\frac{1}{3}.$$

10.6. Система случайных величин (X,Y) распределена равномерно внутри треугольника:

$$D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}.$$

Записать функцию плотности $p(x,y)$ системы; найти функцию плотностей случайных величин X,Y^2; найти математическое ожидание случайной величины $X+Y^2$.

Ответ:

$$p(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D;\end{cases}$$

$$P_X(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{в остальных случаях};\end{cases}$$

$$P_{Y^2}(y)=\begin{cases}(1-\sqrt{y})/\sqrt{y}, & 0<y\le 1,\\ 0, & \text{в остальных случаях};\end{cases}$$

$$M(X+Y^2)=0{,}5.$$

10.7. Система случайных величин X и Y распределена равномерно в области: $D=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$. Найти функцию плотности системы; определить зависимы ли X и Y; найти дисперсию случайной величины $X+Y$.

Ответ:

$$p(x,y)=\begin{cases}0,5, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

X, Y – независимые случайные величины;

$$D(X+Y)=\frac{5}{12}.$$

10.8. Случайная точка (X,Y) распределена равномерно в параллелограмме $ABCD$ с вершинами $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(5,2)$, $D(5,1)$. Найти $M(X)$.

Ответ: $M(X)=2,5$.

10.9. Пара случайных величин (X,Y) распределена равномерно в треугольнике ABC с вершинами $A(0, 0)$, $B(5, 2)$, $C(–5, 2)$. Найти $M(Y)$.

Ответ: $M(Y)$=1,33.

10.10. Случайная точка распределена равномерно в части круга радиуса единица с центром в начале координат, находящейся в первой четверти. Найти $M(X)$.

Ответ: $M(X)=\dfrac{4}{3\pi}$.

10.11. Стрелок делает по мишени n выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна P. X – количество попаданий в мишень; Y – количество промахов. Составить таблицу распределения двумерной случайной величины (X,Y). Вычислить коэффициент корреляции $r_{X,Y}$.

Ответ: $r_{X,Y}=-1$.

10.12. Пара случайных величин (X, Y) распределена равномерно в треугольнике ABC, где A (0; 0), B (2; 1), C (2; 0). Найти M (X+Y).
Ответ: $M(X+Y)=1,667$.

10.13. Пара случайных величин (X, Y) распределена равномерно в треугольнике ABC, где A(0; 0), B(2; 0), C(0; 1). Построить график функции распределения составляющей X.

10.14. Случайные величины X, Y, Z независимы и равномерно распределены на интервале (0; 2). Найти коэффициент корреляции между случайными величинами X+Z и Y+Z.
Ответ: $r=0,5$.

10.15. Коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y равен r. Пусть a, b – некоторые ненулевые числа. Найти коэффициенты корреляции $r_{a+X,\,b+Y}$, $r_{aX,\,bY}$.
Ответ: $r_{a+X,b+Y}=r_{X,Y}$; $r_{aX,bY}=\dfrac{ab}{|ab|}\cdot r_{X,Y}$.

10.16. Пусть $N_1(a_1,\sigma_1)$, $N_2(a_2,\sigma_2)$, $N_3(a_3,\sigma_3)$ – независимые, нормально распределённые случайные величины с указанными параметрами. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами $X=N_1+N_2$ и $Y=N_1+N_3$.
Ответ: $\dfrac{\sigma_1^2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2}}$.

10.17. Производится $3n$ опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Обозначим X_1 – количество появлений события A в первых n опытах, X_2 – количество появлений события A в опытах с номерами n+1, n+2, …, $2n$, X_3 – количество появлений события A в последних n опытах. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами Y и Z, где $Y=X_1+X_2$; $Z=X_2+X_3$.
Ответ: $r=0,5$.

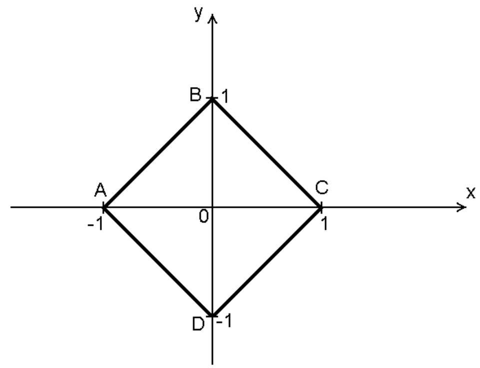
10.18. Распределение пары случайных величин (X,Y) задано таблицей.

$Y \backslash X$	0	1
3	0,02	0,18
4	0,08	0,72

Найти $r_{X,\,Y}$. Нарисовать график функции распределения составляющей X.

Ответ: $r_{X\,,\,Y} = 0$.

10.19. Пара случайных величин распределена равномерно в квадрате $ABCD$. Найти $D(X)$, $F_1(x)$, $P_2(y)$. Построить графики функций $F_1(x)$, $P_2(y)$. Зависимы ли X и Y?

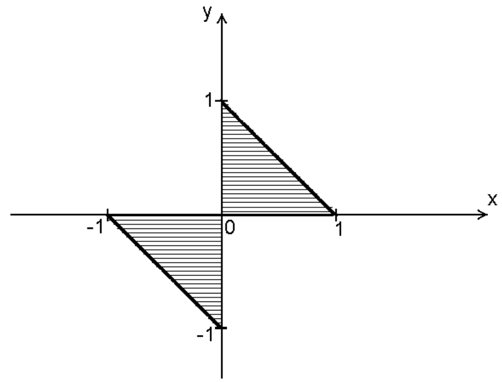


Ответ:

$$D(X) = \frac{1}{6}; \quad F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & -1 \le x \le 0, \\ 1 - \dfrac{(1-x)^2}{2}, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$P_2(y)=\begin{cases} y+1, & -1\le y\le 0,\\ 1-y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

10.20. Пара случайных величин (X,Y) распределена равномерно в заштрихованной области. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить графики функций $P_1(x)$, $F_2(y)$.

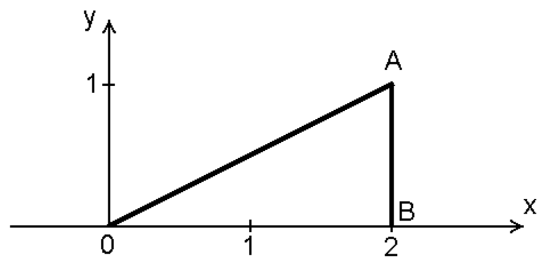


<u>Ответ:</u> $M(X)=0$; $D(X)=\dfrac{1}{6}$;

$$P_1(x)=\begin{cases} 1+x, & -1\le x\le 0,\\ 1-x, & 0\le x\le 2;\end{cases}$$

$$F_2(y)=\begin{cases} 0, & y<-1,\\ (1+y)^2/2, & -1\le y\le 0,\\ 1-(1-y)^2/2, & 0\le y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

10.21. Пара случайных величин (X, Y) распределена равномерно в треугольнике OAB. Найти $M(X^2)$, $P_1(x)$, $F_2(y)$. Построить графики функций $P_1(x)$, $F_2(y)$. Зависимы ли X и Y?



<u>Ответ:</u>

$$P_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$M(X^2)=2;$

$$F_2(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 2y-y^2, & 0\le y\le 1,\\ 1, & y>1;\end{cases}$$

случайные величины X и Y зависимы.

10.22. Распределение пары случайных величин (X,Y) задано таблицей:

$Y \backslash X$	3	5	7
0	0,1	0,2	0,3
1	0,05	0,15	0,2

Найти условные математические ожидания компонент X и Y . Вычислить $r_{X,\,Y}$.

<u>Ответ:</u> $M(X/Y=0)\approx 5{,}67$; $M(X/Y=1)=5{,}75$; $M(Y/X=3)\approx 0{,}33$; $M(Y/X=5)\approx 0{,}43$; $M(Y/X=7)=0{,}4$; $r_{X,\,Y}\approx 0{,}028$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимошенко Е. И. Теория вероятностей : учеб. пособие / Е. И. Тимошенко, Ю. Е. Воскобойников. – Новосибирск : НГАСУ, 1998. – 68 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1979. – 400 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 1997. – 479 с.
4. Боровков А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М. : Наука, 1976. – 354 с.