ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ

А. Ф. ЗАХАРОВ

Государственный научный центр – Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

GRAVITATIONAL LENSES

A. F. ZAKHAROV

The basics of gravitational lenses, which are, in fact, natural telescopes, are discussed. The history of this concept is described. Using the simplest model of a point gravitational lens, the possible observable manifestations of gravitational focusing are discussed.

Обсуждены основы действия природных телескопов, какими являются гравитационные линзы. Описана история возникновения этой концепции. На примере простейшей модели точечной гравитационной линзы рассмотрены возможные наблюдательные проявления гравитационной фокусировки.

www.issep.rssi.ru

ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Известно, что распространение света в гравитационном поле описывается уравнениями общей теории относительности, тем не менее отклонение лучей света от прямой линии обсуждалось вскоре после создания И. Ньютоном классической механики. Так, Ньютон в своей классической книге "Оптика" в 1704 году сформулировал следующий вопрос: не действуют ли тела на свет на расстоянии и не является ли это действие наиболее сильным на наименьшем расстоянии? Таким образом, можно говорить о том, что Ньютон сформулировал словами закон об отклонении луча света в гравитационном поле:

$$\Theta = \frac{2GM}{c^2R} \tag{1}$$

(G – гравитационная постоянная, c – скорость света, M и R – соответственно масса и радиус гравитационного шара). Точнее, $\Theta \sim R^{-1}$, поскольку численные коэффициенты в то время не выписывались (не было общепринятой системы единиц). В своей классической книге "Математические основы натуральной философии" Ньютон показал, что под действием центростремительной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояний до центра, тело движется по коническому сечению, фокус которого лежит в центре (напомним, что коническим сечением называется кривая, образованная при пересечении конической поверхности плоскостью, и коническим сечением в невырожденном случае могут быть только эллипс, гипербола или парабола). Поскольку при рассмотрении движения тела по гиперболической траектории Ньютон вычислил и полуоси, тем самым ему был известен и угол между асимптотами.

Учитывая то, что Ньютон достаточно часто не публиковал результаты и форма представления им результатов также была весьма непростой, можно, по-видимому, утверждать, что формула (1) была Ньютону известна, более того, скорее всего, ему была известна соответствующая величина отклонения луча света вблизи поверхности Солнца, поскольку все необходимые значения констант ко времени опубликования “Начал” были известны. Действительно, первый директор Парижской обсерватории Дж. Кассини определил расстояние от Земли до Солнца в 1672 году, время обращения Земли вокруг Солнца определил датский астроном Тихо Браге с точностью до 1 секунды, а из третьего закона Кеплера, зная расстояние от Солнца до Земли и период обращения Земли, можно определить произведение $GM_\odot$, так как $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM_\odot)$). Результаты датского астронома О. Рёмера по измерению скорости света на основании изменения периода обращения спутника Юпитера Ио были опубликованы в 1677 году. К 1687 году (году опубликования “Начал”) все необходимые значения констант были известны, тем не менее в явном виде в научном наследии формулы (1) нет, не приведено также и значение для отклонения луча света вблизи поверхности Солнца, возможно по причине слишком малого его значения ($0''.87$).

В качестве исторического казуса заметим (вслед за П.В. Блиохом и А.А. Минаковым), что если вычислить отклонение луча света вблизи поверхности Солнца, используя величину скорости света, определенную Рёмером, $c = 2 \cdot 10^{10}$ см/с, то для величины угла отклонения получится результат $\Theta = 1''.73$, что практически совпадает с результатом, полученным в рамках общей теории относительности (ОТО). Несмотря на то что формула (1) Ньютону, по-видимому, была известна, первое упоминание о вычислении величины угла отклонения относится к 1784 году, когда соотношение (1) получил английский физик Генри Кавендиш, стимулированный перепиской со своим другом Джоном Мичеллом (тем самым, кто в 1783 году за несколько лет до выхода в свет работы выдающегося французского физика и математика П. Лапласа рассмотрел звезды, гравитационное поле которых является столь сильным, что луч света не может покинуть поверхность звезды). Кавендиш не опубликовал свои вычисления, тем не менее они были записаны “на отдельном листе бумаги”.

В 1801 году немецкий астроном Иоганн Георг фон Зольднер представил в “Берлинский астрономический ежегодник” статью об отклонении луча света в гравитационном поле звезды (статья опубликована в 1804 году), так что вывод формулы (1) впервые был опубликован Зольднером.

Но, несмотря на достаточно высокое положение Зольднера в науке, его работа об отклонении света была практически забыта. Ее значение стало ясно научной общественности лишь после появления работ Эйнштейна.

В 1911 году А. Эйнштейн получил в рамках специальной теории относительности (СТО) то же самое значение для угла отклонения луча света вблизи поверхности Солнца (что и вычисляемое с использованием формулы (1)). К началу XX века астрономы уже могли измерить подобные углы отклонения. Действительно, в 20-х годах XIX века благодаря работам Й. Фраунгофера были созданы телескопы, с помощью которых немецкий астроном и математик Ф.В. Бессель и русский астроном и геодезист В.Я. Струве измерили звездные параллаксы, которые много меньше $1''$. Группа астрономов из Берлинской обсерватории во главе с Э. Фрейндлихом заинтересовалась предсказаниями Эйнштейна и собралась провести измерения во время предстоящего полного солнечного затмения в Крыму в августе 1914 года. Астрономы уже были в Крыму, но началась первая мировая война, они были арестованы и вскоре обменены на граждан России, арестованных в Германии. К счастью для Эйнштейна наблюдения не были проведены. В 1915 году в рамках общей теории относительности А. Эйнштейн получил удвоенное значение для угла отклонения

$$\Theta = \frac{4GM}{c^2R}. \tag{2}$$

Вскоре после окончания первой мировой войны группа английских астрономов во главе с А. Эддингтоном провела наблюдения отклонения луча света во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года. Как сообщалось в публикации результатов экспедиции, ее задачей был выбор одной из трех возможностей: 1) гравитационное поле Солнца не оказывает влияния на траекторию луча света; 2) гравитационное поле Солнца действует на световой луч как на обычное вещество, если закон тяготения носит ньютоновский характер, что приводит к кажущемуся смещению во внешнем направлении звезды у края солнечного диска, равному $0''.87$; 3) ход луча согласуется с ОТО, что приводит к кажущемуся смещению во внешнем направлении звезды у края диска, равному $1''.75$.

При формулировке задач экспедиции было замечено, что “смещение (2) впервые было вычислено профессором А. Эйнштейном на основе принципа относительности”. Результаты наблюдений были получены в двух географических точках: в Собрале и на Принсипи; в Собрале среднее отклонение $1''.98 \pm 0''.12$, на Принсипи $1''.61 \pm 0''.30$. Тем не менее в Собрале были получены пластины, давшие отклонение $0''.93$. Эти данные были отброшены, поскольку случайная ошибка была слишком велика. Таким образом, в результате наблюдений приведено убедительное подтверждение предсказаний А. Эйнштейна. Немецкий нобелевский лауреат Ф. Ленард в 1921 году, заметив, что впервые формула (1) получена в работе Зольднера, привел в своей статье фрагмент этой работы и аргументацию того, что результаты согласуются с предсказанием отклонения 0″,87. Последующие наблюдения с помощью методов радиоинтерферометрии подтвердили предсказания Эйнштейна с точностью выше 1%.

По-видимому, первый, кто использовал термин "линза" в контексте отклонения луча света гравитацией, был английский физик О. Лодж, который в 1919 году, однако, отметил, что " гравитационное поле действует как линза, но не имеет фокусной длины".

Петербургский физик О. Хвольсон в 1924 году опубликовал короткую заметку, в которой заметил, что в случае, когда рассматривается отклонение луча света фоновой звезды звездой-линзой, возможно возникновение второго изображения фоновой звезды, но угол между двумя изображениями столь мал, что эти изображения нельзя разрешить с помощью наземного телескопа. В случае, когда наблюдатель, линза и источник находятся на одной прямой, возникает изображение типа кольца. По утверждению американского астронома Барноти, эти кольца, называемые сейчас кольцами Эйнштейна, должны называться кольцами Хвольсона, а крупнейшие специалисты в теории гравитационных линз П. Шнайдер, Ю. Элерс и Э. Фалько приводят по этому поводу пословицу "The biggest cat gets all the milk" (русский аналог: кто смел, тот и съел). В настоящее время в основном используется термин "кольцо Эйнштейна" и значительно реже "кольцо Хвольсона–Эйнштейна". Следует заметить, что значительно большая популярность работы Эйнштейна связана не только со значительно большей его известностью по сравнению с Хвольсоном, но и со значительно большей популярностью журнала "Science" по сравнению с потсдамским астрономическим журналом "Astronomische Nachrichten".

В 1936 году Эйнштейн опубликовал заметку, где по просьбе чешского инженера Мандла рассмотрел линзообразное действие звезды на фоновую звезду, в частности появление кольца в случае, если наблюдатель, линза и источник находятся на одной прямой (в этом случае появляется кольцо Эйнштейна). Эйнштейн заметил, что, "конечно, нельзя надеяться на то, что удастся прямо наблюдать это явление". Мы постараемся обсудить это замечание А. Эйнштейна. Кроме того, в данной заметке был вычислен коэффициент усиления источника гравитационной линзой. Следует заметить, что и Хвольсон и Эйнштейн считали, что не может наблюдаться эффект гравитационной линзы (в смысле наблюдения двойной звезды или кольца Эйнштейна), поскольку они рассматривали случай, когда и источник, и гравитационная линза являются звездами.

Однако немецкий астроном Ф. Цвикки в 1937 году пришел к выводу, что эффект может быть наблюдаем в случае, если источником является туманность, а гравитационной линзой – галактика. Приведем цитату из работы Цвикки: "Прошлым летом доктор В.К. Зворыкин (которому подобная идея была сообщена Мандлом) заметил мне о возможности образования изображения как результат действия гравитационных полей. Как следствие я провел некоторые вычисления. Внегалактические туманности имеют гораздо больше шансов, чем звезды, для наблюдения эффектов гравитационной линзы". Эта цитата может быть образцом стиля научных работ более чем полвека назад со ссылками на чужие, даже не до конца определенно сформулированные идеи. Для того чтобы убедиться, что это не единичный пример, можно привести цитату из работы Эйнштейна: "Некоторое время тому назад меня посетил Р. Мандл и попросил опубликовать результаты небольшого расчета, который я провел по его просьбе. Уступая его желанию, я решил опубликовать эту заметку". Цитата из работы Цвикки демонстрирует самое широкое влияние на развитие мировой науки русской научной школы, в том числе блестящих представителей первой русской эмиграции, таких, как В.К. Зворыкин, технические открытия которого фактически позволяют назвать его отцом телевидения. Насколько плодотворными были замечание Зворыкина и, безусловно, последующий анализ Цвикки, стало ясным спустя более сорока лет. Действительно, когда английские астрономы Д. Волш и др. в 1979 году (рис. 1) обнаружили первую гравитационную линзу при наблюдении двойного квазара QSO 0957+16 A,B ($z \approx 1,4$, угловое расстояние между изображениями порядка 6″) и гравитационной линзой была галактика ($z_d \approx 0,36$), то стало возможным говорить о том, что предсказание Цвикки подтвердилось.

В настоящее время известны 10 установленных объектов, связываемых с гравитационными линзами, и 15 объектов, предложенных для дальнейшей проверки,

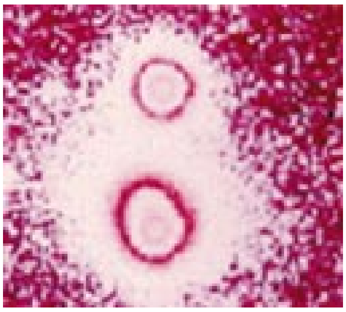

Рис. 1. Изображение первой гравитационной линзы QSO 0957+16 A, B, взятое из галереи гравитационных линзы профессора Ж. Сюрдеча, расположенной на интернет-сайте http://vela.astro.ulg.ac.be

кроме того, пять радиодуг, связываемых с гравитационными линзами. С 1979 года количество опубликованных работ, посвященных гравитационным линзам, стало столь велико, что невозможно коротко упомянуть даже самые значительные, однако можно отметить обнаружение гравитационного микролинзирования в 1993 году (то есть характерное изменение светимости фоновой звезды, обусловленное действием гравитационной линзы, являющейся невидимым объектом звездной массы), а также появление первых алгоритмов для восстановления поверхностной плотности скрытого вещества по наблюдаемому искажению формы далеких галактик, то есть проявление так называемого слабого гравитационного линзирования, когда гравитационная фокусировка приводит не к появлению кратных изображений исходных объектов, а только к искажению их формы.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЗОЛЬДНЕРА

Выберем систему координат таким образом, что гравитирующий центр лежит в начале координат, и пусть из точки S в направлении, параллельном оси абсцисс, испускается луч света (рис. 2). Через время t луч света будет находиться в точке A. Введем следующие обозначения: $DA = r$, $DP = p$, $\angle ADP = \varphi$.

Предположим, что фотон обладает энергией $E = h\nu$ и массой $m = E/c^2$, где $h = 6{,}626 \cdot 10^{-27}$ эрг · с — постоянная Планка, ν — частота фотона, c = 2,997 см/с — скорость света. Тогда, согласно закону всемирного тяготения, изменение проекции вектора скорости на ось Oy определяется соотношением

$$\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t} = -\frac{GM}{r^2}\cos\varphi = \frac{GM}{r^3}p, \qquad (3)$$

где $r = \sqrt{p^2 + x^2}$.

Интервал времени связан со значением интервала по оси Ox следующим образом:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\upsilon_x} = \frac{\Delta x}{c}, \qquad (4)$$

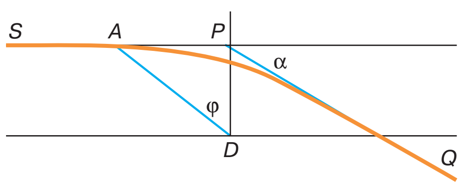

Рис. 2. Искривление траектории луча света гравитирующим телом. Луч испускается из точки S, текущее положение луча света характеризуется точкой A, которой соответствует угол φ. SAQ – траектория луча света в ньютоновском поле (гипербола)

предполагается, что $\upsilon_x \approx c$.

Если ввести замену переменной x: $x = p\,\mathrm{tg}\,\varphi$, то

$$\Delta x = p\frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}; \qquad (5)$$

поскольку $\dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{1}{\cos\varphi}$, то $\Delta t = \dfrac{P}{c}\dfrac{1}{\cos^2\varphi}\Delta\varphi$. Тогда

$$\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta\varphi} = -\frac{GM}{pc(1+\mathrm{tg}^2\varphi)^{3/2}}\frac{1}{\cos^2\varphi} = -\frac{GM}{pc}\cos\varphi. \qquad (6)$$

В этом случае полное изменение может быть вычислено с использованием определенного интеграла

$$\Delta\upsilon_y = -\frac{GM}{pc}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi. \qquad (7)$$

Поскольку

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = 2, \qquad (8)$$

то

$$\Delta\upsilon_y = -\frac{2GM}{pc}, \qquad (9)$$

а угол отклонения характеризуется соотношением

$$\Theta = \sin\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\Delta\upsilon_y}{c} = \frac{2GM}{pc^2}. \qquad (10)$$

Вычислим угол отклонения луча света вблизи поверхности Солнца. В этом случае радиус Солнца $R_\odot = 6{,}96 \times 10^{10}$ см, масса Солнца $M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{33}$ г, значение гравитационной постоянной $G = 6{,}673 \cdot 10^{-8}$ см^3/(г · с^2), $c = 2{,}997 \cdot 10^{10}$ см/с и угол отклонения равен 0″,875. Зольднер получил значение 0″,84. Расхождение в результате связано с уточнением значений констант, используемых для вычислений по формуле Зольднера.

ТОЧЕЧНАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ЛИНЗА

Рассмотрим основные понятия теории гравитационных линз на примере точечной гравитационной линзы. Будем считать, что свет движется не по кривой, похожей на гиперболу, а по асимптотам этой кривой. Ясно также, что идеальная гравитационная линза является ахроматической, но в реальной ситуации разные части источника могут иметь различный цвет, и тем самым могут возникнуть различные эффекты, связанные с цветом. Итак, рассмотрим идеальную точечную гравитационную линзу (рис. 3).

Пусть D_s — расстояние между источником и наблюдателем, D_d — расстояние между гравитационной линзой

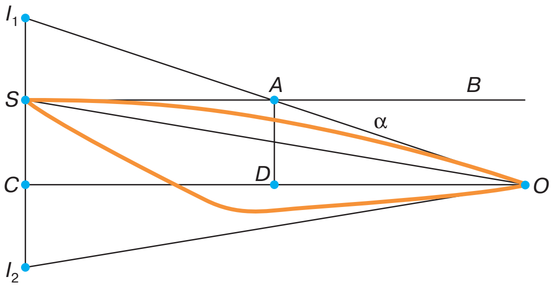

Рис. 3. Геометрия гравитационной линзы

и наблюдателем, D_{ds} – расстояние между гравитационной линзой и источником. Проведем через точку, в которой находится гравитационная линза, плоскость (плоскость линзы), перпендикулярную прямой, соединяющей линзу и наблюдателя. Аналогично через источник проведем плоскость, параллельную плоскости линзы, – плоскость источника.

Пусть векторы η, ξ определяют координаты в плоскости источника и плоскости линзы соответственно, тогда из подобия треугольников ΔOAD и ΔOI_1C получаем

$$\left(\eta + \frac{2R_s}{\xi}D_{ds}\right)\Big/\xi = \frac{D_s}{D_d}. \qquad (11)$$

(В данном случае используем формулу Эйнштейна (2), $R_s = 2GM/c^2$ – радиус Шварцшильда).

Тогда уравнение гравитационной линзы имеет следующий вид:

$$\eta = \frac{D_s\xi}{D_d} - D_{ds}\frac{2R_s}{\xi}. \qquad (12)$$

Приравнивая к нулю правую часть уравнения (12), получим условия, когда источник, линза и наблюдатель находятся на одной прямой (η = 0). Соответствующее значение $\xi_0 = \sqrt{2GMD_dD_{ds}/(c^2D_s)}$ называется радиусом Эйнштейна–Хвольсона. Можно вычислить также угол Эйнштейна–Хвольсона $\theta_0 = \xi_0/D_d$.

Вычислим значение угла θ_0 для типичной ситуации, когда гравитационной линзой и источником являются звезды и когда источником является квазар, а гравитационной линзой – галактика. Напомним, что квазары (от англ. quasar = quasistellar radiosource) – это мощные внегалактические источники электромагнитного излучения, имеющие на фотографиях звездообразный вид. Природа мощного энерговыделения квазаров в настоящее время до конца неизвестна, однако обычно предполагается, что это энерговыделение связано с астрофизическими процессами в окрестности сверхмассивных черных дыр. Будем считать, что $D_s \gg D_d$, тогда

$$\theta_0 \approx 2'' \cdot 10^{-3}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{\text{кпк}}{D_d}\right)^{-1/2}.$$

Напомним, что в астрономии расстояния довольно часто измеряются в парсеках (пк) и 1 парсек = 1 пк = = 3,26 светового года = 206 265 а.е.= $3 \cdot 10^{16}$ м – это расстояние, соответствующее годичному параллаксу в одну секунду дуги или, иными словами, расстояние, с которого отрезок прямой, соединяющий Землю и Солнце, виден под углом 1″. Световой год (св.год) – расстояние, которое проходит луч света за один год (1 св. год = $9,46 \cdot 10^{15}$ м). Астрономическая единица (а.е.) – среднее расстояние от Земли до Солнца (1 а.е. = = $1,49 \cdot 10^{11}$ м). Если гравитационная линза – одна из ближайших галактик с массой $M = 10^{12}\,M_\odot$, удаленная на расстояние D_d = 100 кпк, то $\theta_0 \approx 200''$. Если линза находится на расстоянии 1 кпк от наблюдателя (возможно, в нашей Галактике) и имеет массу порядка солнечной $M = M_\odot$, то $\theta_0 \approx 2'' \cdot 10^{-3}$. Этот случай гравитационной фокусировки называется гравитационным микролинзированием. Поскольку разрешающая способность наземных оптических телескопов ограничена долями угловой секунды, то в этом случае невозможно разрешить эти изображения с помощью наземных оптических телескопов.

Запишем уравнение линзы, отнормировав угловые переменные на угол Эйнштейна–Хвольсона, а именно использовав переменные

$$\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_0}, \qquad \mathbf{y} = \frac{D_s\boldsymbol{\eta}}{\xi_0 D_d}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\Theta} Dd_s D_d}{D_s\xi_0}. \qquad (13)$$

Тогда уравнение гравитационной линзы имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad \text{или} \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}}{x^2}. \qquad (14)$$

Решая это уравнение относительно x, получаем

$$x^{\pm} = y\left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}}\right]. \qquad (15)$$

Отсюда без труда может быть вычислено расстояние между изображениями источника:

$$x^{+} = y\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}}\right], \qquad x^{-} = y\left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}}\right],$$
$$l = x^{+} + |x^{-}| = 2y\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{y^2}}. \qquad (16)$$

В случае, если $y \ll 1$, то $l \approx 2$, то есть расстояние между изображениями порядка диаметра Эйнштейна.

Легко понять, почему круглый источник имеет изображения, вытянутые вдоль окружности с центром в начале координат. Действительно, рассмотрим источник, расположенный недалеко от начала координат, $y \ll 1$. Тогда его изображения находятся вблизи окружности Эйнштейна (x^+ вне круга, x^- внутри). Дуга окружности с центром в начале координат и проходящая через точки пересечения диаметра источника, перпендикулярного оси абсцисс, отображается в два сильно вытянутых изображения (примерно в $1/y$ раз). Рассмотрим, как изменяется при преобразовании гравитационной линзой размер источника в радиальном направлении в предположении, что источник находится на оси абсцисс (это предположение можно сделать без ограничения общности). При $y \longrightarrow 0$ (малых значениях y)

$$\frac{dx^{\pm}}{dy} = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{\sqrt{4+y^2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{y}{2}, \qquad (17)$$

поэтому ясно, что изображения сужаются в этом направлении примерно в два раза по сравнению с источником.

В случае, если точечный источник находится на оси симметрии, изображение является кольцом, которое впервые обсуждалось в работе Хвольсона, опубликованной в 1924 году, а затем в заметке Эйнштейна, опубликованной в 1936 году. Следует заметить, что выше цитировалось утверждение Эйнштейна о том, что маловероятно наблюдать подобное кольцо. Более точно было бы говорить в данном случае о том, что наблюдать подобное кольцо в случае точечного источника невозможно, так как при малом изменении параметров кольцо исчезает и появляются два точечных изображения. В случае, если источник не точечный, то появление кольца в принципе возможно, хотя и менее вероятно, чем появление дуг.

КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ

Определим коэффициент усиления гравитационных линз. Следует заметить, что вследствие того, что коэффициент усиления изображения больше 1 (в некоторых случаях), рассматриваемое искривление света гравитирующим телом можно называть гравитационным линзированием (гравитационной фокусировкой), а гравитирующее тело – гравитационной линзой.

Введем важное понятие, определяющее гравитационную фокусировку, так называемый коэффициент усиления гравитационной линзы. Он определяется отношением площади на небесной сфере изображения к площади источника. Предположим для простоты рассуждения, что достаточно малый источник представляет собой небольшой элемент кольца, радиус которого меняется в пределах от y до $y + \Delta y$, а угол – в пределах от

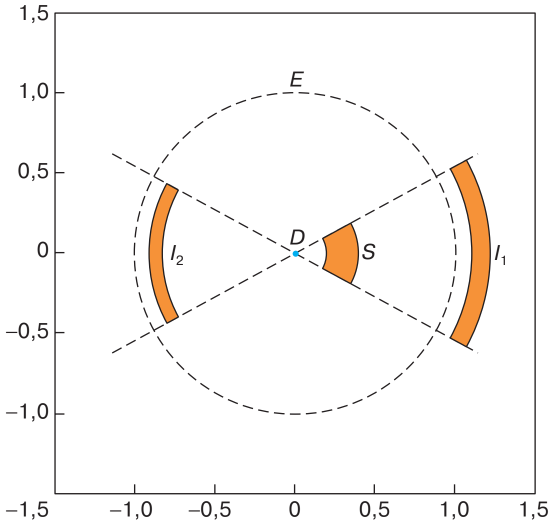

Рис. 4. Формирование гравитационной линзой изображений источника, имеющего форму элемента кольца

φ до $\varphi + \Delta\varphi$ (рис. 4). В случае, если Δy и $\Delta\varphi$ достаточно малы, то можно считать элемент кольца прямоугольником, его стороны соответственно равны Δy (для стороны, лежащей на радиусе) и $y d\varphi$ (для стороны, лежащей на окружности). Тем самым площадь элемента кольца

$$S_s = y\Delta y\Delta\varphi. \qquad (18)$$

Если рассматривать изображение источника, которому соответствует решение x^+ уравнения гравитационной линзы, то из соображений симметрии ясно, что это изображение также является элементом кольца, радиус которого меняется от x^+ до $x^+ + \Delta x^+$, а угол – в пределах от φ до $\varphi + \Delta\varphi$, где

$$\Delta x^+ = \frac{1}{2}((y+\Delta y) + y - \sqrt{4+y^2}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\Delta y + \sqrt{4+(y+\Delta y)^2} - \sqrt{4+y^2}) \approx \frac{1}{2}\left(\Delta y + \frac{y\Delta y}{4+y^2}\right). \qquad (19)$$

Поскольку изображение при малых значениях $\Delta\varphi$ и Δy (а следовательно, и малых Δx^+), так же как и источник, можно считать прямоугольником, то площадь изображения

$$S_i^+ = x^+\Delta x^+\Delta\varphi. \qquad (20)$$

Коэффициент усиления гравитационной линзы характеризует то, во сколько раз площадь изображения на небесной сфере больше площади источника, то есть

$$\mu^{-} = \frac{x^{+}\Delta x^{+}\Delta\varphi}{y\Delta y\Delta\varphi} = \frac{1}{4}\frac{\left(y+\sqrt{4+y^2}\right)\left(1+\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}\right)}{y} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{\sqrt{4+y^2}}{y}\right)\left(1+\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}+\frac{\sqrt{4+y^2}}{y}+2\right). \quad (21)$$

Если рассмотреть изображение источника, которому соответствует решение x^- уравнения гравитационной линзы, то из соображений симметрии ясно, что это изображение также является элементом кольца, радиус которого меняется от $x^- + \Delta x^-$, а угол – в пределах от φ до $\varphi + \Delta\varphi$. Аналогично рассуждениям, приведенным выше, коэффициент усиления для этого изображения

$$\mu^{-} = \frac{x^{-}\Delta x^{-}\Delta\varphi}{y\Delta y\Delta\varphi} = \frac{1}{4}\left(\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}+\frac{\sqrt{4+y^2}}{y}-2\right). \quad (22)$$

Тогда коэффициент усиления, соответствующий двум изображениям,

$$\mu_{\text{tot}} = \mu^{+} + \mu^{-} = \frac{2+y^2}{y\sqrt{4+y^2}}. \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что $\mu_{\text{tot}} > 1$, тем самым в любом случае влияние гравитационной линзы приводит к усилению изображений, и поэтому влияние гравитационного поля приводит к гравитационной фокусировке, которое называется гравитационным линзированием. При малых значениях y ($y \longrightarrow 0$) имеем следующее выражение для коэффициента усиления:

$$\mu_{\text{tot}} = \frac{1}{y}. \quad (24)$$

Ясно, что отношение коэффициентов усиления изображений определяется соотношением

$$\frac{\mu^{+}}{\mu^{-}} = \left(\frac{\sqrt{4+y^2}+y}{\sqrt{4+y^2}-y}\right)^2. \quad (25)$$

Рассмотрим предельные значения для величин $\mu^{\pm}$ и их отношения при малом отклонении источника от оси симметрии $y \longrightarrow 0$:

$$\mu^{+} = \frac{1}{2y}+\frac{1}{2}, \qquad \mu^{-} = \frac{1}{2y}-\frac{1}{2}, \qquad \frac{\mu^{+}}{\mu^{-}} = 1+y.$$

В пределе $y \longrightarrow \infty$ получим

$$\mu^{+} = 1+y^{-4}, \qquad \mu^{-} = y^{-4}, \qquad \frac{\mu^{+}}{\mu^{-}} = y^{4}.$$

Следует заметить, что модель точечной гравитационной линзы (с помощью которой можно проследить возникновение двойного изображения) хотя и является весьма поучительной, но использовать ее следует с большой осторожностью, поскольку в реальных ситуациях или угловое расстояние между изображениями слишком мало (мал угол Эйнштейна, как в наблюдаемых случаях микролинзирования), или линза имеет большую массу и большие размеры, так что ее нельзя рассматривать как материальную точку (как в первых наблюдаемых примерах гравитационных линз).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В небольшой статье невозможно рассказать о всех аспектах теории гравитационных линз и их наблюдений. Как уже было сказано ранее, обнаружить гравитационные линзы можно по наблюдениям пар квазаров, которые имеют похожие спектры и временную переменность компонентов, отличающуюся лишь временным сдвигом, который может принимать значения для различных пар изображений от нескольких дней до нескольких лет.

Гравитационные линзы являются и важным инструментом астрономических исследований. Так, например, с их помощью можно получить независимую от других методов исследований оценку величины постоянной Хаббла, характеризующей в зависимости от расстояний скорости убегания от нас астрономических объектов, находящихся на космологических расстояниях; оценить массы гравитационных линз, большая часть которой испускает слишком мало электромагнитного излучения для того, чтобы быть обнаруженной с помощью стандартных астрономических методов; с помощью методов так называемого слабого гравитационного

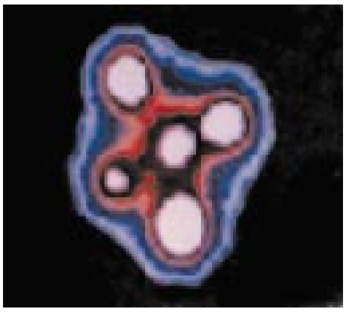

Рис. 5. Изображение квазара QSO 2237 A, B, C, D ("крест Эйнштейна"), взятое из галереи гравитационных линз профессора Ж. Сюрдеча, расположенной на интернет-сайте http://vela.astro.ulg.ac.be

линзирования восстановить распределение поверхностной плотности удаленных скоплений галактик по наблюдаемому изменению формы удаленных фоновых галактик; по характерному изменению кривой блеска фоновой звезды или, говоря иными словами, по характерному изменению ее наблюдаемой светимости можно обнаружить невидимые объекты с массами порядка солнечной, то есть обнаружить события, связанные с проявлением событий так называемого микролинзирования.

Заметим в заключение, что цветные изображения гравитационных линз, собранные известным бельгийским астрономом-исследователем гравитационных линз профессором Ж. Сюрдеча, можно найти с помощью системы Internet на www-сайте http://vela.astro.ulg.ac.be, так, например, одна из наиболее известных систем изображений квазара, связанных с проявлением эффекта гравитационного линзирования, показана на рис. 5.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров А.Ф.* Гравитационные линзы и микролинзы. М.: Янус, 1997.

Рецензент статьи В.М. Липунов

* * *

Александр Федорович Захаров, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Государственного научного центра – Института теоретической и экспериментальной физики. Область научных интересов – релятивистская астрофизика: гравитационные линзы, черные дыры, гравитационные волны. Автор более 100 научных работ и одной монографии.