# Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Физический факультет

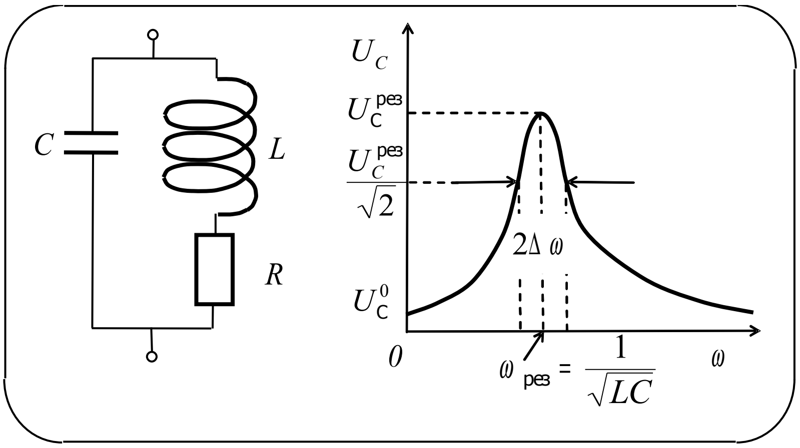
Кафедра общей физики

Лабораторный практикум по общей физике
(электричество и магнетизм)

Козлов В.И.  Полевой П.В.  Штыркова А.П.

Лабораторная работа *24*

## Резонанс в цепях переменного тока




М О С К В А   2006

# Лабораторная работа 24
# Резонанс в цепях переменного тока

Изучаются установившиеся вынужденные колебания в цепях переменного тока: в последовательном и параллельном колебательных контурах. Рассматриваются явления резонанса напряжений и резонанса токов.

## Введение

**Последовательный колебательный контур.**

Рассмотрим цепь, в которой элементы L, C и R включены последовательно с внешней ЭДС – такая цепь представляет собой последовательный колебательный контур (рис.1).

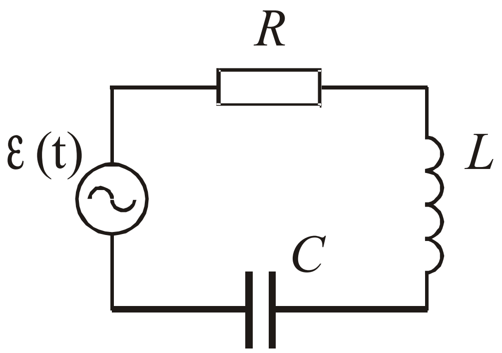



Рис. *1*. Последовательный колебательный контур.

Обычно считают, что ЭДС $\mathcal{E}$ изменяется по гармоническому закону, а колебания уже установились, т.е. амплитуды колебаний тока и напряжений на отдельных элементах достигли постоянных значений к моменту измерений.

Для цепи, изображенной на рис. 1, в соответствии со вторым правилом Кирхгофа можно записать уравнение (оно называется уравнением вынужденных колебаний) [1]:

$$\frac{\hat{q}}{C} + R\hat{I} = -L\frac{d\hat{I}}{dt} + \hat{\mathcal{E}} \tag{1}$$

Знак “^” означает, что эти величины — комплексные; в дальнейшем этот знак можно опустить.

Уравнение (1) можно записать несколько иначе, если учесть, что $I = dq/dt$, а $\boxed{q = \int I dt}$:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I dt = \varepsilon \tag{2}$$

Полагая, что переменный ток в контуре изменяется по гармоническому закону, подставим $\boxed{I = I_0 e^{i\omega t}}$ в формулу (2) и учитывая, что $\boxed{\frac{dI}{dt} = i\omega I_0}$, а $\boxed{\int I\,dt = \frac{I_0}{i\omega}}$, получим:

$$\varepsilon = I_0 R + I_0 i\omega L - I_0 \frac{i}{\omega C} = I_0 \left[ R + i\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \tag{3}$$

По закону Ома:

$$\frac{\varepsilon}{I} = Z,$$

где величина $Z$ оказывается комплексной:

$$Z = R + i\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Она называется **импедансом**, или полным комплексным сопротивлением цепи для переменного тока.

Как известно, есть две формы записи комплексного числа $Z$:

$$Z = X + iY \qquad \text{и} \qquad Z = |Z| e^{i\varphi}.$$

При этом модуль комплексного сопротивления последовательного колебательного контура

$$|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

а аргумент (или фазовый угол)

$$\varphi = arctg \frac{Y}{X} = arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Здесь угол $\varphi$ показывает сдвиг фаз между током $I$ и полным напряжением в цепи, которое равно напряжению на генераторе $\varepsilon$.

Если изменять частоту внешней электродвижущей силы, оставляя неизменными параметры контура $L$, $C$, $R$, то при некоторой частоте мнимая часть комплексного сопротивления $Z$ обращается в нуль, т.е. оказывается, что контур обладает только активным сопротивлением $R$. При этом будет наблюдаться возрастание тока, а когда ток достигает максимального значения, то наступает **резонанс**. Частоту генератора, соответствующую максимуму тока, называют резонансной частотой $\omega_{рез}$.

Из уравнения (3) следует, что

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{4}$$

Как известно, такое же выражение получается для частоты собственных свободных колебаний, т.е.

$$\omega_{рез} = \omega_0.$$

При резонансе максимальных значений достигают также напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности, причем выражение для резонансной частоты для них несколько отличается от (4). Однако при малых потерях в контуре (малом R) можно пренебречь этим отличием и считать, что амплитуды напряжения на конденсаторе и катушке достигают резонансного максимального значения на одной и той же частоте (4). При этом напряжения на конденсаторе и катушке противофазны, следовательно компенсируют друг друга.

Фазовые соотношения между током и напряжением на различных участках цепи удобно анализировать с помощью векторной диаграммы (рис.2).

При этом сами напряжения выражаются так:

$$\boxed{\begin{array}{l} U_C = I_0\left(-\dfrac{i}{\omega C}\right) \\ U_L = I_0 i\omega L \end{array}},$$

Из диаграммы на рис.2 видно, что при резонансе, когда напряжения на конденсаторе и катушке компенсируют друг друга, фазовый сдвиг между током и полным напряжением равен нулю. При этом, как было указано ранее, напряжения $U_L$ и $U_C$ достигают максимальных значений.

Такая ситуация называется резонансом напряжений.

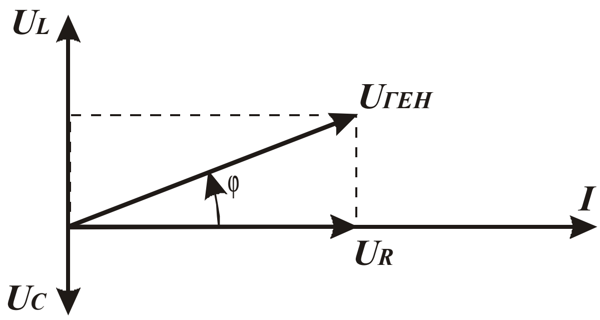



Рис.2. Векторная диаграмма токов и напряжений для последовательного колебательного контура.

**Параллельный колебательный контур.**

Для изучения резонанса в параллельном колебательном контуре воспользуемся методом комплексных амплитуд. Пусть генератор тока $Г_I$ дает ток, амплитуда которого остается неизменной и равной $\hat{I}_0$. Применим правило Кирхгофа для узла, тогда получим:

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_C + \hat{I}_{LR}, \tag{5}$$

где $\hat{I}_C$ и $\hat{I}_{LR}$ - это комплексные амплитуды тока, проходящего через конденсатор и катушку с резистором соответственно.

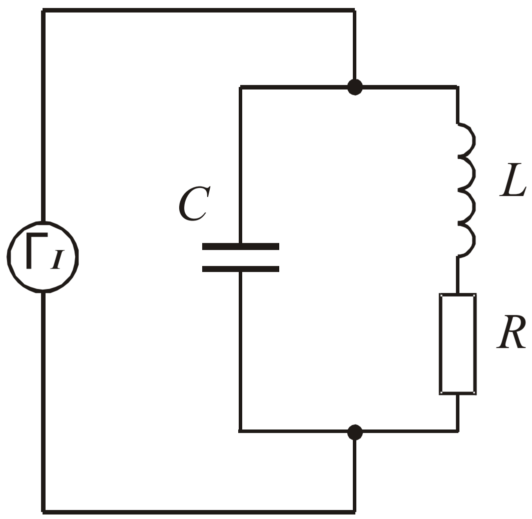



Рис. 3. Параллельный колебательный контур.

Рассмотрим комплексную амплитуду напряжения на конденсаторе

$$\hat{U}_C = \hat{I}_C \frac{1}{i\omega C} = \hat{U}_{LR} = \hat{I}_{LR}(R + i\omega L) \tag{6}$$

Выразим ток через конденсатор из соотношения (5) и, подставив его в (6), получим величину $\hat{I}_{LR}$.

$$\hat{I}_{LR} = \hat{I}_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\,2\delta\omega} \tag{7}$$

Здесь были введены стандартные обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad 2\delta = \frac{R}{L}. \tag{8}$$

Как видно из выражения (7), амплитуда тока, текущего через катушку и резистор, имеет резонансный характер. Запишем модуль комплексной величины (7).

$$|I_{LR}| = |I_0| \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \tag{9}$$

Исследуя выражение (9) на экстремум, легко получить выражение для резонансной частоты:

$$\omega_{\text{РЕЗ}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2. \tag{10}$$

Рассмотрим случай $\delta << \omega_0$, тогда

$$|I_{LR}| = |I_0| \frac{\omega_0}{2\delta} = |I_0|\, Q \approx |I_C|$$

В случае, когда добротность колебательного контура велика ($Q$>>1), и частота тока $\omega \approx \omega_0$, амплитуда тока $\hat{I}_{LR}$ в $Q$ раз превосходит амплитуду тока, текущего через генератор. Как видно из соотношения (5), вблизи частоты $\omega_0$ также происходит резкое увеличение амплитуды тока, текущего через конденсатор. Таким образом, если амплитуду полного тока в цепи поддерживать постоянной, то при изменении частоты генератора амплитуды токов в индуктивной и емкостной ветвях будут изменяться по резонансному закону и при резонансной частоте достигнут одинаковых максимальных значений. Вот почему такая ситуация называется резонансом токов. При резонансе токов амплитуда тока, циркулирующего в колебательном контуре в $Q$ раз превосходит амплитуду тока, текущего через контур.

Вычислим сопротивление колебательного контура при резонансе, зная напряжение в контуре и ток, текущий через контур.

$$r_{\text{РЕЗ}} = \frac{U_C}{I_0} = \frac{1}{I_0} I_C \frac{1}{\omega_0 C} = Q \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{R}{R} = Q^2 R \tag{11}$$

Несмотря на то, что при резонансе токов сопротивление колебательного контура резко возрастает, амплитуду протекающего через контур тока поддерживает неизменной генератор тока $Г_I$.

Воспользуемся методом векторных диаграмм для изучения резонанса в параллельном колебательном контуре. Построение векторной диаграммы мы начнем с самого сложного участка, содержащего катушку $L$ и резистор $R$. Выделим величину, являющуюся общей для элементов, и построим ее на комплексной плоскости. Нарисовав ток $I_{LR}$, построим напряжения на катушке $U_L = i\omega L\, I_{LR}$ и резисторе $U_R = I_{LR}\ R$..

Как следует из схемы, $U_L + U_R = U_C$. Зная напряжение на конденсаторе $U_C$, легко построить ток через него: $I_C = i\omega C\, U_C$. Складывая токи $I_C + I_{LR}$, мы получим ток, текущий через контур, – ток генератора $I_0$.

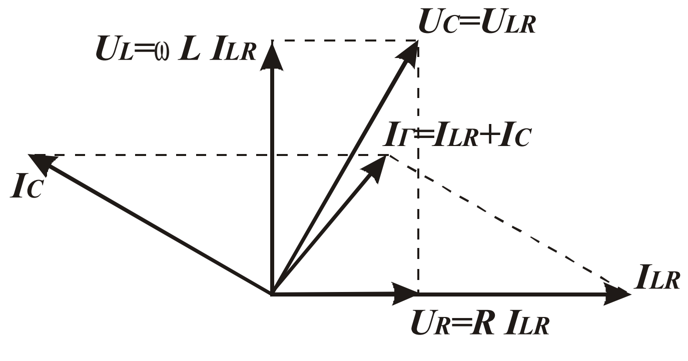



Рис.4 Векторная диаграмма токов и напряжений для параллельного контура

Анализ векторной диаграммы показывает, что в параллельном колебательном контуре возможен резонанс тока. При резонансе резко возрастают токи $I_C$ и $I_{LR}$ и принимают свои максимальные значения. Приравнивая амплитуды токов, мы получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} ,$$

откуда

$$\omega_0^4 = \omega^4 + 4\delta^2\omega^2. \qquad (12)$$

Выражая  и раскладывая в ряд в случае малого затухания (8), мы получим

$$\omega_{\text{РЕЗ}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2. \qquad (13)$$

Анализ показывает, что при резонансе токов в параллельном колебательном контуре разность фаз между напряжением на контуре и током, текущим через контур, становится равной нулю.

Как видно из сравнения формул (10) и (13), метод комплексных амплитуд и метод векторных диаграмм дают одинаковые результаты.

При анализе процессов в колебательном контуре важнейшей характеристикой является добротность контура $Q$. Физический смысл добротности легко понять из баланса энергии для последовательного контура: добротность есть отношение средней колебательной энергии к энергии, теряемой за период (с коэффициентом $2\pi$):

$$Q = 2\pi\,\frac{LI^2}{RI^2T} = 2\pi\,\frac{L}{R\,2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} . \qquad (14)$$

Таким образом, добротность характеризует рассеяние (потери) энергии в колебательном контуре, т.е. определяет степень затухания колебаний.

С другой стороны, добротность показывает – во сколько раз напряжение на конденсаторе (или на индуктивности) при резонансе превосходит напряжение, подаваемое на контур от генератора, т.е.

$$\boxed{Q = \frac{U_{C\ \text{рез}}}{U_{\text{ген}}}} \qquad (15).$$

Отношение резонансного сопротивления контура $R_{\text{рез}}$ к его активному сопротивлению $R$ равно квадрату добротности контура $Q$:

$$\frac{R_{\text{конт. рез.}}}{R} = Q^2 . \qquad (16)$$

Таким образом, для переменного тока с частотой $\omega_0$ параллельный колебательный контур представляет собой большое сопротивление (обычно $R_{\text{конт. рез.}}/R \approx 10^4$). Это позволяет использовать резонанс токов для выделения той или иной гармоники сигнала сложной формы (резонансный усилитель).

Для контуров, добротность которых $Q >> 1$, добротность рассчитывается по ширине резонансной кривой для тока (или напряжения на любом элементе):

$$\boxed{Q = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\Delta\omega}} \qquad (17).$$

Здесь $2\Delta\omega$ — полоса пропускания, которая на графиках зависимостей тока или напряжений в контуре от частоты определяется на уровне $\boxed{1/\sqrt{2}}$ от соответствующих резонансных значений.

Добротность контура связана с декрементом затухания $\nu$ соотношением:

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\nu}}. \qquad (18)$$

Для достаточно больших значений добротности все ее определения оказываются эквивалентными.

## Экспериментальная установка.

Оборудование экспериментальной установки состоит из специальной монтажной панели, генератора, вольтметра и осциллографа (рис.5). Из элементов на панели собирается сначала последовательный колебательный контур, затем – параллельный.

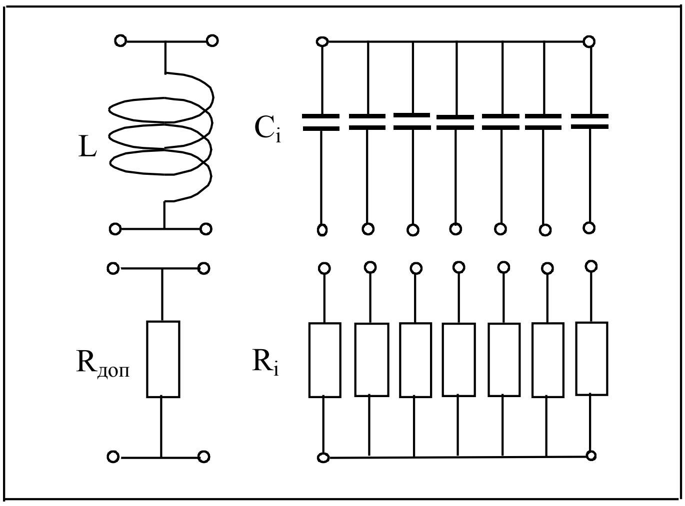



Рис. 5. Монтажная плата с элементами R, L, C.

В качестве источника энергии для поддержания колебаний используется генератор напряжения переменной частоты. Измерительная аппаратура состоит из вольтметра и осциллографа.

На монтажной панели расположена одна катушка индуктивности и набор резисторов и конденсаторов. Здесь же имеется резистор $R_{доп}$, включаемый последовательно с параллельным контуром для сохранения постоянства тока через контур при изменении частоты подводимого к нему напряжения.

При выборе $R_i$ и $C_i$ из набора необходимо руководствоваться следующими соображениями:

– добротность контура должна быть достаточно большой ($Q >> 1$);

– с другой стороны, для верхней части резонансной кривой должно быть возможно экспериментальное определение количества точек, позволяющего уверенно измерить ее ширину (т.е. резонансная кривая должна быть не слишком ”острой” и не слишком ”тупой”).

### Упражнение 1. Амплитудная резонансная кривая последовательного контура.

Изучается зависимость напряжения на конденсаторе $U_C$ от частоты генератора $f$.

Собрать схему в соответствии с рис. 6.

Включить генератор и вольтметр и дать им прогреться. Удобно взять с генератора напряжение $U_{ген}$ = 1 В (хотя можно взять и любое другое).

Подобрать значения $R_i$ и $C_i$ такими, чтобы резонансная кривая $U_C(f)$ была бы удобной для измерений (см. рекомендации выше).

Изменяя частоту генератора, получит зависимость $U_C(f)$, занося результаты измерений в таблицу.

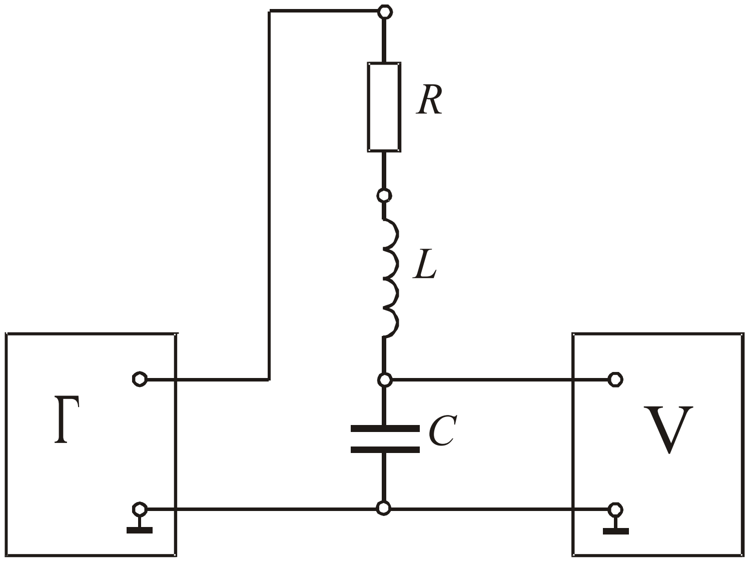



Рис.6. Подключение приборов к последовательному колебательному контуру.

**Обработка измерений.**

Представить эту зависимость графически.

Определить по графику резонансную частоту.

Вычислить индуктивность контура (по ф-ле (4)).

Определить добротность исследованного контура по ф-ле (15) и по ширине резонансной кривой (ф-ла (17)).

Вычислить общее сопротивление $R$ контура (по ф-ле (14)) и активное сопротивление катушки индуктивности $R_L$ как разность величин $R$ и $R_i$.

### Упражнение 2. Фазовые соотношения в последовательном контуре.

Изучается зависимость фазового сдвига между током в контуре и напряжением, действующим на контуре, от частоты переменного напряжения $f = \omega/2\pi$. Используется осциллографический метод.

Собрать схему в соответствии с рис. 7, оставив значения $R_i$ и $C_i$, выбранные в упражнении 1.

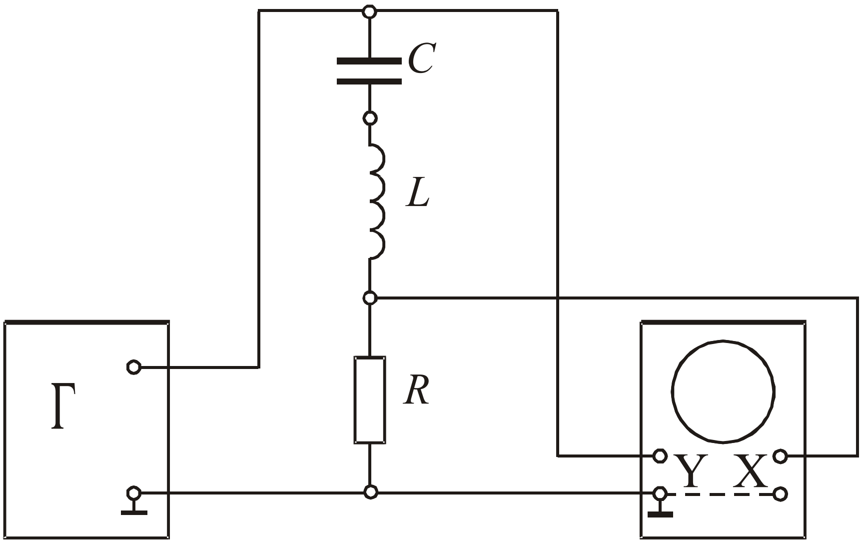



Рис. 7. Электрическая схема для изучения фазовых соотношений в последовательном контуре.

На вход X осциллографа подать напряжение с резистора $R_i$, которое пропорционально току I.

На вход Y подать напряжение, действующее на всем контуре ($U_{ген}$).

На экране осциллографа при этом должен наблюдаться эллипс, который при резонансе вырождается в прямую линию.

Зарисовать вид эллипса для случаев: $f < f_{рез}$ ; $f = f_{рез}$ ; $f > f_{рез}$.

Для нескольких (5÷7) выбранных частот *f* ″до″ и ″после″ резонанса (но не слишком далеко от резонансной частоты) измерить параметры эллипса $2y_0$ и $2y$ (см. рис. 8.). Результаты измерений оформить в виде таблицы:

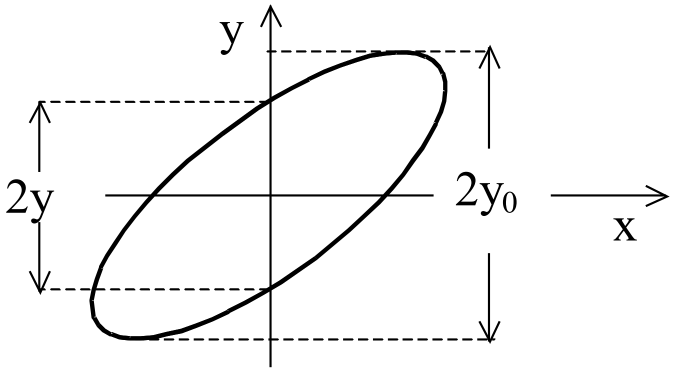



Рис. 8. Измеряемые параметры эллипса, наблюдаемого на экране осциллографа.

**Обработка измерений.** По формуле $\boxed{\varphi = \pm \arcsin \frac{y}{y_0}}$ вычислить значения фазового сдвига для частот f ″до″ и ″после″ резонанса. Построить график зависимости $\varphi$(f).

Обратить внимание на то, что “метод эллипса” (осциллографический метод) не позволяет определить знак фазового сдвига $\varphi$. Знак $\varphi$ можно определить из анализа теоретической зависимости:

$$\boxed{tg\ \varphi(\omega) = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}}. \qquad (19)$$

Вычислить $\varphi$ по формуле (19) для тех же значений частот, которые были в эксперименте.

На графике теоретическую зависимость изобразить линией, а экспериментальные значения $\varphi$ отметить точками.

**Упражнение 3. Определение неизвестных параметров катушки индуктивности L и $R_L$ резонансным методом.**

Собрать схему в соответствии с рис. 9. Она представляет собой последовательный контур, в котором исключен резистор $R$ и осталось только активное сопротивление катушки $R_L$.

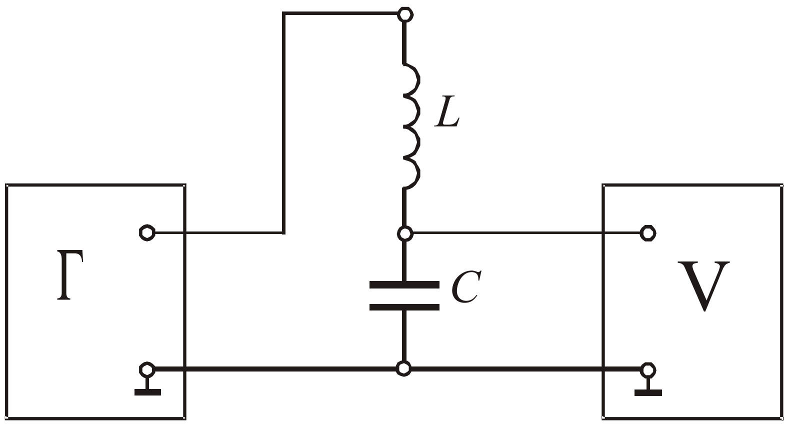



Рис. 9. Электрическая схема для изучения характеристик последовательного контура.

Записать значение выходного напряжения генератора $U_{\text{ген}}$ (и не изменять его в ходе эксперимента).

Последовательно используя различные конденсаторы из набора, для каждого из них определить резонансную частоту $f_{\text{рез}}$ и значение напряжения на конденсаторе при резонансе $U_{C\,\text{рез}}$.

Занести эти значения в таблицу.

**Обработка измерений.** Как известно,

$$\boxed{f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}, \qquad \boxed{Q = \frac{1}{R_L}\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Если в этих формулах в качестве аргумента рассматривать величину $\boxed{1/\sqrt{C}}$, то тогда их можно записать так:

$$\boxed{f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L}}\frac{1}{\sqrt{C}}}, \qquad \boxed{Q = \frac{\sqrt{L}}{R_L}\frac{1}{\sqrt{C}}}.$$

По результатам эксперимента построить зависимости $f_{рез}$ и $Q$ от $1/\sqrt{C}$ .

Крутизна прямых линий, проведенных на этих графиках, дает возможность рассчитать неизвестные величины $L$ и $R_L$ :

$$L = \frac{1}{4\pi^2\left(\frac{\Delta f_{рез}}{\Delta\left(1/\sqrt{C}\right)}\right)^2}\ , \text{ и затем } \qquad R_L = \sqrt{L}\,\frac{\Delta\left(1/\sqrt{C}\right)}{\Delta Q}\ .$$

Сравнить их с ранее определенными значениями (см. упражнение 1 ).

**Упражнение 4 Резонанс в параллельном контуре.**

Собрать электрическую схему в соответствии с рис. 10. Здесь в цепи имеется $R_{доп} = 270$ кОм, которое обеспечивает постоянство полного тока при изменении частоты, поскольку $R_{доп} >> |Z_{рез}|$ . Величины $R$ и С следует взять такими же, как и в упражнении 1.

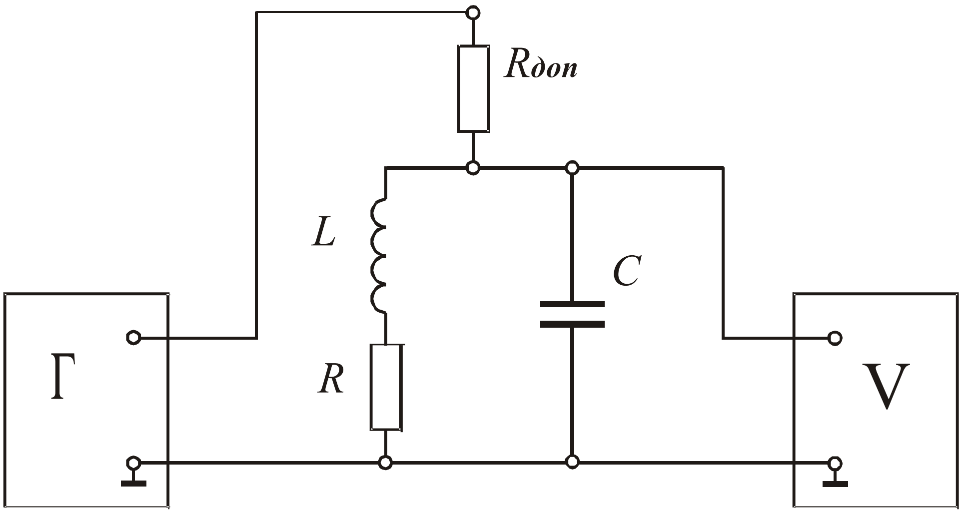



Рис. 10. Подключение приборов к параллельному резонансному контуру.

Если с генератора подать напряжение $U_{ген} = 1$ В, то на конденсаторе напряжение $U_C$ будет гораздо меньше (благодаря наличию в цепи резистора $R_{доп}$) и можно не учитывать его фазовый сдвиг относительно фазы напряжения генератора.

Изменяя частоту напряжения генератора $f$, снять зависимость $U_C(f)$. Результаты занести в таблицу.

**Обработка измерений.** Построить график зависимости $U_C(f)$. Определить добротность $Q$ по полуширине резонансной кривой, используя формулу $\boxed{Q = \frac{f_{рез}}{2\Delta f}}$ , где $2\Delta f$— полоса пропускания. Сравнить значение $Q$ с тем, которое получено в упражнении 1.

**Контрольные вопросы.**

1. Начертить схемы последовательного и параллельного контуров. Объяснить процессы, протекающие в контуре при подключении к нему источника переменного напряжения.
1. Какими уравнениями описываются явления в контуре при рассмотрении их как вынужденных колебаний ?
2. Как записывается закон Ома для цепи переменного тока ?
3. Как записывается сопротивление контура переменному току ?
4. Как изменяется сопротивление контура с изменением частоты переменного напряжения ?
5. Как изменяются ток и напряжение на отдельных элементах контура при изменении частоты ? Изобразить эти зависимости графически.
6. Каковы фазовые соотношения между напряжениями и токами в последовательном и параллельном контурах ?
7. Нарисовать векторные диаграммы токов и напряжений для последовательного и параллельного контуров.
8. Что такое добротность колебательного контура? Как можно рассчитать добротность и определить ее экспериментально ?

**Литература.**

1. С.Г.Калашников. Электричество. М. 2004.
2. А.Н.Матвеев. Электричество и магнетизм. М. 2005.