ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НГУ

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В СУНЦ НГУ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 9 КЛАССОВ

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

Новосибирск
2010

УДК 330.1
ББК 65.012

П 44

Подготовительные курсы по математике в СУНЦ НГУ для учащихся 9-х классов. Учеб. пособие / Д. Г. Храмцов, Г. Я. Куклина, А. Ю. Авдюшенко. 2-е изд., исп. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010. 76 с.

Пособие предназначено для учащихся 9 классов общеобразовательных школ, желающих расширить и углубить свои знания и умения в математике с целью продолжения обучения в старших классах на уровне высшего среднего, будь то самостоятельная работа, учеба в профильных классах и школах, или индивидуальные занятия с опытным преподавателем.

По материалам настоящего пособия проводятся занятия на вечерних подготовительных курсах для поступления в СУНЦ НГУ.

Под редакцией А. А. Никитина, А. С. Марковичева

Рецензент
к.ф.-м.н., доцент М. Г. Пащенко

Предисловие

В Новосибирском государственном университете и Специализированном учебно-научном центре НГУ накоплен значительный опыт довузовской работы со школьниками. В течение многих десятилетий преподаватели НГУ участвуют в проведении олимпиад разного уровня; успешно работают подготовительные курсы для будущих абитуриентов и заочная школа; ежегодно проводится Летняя физико-математическая школа, через которую осуществляется набор учащихся в СУНЦ НГУ; проходят Летние школы Юных программистов; ведутся факультативные и кружковые занятия в ряде школ Новосибирска. Более десяти лет назад в ответ на запросы учащихся и родителей на подготовительных курсах НГУ приступили к занятиям по математике, физике и химии со школьниками девятых классов, желающими поступить в СУНЦ НГУ.

Предлагаемое учебное пособие в определенной мере отражает опыт занятий по математике на подготовительных курсах СУНЦ НГУ и включает в себя темы и задачи, которые могут быть условно разнесены на три раздела:

– углубление школьного курса;
– факультативный материал;
– олимпиадные задачи начального уровня.

Учебное пособие рассчитано на учащихся девятых классов общеобразовательных школ, желающих расширить и углубить свои знания и умения по математике с целью продолжить свое обучение в старших классах на уровне выше среднего, будь то самостоятельная работа или учеба в профильных классах и школах.

Предлагаемое учебное пособие является продолжением и углублением первого издания материалов подготовительных курсов по математике в СУНЦ НГУ для учащихся девятых классов. Добавлены краткие тезисы теоретического материала в текстах занятий, где это нам показалось необходимым, а также количество предлагаемых задач стало существенно больше – как в самих классных занятиях, так и в домашних заданиях.

Большая часть предлагаемых задач заимствована из приведенного в пособии списка литературы, но есть и немало авторских, принадлежащих перу Д. Г. Храмцова, задач, предлагавшихся на Всесибирской олимпиаде школьников, в Летней школе СУНЦ НГУ и других олимпиадах такого уровня. Часть используемых заданий взята из пособий Заочной физико-математической школы при

СУНЦ НГУ прошлых лет, авторам и разработчикам которых мы выражаем искреннюю благодарность.

В результате доработки пособие оказывается более полезным для системы дополнительного образования тех, кто стремится к качественному овладению математическими знаниями дополнительно к школьному курсу.

Пособие может быть интересным и для тех, кто уже определился в своих увлечениях, и для тех, кто еще только собирается это сделать. Ученики, родители, учителя имеют возможность идти дальше по предлагаемым конспектам, используя опыт, накопленный более десяти лет в работе с сотнями школьников, которые успешно прошли данные курсы и продолжали и/или продолжают успешное обучение в Специализированном учебно-научном центре НГУ, в Новосибирском государственном университете и так далее.

Данный курс, с одной стороны, может быть использован для самостоятельных занятий, с другой стороны, при работе в классе он может помочь подготовить мышление ребят к качественному восприятию того объема знаний и такого стиля преподавания, которые их ждут в случае поступления в Специализированный учебно-научный центр НГУ. Подборка задач осуществлена преподавателями Специализированного учебно-научного центра НГУ, желающими видеть своих вновь приходящих учеников знающими, умеющими и понимающими важные математические факты и понятия, готовыми слушать и слышать математические рассуждения.

Процесс усвоения новых математических идей или методов, как правило, требует времени для ознакомления, привыкания, осознания и включения этого нового в ежедневные действия и умственные усилия по решению задач. Благодаря определенной последовательности подобранных задач можно постепенно продвигаться по ступенькам некоторой воображаемой винтовой лесенки, знакомясь с новой идеей, затем через некоторое время, узнавая ее в новой задаче и, наконец, применяя ее самому на одном из следующих этапов работы.

Хочется надеяться, что пособие поможет всем, кто к этому стремится, стать более уверенным в своих математических знаниях и умениях, более способным к решению необычных и нестандартных задач.

Задачи подбирались на свой «вкус», мы будем рады, если они вам тоже понравятся.

Пробуйте, наслаждайтесь, а далее – подбирайте себе новые задания уже самостоятельно!

Желаем успехов!

Занятие 1.
Вводное

1. Вообразим, что Земной Шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее, вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 м. Тогда, разумеется, обручи отстанут от поверхности тел, которые они раньше стягивали, и образуется некоторый зазор. Спрашивается, в каком случае этот зазор будет больше?

2. Участники заседания обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что всего рукопожатий было 66. Сколько человек явилось на заседание?

3. С помощью циркуля и линейки разделить отрезок на три равные части.

4. Показать, что в любой выпуклый четырехугольник можно вписать параллелограмм.

5. Сколько существует всего трехзначных чисел?

6. Решить неравенство и отметить промежутки на числовой оси:

$$\frac{x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(2x-3)}\geq 0.$$

7. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2005?

8. По дереву ползет гусеница. За день она поднимается на 6 м, а за ночь – спускается на 4 м. За сколько дней она доползет до вершины, если высота дерева 14 м?

Домашнее задание 1

1. Упростить выражение:

$$\left(\frac{6a}{a^2-4b^2}+\frac{2}{2b-a}-\frac{4}{a+2b}\right):\left(\frac{a^2+4b^2}{a^2-4b^2}-1\right).$$

2. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99 %. За время хранения влажность стала 98 %. На сколько процентов уменьшилась масса крыжовника?

3. Прямая MN проведена через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно ее основаниям. Найти MN, если основания равны a и b.

4. Построить графики функций:

а) $y=|x|+|x-1|$;   б) $y=||x|-1|-1|$.

5. Разложить на множители выражение: n^4+n^2+1.

6. Сумму двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2007?

Занятие 2.
Графики известных функций, преобразование графиков. Графики функций, содержащих знак модуля. Множества точек на координатной плоскости

Нужно уметь строить:
1. График линейной функции.
2. График гиперболы.
3. График параболы.
4. Преобразования графиков.
5. Графики с модулями.

Задачи

1. Построить графики функций:
- $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$,
- $y=\frac{3}{x-1}+1$,
- $y=2|x-1|-1$,
- $y=|2|x-1|-1|$,
- $y=|2(x-1)^2-2|$,
- $y=\left|\frac{3}{x-1}+1\right|$.

2. Постройте график функции: $y=|1-2x|$.

3. Постройте график функции: $y=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-1)^2}$.

4. Постройте график функции: $y=|x^2+2x-8|$.

5. Постройте график функции: $y=|||x|-1|-1|-1|$.

6. Изобразите множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению: $|x|+|y|=1$.

7. Изобразите множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению: $(|x+y|-1)\cdot(|x-y|-1)=0$.

Домашнее задание 2

1. Изобразить множество точек на плоскости: $|x+y|=1$.

2. Построить график функции: $y=|2x-1|+|x|+|2x+1|$.

3. Из молока жирностью 5 % делают творог жирностью 15,5 %, при этом остается сыворотка жирностью 0,5 %. Определить, сколько творога получается из 1 т молока.

4. Определить, какой цифрой заканчивается число $9999^{999^{99^{9}}}$.

5. Разложить на множители выражение: x^7+x^2+1.

6. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки « + » и « – » так, чтобы в результате получился 0?

Занятие 3.
Принцип Дирихле. Начало

Если известно, что в k клетках сидит $(k+1)$ кролик, то существует клетка, в которой сидит не менее двух кроликов.

1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?

2. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем в каждом ящике лежали яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

3. В коробке лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих, 8 зеленых, 4 желтых. В темноте берем из коробки карандаши. Какое наименьшее количество карандашей надо взять, чтобы среди них заведомо было не меньше четырех карандашей одного цвета?

4. В школе 30 классов и 1000 учащихся. Докажите, что есть класс, в котором не менее 34-х учеников.

5. Докажите, что из любых трех целых чисел можно найти два, сумма которых делится на два.

6. Докажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

7. Пятнадцать мальчиков собрали вместе 100 орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество орехов.

8. В квадрат со стороной 1 м бросили произвольным образом 51 точку. Доказать, что квадратиком 20×20 см^2 можно накрыть какие-то три точки.

Домашнее задание 3

1. Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата (т. е. каждая команда сыграет с каждой один раз) найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

2. Верно ли, что среди любых 34 разных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых вдвое больше другого?

3. Рыночная цена картофеля в связи с ненастной погодой повысилась на 20 %. Через некоторое время цена картофеля понизилась на 20 %. Когда картофель стоил дешевле: до повышения или после снижения цены и на сколько процентов?

4. Сумма четырехзначного числа и трехзначного числа равна 7136. Если зачеркнуть левую цифру первого числа, то получится второе. Найти эти числа.

5. Решить в натуральных числах уравнение: $x^2 - y^2 = 31$.

6. В классе 33 ученика, а сумма их возрастов составляет 430 лет. Справедливо ли, что найдутся в классе 20 учеников, сумма возрастов которых больше 260 лет?

Занятие 4.
Принцип Дирихле. Продолжение

1. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст – 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

2. Даны 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Доказать, что среди их попарных разностей найдутся три одинаковых.

3. Докажите, что из любых 10 чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 10.

4. Докажите, что никакая прямая не может пересекать все три стороны треугольника.

5. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не «били» друг друга?

6. На кафтане площади 1 расположены 4 заплаты, площадь каждой из которых не менее 5/8. Докажите, что какие-то две из них имеют общую часть площади не менее 1/3.

7. На организационном собрании Всероссийского общества тупых 47 делегатов из 12 регионов второй день пытаются рассесться за круглым столом так, чтобы среди любых 15 сидящих подряд делегатов были представители всех регионов. Смогут ли они это сделать и приступить, наконец, к делу?

8. Внутри прямоугольника 19×82 размещено 160 квадратов 1×1. Доказать, что можно выделить круг радиуса 1, целиком лежащий внутри прямоугольника и не пересекающийся ни с одним из этих квадратов.

Домашнее задание 4

1. Числа 1, 2, ..., 7 разбиты на две группы. Докажите, что произведение чисел хотя бы в одной из групп меньше 72.

2. Доказать, что биссектрисы двух внешних и одного внутреннего угла треугольника пересекаются в одной точке.

3. Построить график функции: $y = |x-2| + |x| + |x+2| + |x+4|$.

4. Построить график функции: $y = \dfrac{2|x|-3}{3|x|-2}$.

5. В какое наименьшее число цветов можно окрасить клетки бесконечного клетчатого листа бумаги так, чтобы любые четыре клетки, расположенные в виде буквы «т» – одна в центре и три соседних с ней по стороне – были окрашены в разные цвета?

6. На клумбе растет 51 цветок так, что из любых трех цветков некоторые два находятся на расстоянии не более 1 м друг от друга. Доказать, что есть круг радиуса 1 м, в котором растет не менее 26 цветков.

Занятие 5.
Делимость

1. Делится ли число $2^9 \times 3$ на 2? А на 5? На 6? Делится ли число $2^2 \times 3^3 \times 5^5$ на 120?

2. Число a не делится на 3. Может ли делиться на 3 число $2a$?

3. Число a четно. Верно ли, что число $3a$ делится на 6?

4. Число $5a$ делится на 3. Верно ли, что число a делится на 3?

5. Число $15a$ делится на 6. Верно ли, что число a тоже делится на 6?

6. Может ли в разложении числа n^2 на простые множители содержаться ровно 5 троек?

7. Если число a делится на 3 и на 4, то следует ли отсюда, что оно делится и на 12? А если число a делится на 4 и на 6, то следует ли отсюда, что оно делится на 24?

8. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

9. Может ли число, записанное при помощи 100 единиц, 100 двоек и 100 троек, быть точным квадратом?

10. Докажите, что: а) число $n^3 - n$ делится на 3; б) $n^3 - n$ делится на 24 для любого нечетного n.

11. Произведение любых пяти последовательных чисел делится на 120. Докажите это.

12. Докажите, что число, составленное из пятидесяти пяти единиц, является составным.

Домашнее задание 5

1. Решите уравнение в натуральных числах: $x^2 - y^2 = 303$.

2. Решить неравенство: $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x+1}$.

3. Докажите, что в выпуклом n-угольнике не может быть больше трех острых углов.

4. Доказать, что из любого двадцатизначного числа, в записи которого нет нулей, можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы получившееся число делилось на 37.

5. Докажите, что если $a^2 + 5ab + b^2$ делится на 7, то и $a^2 - b^2$ делится на 7.

6. Сплав меди и олова весит 18 кг, в нем 55 % меди. Сколько килограммов олова надо добавить, чтобы содержание меди уменьшилось до 45 %?

Занятие 6.
Делимость и остатки

Определение 1. Число a делит число b ($a|b$) или число b делится на a, если существует число x такое, что $ax = b$, где a, b, x – целые числа.

Свойства:

- $a|a$,
- $a|b$ и $b|a$ => $|a|=|b|$,
- $a|b$ и $b|c$ => $a|c$,
- $a|b$ => $a|bc$,
- $a|b$ и $a|c$ => $a|(b+c)$.

Пусть a, b – целые числа, $b \neq 0$. Тогда существуют единственные целые числа q, r такие, что $a = bq + r$, причем $0 \le r < |b|$.

Определение 2. Целое число p называется простым, если оно делится только на 1 и на само себя.

Число называется составным, если оно не простое.

Основная теорема арифметики

Всякое натуральное число n однозначно (с точностью до перестановки множителей) раскладывается в произведение простых чисел.

Пусть $m > 0$, m – натуральное число.

Определение 3. $x \equiv y \pmod m$, если $m \mid (x - y)$.

Свойства:

- $x \equiv x \pmod m$,
- $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$,
- $x \equiv y$, $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$,
- $0, 1, \ldots, m-1$ – возможные остатки при делении на m.

Остатки суммы (произведения) двух чисел равны сумме (произведению) остатков. Признаки делимости на 3, 9 (сравнимость числа со своей суммой цифр при делении на 9).

Задачи

1. Пусть $y = 100k - 16$, k – целое число. Найти остатки при делении y на 100, 5.
2. Докажите, что остаток при делении простого числа на 30 – простое число или 1.
3. Найти остаток от деления числа $1999 \cdot 2000 \cdot 2001 + 2001^3$ на 7.
4. Найти остаток от деления числа 12^{100} на 13.
5. Найти остаток от деления числа $2^7+2^8+2^9+2^{10}$ на 5.
6. Найдите две последние цифры числа 1999^{2003}.
7. Докажите, что если число $(a+1)$ делится на 3, то число $(4+7a)$ тоже делится на 3.
8. Пусть n, m – натуральные числа, $m \neq 1$. Известно, что число $(7n+1)$ делится на m и число $(8n+3)$ делится на m. Найдите m.

Домашнее задание 6

1. Решить уравнение: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
2. Докажите, что квадрат любого натурального числа либо делится на 9, либо дает при делении на 3 остаток 1.
3. Докажите, что для любого натурального числа n выражение $n^7 + 6n$ делится на 7.
4. Докажите, что существует число, состоящее из одних единиц, делящееся на 2007.
5. Трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 37. Докажите, что сумма чисел $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ тоже делится на 37.
6. Доказать, что квадрат любого натурального числа при делении на 4 дает остатки либо 0, либо 1.

Занятие 7.
Планиметрия.
Решение прямоугольных треугольников

Факты

1. Теорема Пифагора.
2. $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$.

3. Медиана m_a в треугольнике равна половине стороны a тогда и только тогда, когда угол A в треугольнике прямой. Центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы.
4. Геометрическое множество точек (ГМТ), из которых отрезок виден под углом 90°, – окружность.
5. Подобные треугольники в прямоугольном треугольнике. Построение квадрата, равновеликого данному прямоугольнику.
6. Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике – определения, свойства.

Задачи

1. Дана гипотенуза c и радиус r вписанной в прямоугольный треугольник окружности. Найти площадь треугольника.
2. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника.
3. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.
4. Дан треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см. Найти расстояние между центрами описанной и вписанной окружности.
5. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов равны 5 и 12?
6. Длина высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, равна 25 см, а радиус вписанной окружности равен 8 см. Найти длину основания треугольника.
7. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100. Найти катеты этого треугольника.
8. На большем катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Определить радиус этой окружности, если меньший катет треугольника равен 7,5 см, а длина хорды, соединяющей вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и окружности, равна 6 см.

Домашнее задание 7

1. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе, как на стороне во внешнюю сторону треугольника построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата.

2. Стальную плитку размерами 19×79 обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, имея в распоряжении только эту плитку и карандаш.

3. Найдите площадь квадрата, вписанного в равносторонний треугольник со стороной a.

4. Построить графики функций: а) $y=\frac{|x|}{x}-1$; б) $y=|x-2|-x$.

5. Натуральные числа a и b таковы, что $34a=43b$. Докажите, что число $a+b$ – составное.

6. Докажите, что найдется степень тройки, заканчивающаяся на 001.

Занятие 8.
Планиметрия. Параллельные прямые

Задачи

1. С помощью циркуля и линейки разделить отрезок на четыре равные части.

2. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.

3. Доказать, что для трапеции следующие четыре точки: середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон – лежат на одной прямой.

4. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найти стороны треугольника.

5. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники, и их вершины последовательно соединены. Найти отношение периметра полученного четырехугольника к периметру данного квадрата.

6. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

7. Основания двух правильных треугольников со сторонами a и $3a$ лежат на одной и той же прямой. Треугольники расположены по разные стороны от прямой и не имеют общих точек, а расстояние между ближайшими концами их оснований равно $2a$. Найти расстояние между вершинами треугольников, не принадлежащими данной прямой.

8. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки длиной 4 и 2 см, а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15}$ см. Каковы длины сторон треугольника, если известно, что они выражаются целыми числами?

Домашнее задание 8

1. Построить биссектрису угла с недоступной вершиной.

2. Дан параллелограмм $OABC$. Проведена прямая, которая отсекает от стороны OA одну треть, а от стороны OC одну четверть, считая от вершины O. Какую часть эта прямая отсекает от диагонали OB?

3. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу в отношении $1:3$. В каком отношении делит ее высота, опущенная из прямого угла?

4. Решите неравенство: $|x^3-1|>1-x$.

5. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде отношения квадрата к кубу натурального числа.

6. Двадцать пять школьников стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдется школьник, у которого левый сосед выше правого.

Занятие 9.
Замечательные точки в треугольнике

Задачи

1. Дать три эквивалентных определения биссектрисы.

2. Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной окружности.

3. Доказать, что биссектриса угла в треугольнике делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим к данному углу сторонам.

4. Срединные перпендикуляры в треугольнике пересекаются в одной точке – центре описанной окружности. Докажите это.

5. Высоты треугольника пересекаются в одной точке – ортоцентре. Докажите это.

6. Доказать, что треугольник, отсекаемый от заданного треугольника отрезком, соединяющим основания двух высот, подобен исходному треугольнику.

7. Найти радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c.

8. С помощью одной линейки опустить перпендикуляр из точки M на диаметр полукруга AB.

Домашнее задание 9

1. Пусть точка O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что площади треугольников AOB и COD равны. Доказать, что $AD \parallel BC$.

2. В треугольнике ABC провели высоты AP и BQ. Известно, что $AB = 2PQ$. Найдите угол C.

3. На сколько нулей оканчивается число 100! ?

4. Баба-Яга и Кащей собрали некоторое количество мухоморов. Количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги в 13 раз больше, чем на мухоморах Кащея, но после того, как Баба-Яга отдала Кащею свой мухомор с наименьшим числом крапинок, на ее мухоморах стало крапинок только в 8 раз больше, чем у Кащея. Докажите, что вначале у бабы-Яги было не более 23 мухоморов.

5. Доказать, что среди чисел вида $210n+1$ где n – любое натуральное число, бесконечно много составных чисел.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD. Доказать, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

Занятие 10.
Комбинаторика

Задачи

1. В магазине имеются 5 разных чашек, 3 разных блюдца, 4 различных чайных ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

2. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

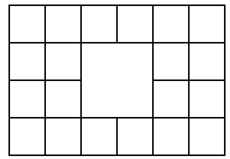
3. Сколько всего пятизначных чисел?

4. Сколько существует последовательностей из n различных чисел?

5. Сколькими способами можно в классе из 30 человек выбрать актив из трех человек: командира, культорга, спорторга?

6. Сколько различных «слов» можно получить из слова «парабола»?

7. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 2 ладьи, чтобы они не «били» друг друга?



8. Сколько различных кратчайших путей из левого нижнего угла в правый верхний?

Домашнее задание 10

1. Решите уравнение: $(x-1)^4 + 2\cdot(x^2-2x) = 22$.

2. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольный участок земли, отгороженный с трех сторон забором длины 300 м?

3. Дано, что a, b, c – три различные цифры. Если сложить все шесть двухзначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, то получим 528. Найдите эти цифры.

4. Заштриховать на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$(x+y+1)(y+1-x) \ge 0.$$

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4z-2 \\ x^2+z^2=4y-2 \\ y^2+z^2=4x-2 \end{cases}.$$

6. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи разного цвета, чтобы они «били» друг друга?

Занятие 11.
Олимпиадные задачи

Задачи

1. Расшифровать ребус.

```
-МУХА | ХА
 ХА   | УХА
 ---
  КХ
 -АР
  ---
  УХА
 -УХА
  ---
    0
```

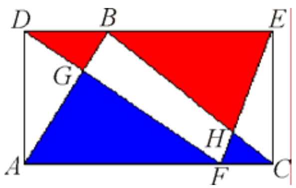
2. Четыре ученицы: Мария, Нина, Ольга и Полина заняли на олимпиаде первые 4 места. На вопрос, кто из них какое место занял, они ответили:

- Ольга – второе, Полина – третье;
- Ольга – первое, Нина – второе;
- Мария – второе, Полина – четвертое.

В каждом из ответов одна часть верна, а другая неверна, какое место заняла каждая из учениц?

3. Прозвенел звонок с последнего урока, и ученики устремились в столовую. Пошел туда и учитель. Ученики проголодались сильнее и прибежали в столовую быстрее. В этот момент учитель прошел 80 м. Но учеников без учителя кормить не стали, и они побежали назад. Когда они встретились с учителем, он прошел еще 16 м. Определите расстояние от класса до столовой.

4. Доказать, что площадь красного (ΔDGB и ΔBHE) равна площади синего (ΔAGF и ΔFHC), точки на сторонах прямоугольника выбираются произвольно.



5. Найти максимальное значение произведения xy, если известно, что $x+2y=1$.

6. Пусть $x, y>0$. Докажите неравенство $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$.

7. Найти все решения уравнения:

$$x^{2004}+2005^{2005}=x^{2005}+2005^{2004}.$$

8. Меньшая окружность касается внутренним образом большей окружности в точке A. Через произвольную точку $M\neq A$ меньшей окружности проведена касательная, пересекающая большую окружность в точках B и C. Доказать, что AM – биссектриса угла BAC.

Домашнее задание 11

1. Написано 1997-значное число. Каждое число, образованное любыми двумя его соседними цифрами, делится на 19 или на 31. Последняя цифра числа равна 2. Чему равна первая цифра?

2. На клетчатом листе бумаги размером 10 на 10 клеток 60 клеток закрашены в черный цвет. Доказать, что всегда найдутся три соседних черных клетки, расположенных уголком (буквой «г», возможно, повернутой).

3. Доказать, что если каждая диагональ выпуклого четырехугольника делит его на два треугольника равной площади, то этот четырехугольник – параллелограмм.

4. Доказать, что из любых двенадцати отрезков, длины которых заключены между 1 и 100 см, всегда найдутся три, из которых можно составить треугольник.

5. Какое максимальное число прямых можно расположить на плоскости так, чтобы каждая из них пересекалась ровно с четырьмя другими? Ответ обосновать.

6. Школьный кружок по астрономии за год провел 20 занятий. На каждом занятии присутствовало ровно 6 школьников, при этом никакие два школьника не встречались в кружке более одного раза. Доказать, что на занятиях кружка побывало не менее 25 разных школьников.

Занятие 12.
Игры. Четность, симметрия

Задачи

1. На плоскости расположено 11 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?

2. Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных?

3. Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством в 1, 3 и 5 рублей?

4. Произведение 22-х целых чисел равно 1. Может ли их сумма равняться нулю?

5. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Кто побеждает в данной игре, начинающий или его партнер?

6. Двое по очереди ставят слонов в клетки шахматной доски так, чтобы слоны не «били» друг друга (цвет слонов значения не имеет). Проигрывает тот, кто не сможет сделать хода. Кто победит, начинающий или его партнер?

7. Имеется две кучки камней – по 7 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. У кого имеется выигрышная стратегия, у начинающего игрока или его партнера?

8. На столе лежат две кучки спичек. Игроки поочередно берут либо одну спичку из одной кучки, либо по одной спичке из обеих кучек. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выиграет?

Домашнее задание 12

1. Петя и Вася выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Вася. Он выигрывает, если получившееся число не делится на 9, иначе выигрывает Петя. Кто выигрывает при «правильной» игре?

2. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 2000, 2001. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов, на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

3. Решите уравнение: $\left(x^2+6x\right)^2+2x^2+12x=63$.

4. В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52 % из них – белые. Если отложить три самых малых гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

5. Дано: $a+b\geq 6$. Доказать, что $a^2+b^2\geq 18$.

6. Каждая вершина в квадрате соединена с серединой стороны между следующими вершинами. Доказать, что в центре получится квадрат в пять раз меньше исходного.

Занятие 13.
Арифметические и логические задачи

Задачи

1. Отец старше сына в 4 раза, а сумма их возрастов составляет 50 лет. Через сколько лет отец станет втрое старше сына?

2. Часы показывают час дня. Найти ближайший момент времени, когда часовая и минутная стрелки совпадут.

3. В некотором месяце 3 воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20 числа этого месяца?

4. Из восьмилитрового ведра, наполненного молоком, надо отлить ровно 4 литра с помощью пустых трехлитрового и пятилитрового бидонов. Как это сделать?

5. На конечной остановке в трамвай сели пассажиры, и половина из них заняла места для сидения. Сколько человек сели на конечной остановке в трамвай, если после первой остановки число пассажиров увеличилось на 8 % и известно, что трамвай вмещает не более 70 человек?

6. Пароход идет от пункта A до пункта B 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени плывут плоты от пункта A до пункта B?

7. В выражении $1:2:3:4:5:6:7:8:9$ расставить скобки так, чтобы результат был: а) минимальным; б) максимальным.

8. Найти целое число, которое в 7 раз больше цифры его единиц.

Домашнее задание 13

1. Доказать, что число, состоящее ровно из 81 единицы, делится на 81.

2. Числа 2^{2001} и 5^{2001} выписаны одно за другим, сколько цифр выписано?

3. Найти, какую цифру обозначает каждая буква в следующих равенствах (отдельно в каждом):

$$АХ^{А}=БАХ$$

$$ПИ^{П}=ИЛИ$$

$$АА^{Н}=АННА$$

$$КАК=Б^{К}.$$

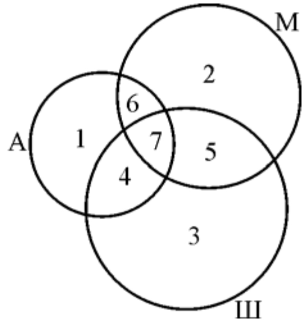
4. Четыре последовательных целых числа являются цифрами тысяч, сотен, десятков и единиц некоторого четырехзначного числа. На сколько увеличится это число, если его цифры написать в обратном порядке?

5. Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 3, 5. Найти его.

6. Как от куска материи в 2/3 метра отрезать полметра, не имея под руками метра?

Занятие 14.
Логические задачи

В тех случаях, когда речь идет о множествах объектов, удовлетворяющих нескольким свойствам в различных комбинациях, очень полезными бывают рисунки, изображающие эти множества (круги Эйлера).



Задачи

1. В одном из городов Грузии все жители умеют говорить либо по-грузински, либо по-русски. Известно, что по-русски умеют говорить 75 % жителей, а по-грузински – 85 %. Какая часть жителей говорит на обоих языках?

2. В трех кружках – шахматном, математическом и авиамодельном всего занимаются 35 школьников. Известно, что:

а) 16 школьников занимаются только в каком-то одном из кружков;

б) всего в шахматном кружке занимаются 17 человек;

в) одновременно математикой и авиа-моделированием занимаются 8 человек;

г) сразу во всех трех кружках занимаются 3 человека.

Сколько человек занимается только в шахматном кружке?

3. Доказать, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое незнакомых друг с другом.

4. Разгадайте числовой ребус: РЕШИ + ЕСЛИ = СИЛЕН.

5. Цифры трехзначного числа $\overline{abc}$ удовлетворяют уравнению $49a+7b+c=286$. Найдите это число.

6. Числа от 1 до 37 записаны в строчку (один раз каждое) так, что любое число делит сумму всех предыдущих чисел этой строки. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором – 1?

7. Рыбаки ловили рыбу. По крайней мере, одну рыбу поймали a_1 рыбаков, по крайней мере, две рыбы поймали a_2 рыбаков, …, по крайней мере, 9 рыб поймало a_9 рыбаков, а больше 9 рыб не поймал никто. Сколько всего рыб поймали рыбаки?

8. Целые числа x, y, z таковы, что $(x-y)(y-z)(z-x)=$ $=x+y+z$ Докажите, что число $x+y+z$ делится на 27.

Домашнее задание 14

1. В классе 30 человек, из них 28 занимаются в кружках по математике, физике и биологии. В кружке по математике всего 12 учеников, по физике – 14, по биологии – 16. Сразу в двух кружках, но не в трех, занимается всего 10 человек, из них по математике и физике – 3, по математике и биологии – 3. Сколько учеников занимаются сразу в трех кружках?

2. В университете на экзамене по математике было предложено 5 задач. Оценку «хорошо» получили те, кто решил первые две задачи и еще какие-то две. Решившие все задачи получили оценку «отлично». В университет было зачислено 100 человек, получивших оценку «хорошо» или «отлично». Из них 80 человек решили третью задачу, 70 – четвертую, и 60 – пятую. Сколько человек получили оценку «хорошо»?

3. В племени Абы-ВыГаДать на пост вождя претендовало три кандидата: Е, Ж, З. По правилам выборов голосование осуществлялось путем вычеркивания из бюллетеня не более одного кандидата. После подсчета голосов оказалось, что за Е подано 50 % голосов, за Ж – 70 % и за З – 90 % голосов. В голосовании приняло участие 200 человек. Сколько из них проголосовало за всех трех кандидатов?

4. Докажите, что число n^2+1 не делится на 3 при любом $n \in N$.

5. Из 21 монеты одна фальшивая. Как двумя взвешиваниями на весах с двумя чашечками без гирь определить, легче она или тяжелее?

6. Среди 17 монет одна фальшивая. По виду ее отличить от остальных невозможно. Определите фальшивую монету с помощью трех взвешиваний на весах с чашечками без гирь, если известно, что она легче, чем настоящие.

Занятие 15.
Планиметрия.
Что нужно знать по теме «Окружности».
Начало

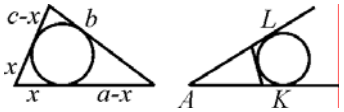
1. Определение окружности, касательной, хорды, радиуса, диаметра.

2. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Критерий касательной (расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу).

3. Диаметр, проведенный через середину хорды, перпендикулярен ей и делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.

4. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к заданной окружности, равны.

5. Пусть p – полупериметр треугольника (далее см. рисунок)



$$x = \frac{a+c-b}{2} = p - b,$$

$$AL = \frac{a+b+c}{2} = p.$$

6. Касание окружностей. В точке касания окружности имеют общую касательную, которая перпендикулярна линии центров.

7. Если окружности пересекаются в двух точках, то соединяющий эти точки отрезок перпендикулярен линии центров.

8. Углы в окружности: вписанный, центральный, между хордами.

Задачи

1. Вписанный в окружность треугольник имеет стороной диаметр данной окружности тогда и только тогда, когда противоположный этой стороне угол – прямой. Доказать.

2. Показать, что биссектриса в треугольнике лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

3. Площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна S. Найти радиус окружности.

4. Каждая из трех равных окружностей радиуса r касается двух других. Найти площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

5. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найти радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней окружностей равны 6 и 4.

6. Найти отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, опущенной на гипотенузу.

7. Какими целыми числами выражаются стороны равнобедренного треугольника, если радиус вписанной окружности равен $3/2$, а описанной $25/8$?

8. Найти площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, длины катетов которого являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Домашнее задание 15

1. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC касается его основания AC в точке M, а боковой стороны BC в точке N. Известно, что $AM = 5$, $BN = 8$. Найти радиус окружности.

2. Построить треугольник по заданным: периметру, углу при основании и высоте, опущенной на основание треугольника.

3. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2(1-p)x + 2p = 0$ равна 20. Найти p.

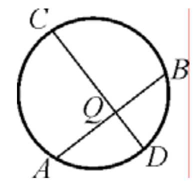
4. Две автомашины выехали одновременно из пункта A в одном направлении со скоростями 40 и 50 км/ч. Третья машина выехала из пункта A на полчаса позднее и догнала вторую машину через полтора часа после того, как обогнала первую. Найти скорость третьей машины.

5. Докажите, что $x^2 + y^2 - xy + x - y + 1 \geq 0$.

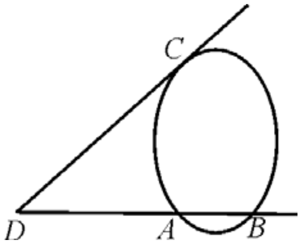
6. Существует ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?

Занятие 16.
Планиметрия.
Что нужно знать по теме «Окружности».
Продолжение

1. $AQ \cdot QB = CQ \cdot QD$. Следствие: произведение отрезков хорд, проходящих через данную внутри круга точку, равно константе.



2. $DB \cdot DA = DC^2$. Следствие: произведение отрезков любой секущей, проходящей через данную вне круга точку, на ее внешнюю часть равно константе.



3. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

4. Вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180^o.

5. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 2 и 6 от вершины A. Найти радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся прямой AB, если угол BAC равен 30^o.

6. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая касается первой окружности в точке B, а второй – в точке C. Найти BC, если $AB = b$, $AC = c$.

7. В треугольнике ABC угол B равен 60°, AA_1 и CC_1 – биссектрисы, O – точка пересечения биссектрис. Доказать, что $OC_1 = OA_1$.

8. Три окружности равных радиусов пересекаются в одной точке. Доказать, что оставшиеся точки пересечения лежат на окружности того же радиуса.

Домашнее задание 16

1. К окружности радиуса R проведены две касательные AB и AC из точки A, которая удалена от центра окружности на расстояние d. Найти радиусы окружностей, касающихся прямых AB и AC и окружности.

2. К окружности, вписанной в треугольник с периметром 18, проведена касательная параллельно основанию треугольника. Длина отрезка касательной, заключенного между боковыми сторонами треугольника, равна 2. Найти основание треугольника.

3. Некто узнал о трех изобретениях: одно из них экономит 30 % топлива, другое – 45 %, а третье – 25 %. Этот человек решил применить все три изобретения сразу, предполагая сэкономить 30+45+25=100 % топлива. Сколько процентов экономии он получает на самом деле?

4. Доказать, что число $n^5 - n$ делится на 5, для любого натурального числа n.

5. Построить треугольник по его заданному периметру p и двум углам при основании.

6. Знаменатель несократимой дроби на 2 больше ее числителя. Если числитель дроби, обратной данной, уменьшить на 3, и отнять от полученной дроби данную дробь, то получится 1/15. Найти данную дробь.

Занятие 17.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

➢ *Арифметическая прогрессия*:

$a_n = a_{n-1} + d$, $n \ge 2$, $n \in N$, d *– разность арифметической прогрессии*;

$a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ – *характеристическое свойство арифметической прогрессии.*

Если $k + m = p + q$, *то* $a_k + a_m = a_p + a_q$ *– обобщенное характеристическое свойство арифметической прогрессии.*

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$ – *сумма первых n членов арифметической прогрессии.*

Задача 1. Сумма 4 и 6 членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов этой прогрессии.

➢ *Геометрическая прогрессия*:

$b_n = b_{n-1}q$, $n \ge 2$, $n \in N$, q *– знаменатель геометрической прогрессии*;

$b_n = b_1 q^{n-1}$, $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ – *характеристическое свойство геометрической прогрессии*;

$b_k b_m = b_p b_q$, *при* $k + m = p + q$ – *обобщенное характеристическое свойство геометрической прогрессии*;

$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \ne 1$ – *сумма первых n членов геометрической прогрессии.*

Задача 2. Вывод формулы суммы: $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \ne 1$.

$S_n = b_1 + b_1 q + \ldots + b_1 q^{n-1}$,

$$qS_n = b_1q + ... + b_1q^{n-1} + b_1q^n,$$

$$S_n(1-q) = b_1 - b_1q^n \Rightarrow S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

➢ *Бесконечно-убывающая геометрическая прогрессия*:

$$|q| < 1, \ S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Задача 3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить соответственно 25, 27 и 1, то получаются три числа, образующие арифметическую прогрессию. Найти b_7.

➢ *Арифметико-геометрическая прогрессия*:

$$c_n = (a_1 + (n-1)d)b_1q^{n-1}.$$

Пусть $a_1 = 0, \ b_1 = 1$.

$$1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = S_n = \frac{1-q^n}{1-q},$$

$$q + q^2 + ... + q^{n-1} = S_n - 1,$$

$$...$$

$$q^{n-1} = S_n - (1 + q + ... + q^{n-2}),$$

$$1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1} = nS_n - \left(\sum_{k=0}^{n-1} S_k\right) = nS_n - \frac{n - S_n}{1-q}.$$

Задача 4. Могут ли числа 3; $\sqrt{7}$; 9 быть членами одной арифметической прогрессии?

Задача 5. Мать дарит каждой из пяти своих дочерей в день ее рождения, начиная с пяти лет, столько книг, сколько дочери лет. Возрасты пяти дочерей составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 2. Сколько лет было каждой дочери, когда у них составилась библиотека общей численностью в 495 книг?

Задача 6. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?

Задача 7. Три различных числа a, b, c образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Числа $a+b, \ b+c, \ c+a$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Задача 8. Ваня, Миша, Алик и Вадим ловили рыбу. Оказалось, что количества рыб, пойманных каждым из них, образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Алик поймал столько же рыб, сколько Вадим, а Вадим поймал бы на 12 рыб больше, то количества рыб, пойманных юношами, образовывали бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько рыб поймал Миша?

Домашнее задание 17

1. Найти сумму первых семи членов бесконечной геометрической прогрессии с $|q| < 1$, если ее второй член равен 4, а отношение суммы квадратов членов к сумме членов равно 16/3.

2. Решить уравнение: $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... = \frac{13}{6}, \quad |x| < 1$.

3. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120°, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5°. Определить число сторон этого многоугольника.

4. Решить уравнение: $\frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{7}{2}, \quad |x| < 1$.

5. Решить неравенство: $\frac{(x-1)^2}{(2x+3)^2} \geq \frac{1}{4}$.

6. В трапецию вписана окружность радиуса 6. Точка касания делит одно из оснований на отрезки 9 и 12. Найти стороны и площадь трапеции.

Занятие 18.
Суммирования и ряды

➢ Иррациональность в знаменателе:

$$S_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - 1.$$

➢ Представление в виде разности:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

1. Найти $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$.

➢ Представление произведения в виде разности:

$S_n=1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

$n\cdot n!=(n+1)!-n!$

2. Найти $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}$.

➢ Неоднократное суммирование прогрессий:

Найти сумму $S_*=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$, $S_*=2S_*-S_*=2-\frac{2+n}{2^n}$.

3. Вычислите: 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – 6 + … 999999 – 1000000.

4. Найдите сумму всех четных трехзначных натуральных чисел, делящихся на 7.

5. Вычислите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1112 и не делящихся на 15.

6. Найдите сумму: $2^2-4^2+6^2-8^2+\ldots+(4k-2)^2-(4k)^2$.

7. Найдите сумму: $1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+\ldots+n\cdot(3n-1)$.

8. Найдите сумму: $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

Домашнее задание 18

1. Найти сумму $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

2. Найти сумму $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$.

3. Найти арифметическую прогрессию, в которой независимо от числа членов сумма их равна утроенному квадрату числа этих членов.

4. Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, а его площадь равна 6. Найти стороны.

5. Найти два числа, произведение которых трехзначное число – есть куб натурального числа, а частное – квадрат того же числа.

6. Внутри треугольника *ABC* выбрана точка *M*. Через эту точку проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади трех образовавшихся треугольников равны S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника *ABC*.

Занятие 19.
Планиметрия. Свойства треугольников и параллелограммов

1. *Теорема синусов*: стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R .$$

Следствие: хорда окружности равна произведению диаметра на синус вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

2. *Теорема косинусов*: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

3. Параллелограмм. Признаки:

➢ две противоположные стороны параллельны и равны;

➢ противоположные стороны попарно равны;

➢ диагонали делятся точкой их пересечения пополам.

Утверждения

➢ Параллелограмм с перпендикулярными диагоналями – ромб.

➢ Параллелограмм, вписанный в окружность – прямоугольник.

Задачи

1. В параллелограмме сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов диагоналей.

2. Зная три стороны треугольника, найти его медианы.

3. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями 3 и 7, и боковыми сторонами, равными 2 и 4.

4. Основания равнобедренной трапеции относятся, как 5:12, а ее высота равна 17. Найти радиус *R* описанной вокруг трапеции окружности, если высота трапеции равна ее средней линии.

5. На стороне *AC* равностороннего треугольника *ABC* найдите такую точку, чтобы расстояние между ее проекциями на две другие стороны было наименьшим.

6. Найти отношение сторон треугольника, если известно, что один из его углов равен $120°$ и что стороны его образуют арифметическую прогрессию.

7. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Расстояние от центра окружности до концов наклонной боковой стороны равны a, b. Найти периметр трапеции.

8. Определить стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из одного угла, делят его на три равные части, а сама медиана равна 10.

Домашнее задание 19

1. В четырехугольник *ABCD* вписана окружность. Диагонали его пересекаются в точке *O*. Путь R_1, R_2, R_3, R_4 – радиусы окружностей, описанных около треугольников *ABO, BOC, COD* и *AOD*. Докажите, что $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

2. Основания равнобедренной трапеции равны 36 и 12. Определить радиус окружности, описанной около трапеции, если ее боковая сторона равна 16.

3. Найдите последнюю цифру числа $1^3 + 2^3 + ... + 99^3$.

4. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречается хотя бы одна тройка?

5. Натуральные числа *x*, *y*, *z* таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что одно из них делится на 5.

6. Бригада рабочих планировала выполнить некоторый объем работ за несколько дней. После того, как они выполнили часть работы, к ним прибавили 20 % рабочих. И они выполнили эту работу на 2 дня быстрее, чем планировалось. Сколько дней работали в бригаде эти 20 % рабочих?

Занятие 20.
Планиметрия. Площади

➢ Треугольников со сторонами *a, b, c* и углами *A, B, C*.

1. $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$.

2. $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$.

3. $S = pr$, где p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности.

4. $S = \frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности.

5. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

6. $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

➢ Четырехугольников.

1. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1, d_2 – диагонали, а φ – угол между ними.

2. $S_{\text{трап}} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$, где *a, b* – основания, *h* – высота трапеции.

➢ Правильного *n*-угольника: $S = \frac{1}{2} ka \cdot n = \frac{1}{2} r \cdot P$, где *k* – апофема, *a* – сторона, *r* – радиус вписанной окружности, *P* – периметр.

➢ Круга радиуса *r*: $S = \pi \cdot r^2$.

Факты

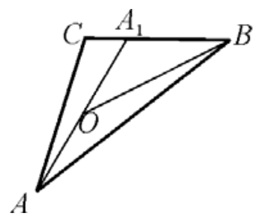
1. Площади подобных треугольников (фигур) относятся как квадраты сходственных элементов (сторон, медиан, высот и т. п.), их отношение равно квадрату коэффициента подобия.

2. Площади треугольников, имеющих равные высоты (общую высоту), относятся как стороны, соответствующие этим треугольникам.

3. Площади треугольников, имеющих равные стороны, относятся как соответствующие этим сторонам высоты.

4. Площади треугольников, имеющих равный угол (или общий угол), относятся как произведения сторон, содержащих этот угол.

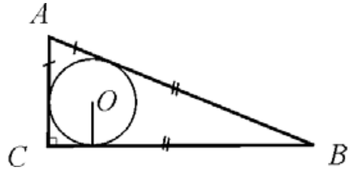
Задачи



1. Докажите, что медиана разбивает треугольник на 2 равновеликих треугольника.

2. Какую часть площади треугольника отсекает его средняя линия?

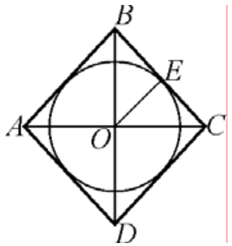
3. Дано: $A_1B = 3CA_1$; $AO = OA_1$; $S_{ABC} = S$. Найти: S_{OBA_1}.

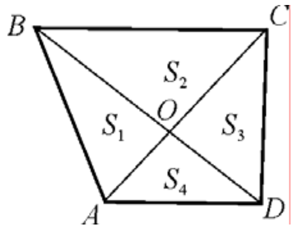


4. Дано: $AB = 13$, $r = 2$, угол C – прямой. Найти площадь треугольника ABC.

5. Дано: $ABCD$ – ромб, $OE = 8$; $EC = 4BE$. Найти площадь ромба.

6. Доказать, что если выпуклый четырехугольник $ABCD$ разделен своими диагоналями на треугольники с площадями S_1, S_2, S_3, S_4, то $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.





7. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит один из катетов на отрезки длиной m и n.

8. Вычислить площадь треугольника по двум сторонам a и b и биссектрисе d угла между ними.

Домашнее задание 20

1. Данный параллелограмм разделить прямыми, выходящими из одной вершины, на три равновеликие части.

2. Первая цифра четырехзначного числа равна количеству нулей в этом числе, вторая – числу единиц, третья – числу двоек, четвертая – числу троек. Найдите все такие числа.

3. Пусть точка O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что площади четырех образовавшихся треугольников – натуральные числа. Доказать, что произведение этих площадей является точным квадратом.

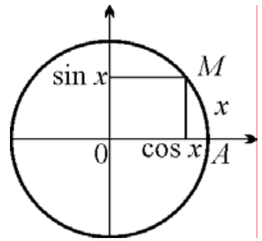
4. Площадь трапеции равна 3, основания относятся как 1 : 2. Найти площади четырех треугольников, на которые трапеция разделена диагоналями.

5. Из сосуда емкостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой, потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси осталось 24 л чистой кислоты. Сколько литров кислоты вылили в первый раз?

6. Если a, b, c – стороны треугольника, то доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$.

Занятие 21.
Тригонометрия. Начало

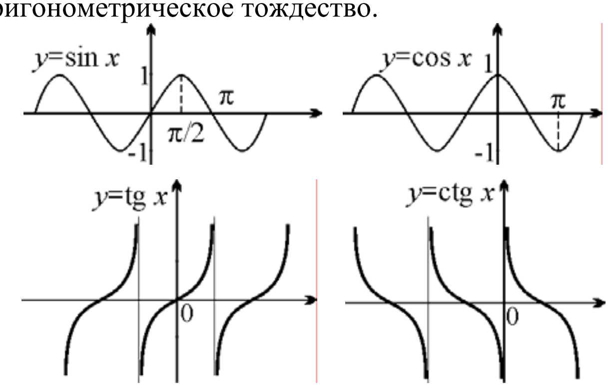
Определение. Окружность единичного радиуса с выбранным началом отсчета и направлением обхода называется числовой окружностью. Любому числу x ставится в соответствие точка M на числовой окружности так, что длина дуги AM равна x. Тогда $\sin x$ – ордината точки M, $\cos x$ – абсцисса точки M,



$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Значения тригонометрических функций в точках $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ можно задать таблицей (выучить).

Синус и косинус – функции, определенные на всей числовой прямой, принимающие значения от -1 до 1, периодические. Синус – нечетная функция, косинус – четная, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ – основное тригонометрическое тождество.



Задача 1. Доказать тождества:

1) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$;

2) $\dfrac{(1 + \operatorname{tg}\alpha^2) \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)} = 1$.

Задача 2. Решить уравнения в промежутке $[0; 2\pi]$:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$;

2) $\cos x = 1$;

3) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Формулы приведения (в прямоугольном треугольнике и для любого угла α):

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha$;

$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\,\alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$,

$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Задачи

3. Найти значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = 3/4$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

4. Преобразовать выражения, используя формулы приведения:

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; $\cos(3\pi + \alpha)$; $\sin(\alpha + \pi)$; $\mathrm{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Упростить выражения: $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha}$; $\dfrac{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha}$;

$\dfrac{1 - \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)}{\cos^2(\pi - x)}$; $\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1}{\sin^2(\pi + x)}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\beta}$.

6. $\mathrm{tg}^2\,\alpha + \sin^2\alpha - \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\mathrm{ctg}^2\,\alpha + \cos^2\alpha - \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

7. $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha}\right)^2 - \sin^2\alpha$; $(\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha)^2 + (\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\alpha)^2 - \cos^2\alpha$.

8. Доказать справедливость равенства:

$$\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}.$$

Домашнее задание 21

1. Упростить выражения:

$\sin(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\mathrm{tg}\,\alpha$; $\sin\alpha\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$.

2. Упростить выражение: $\dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}$.

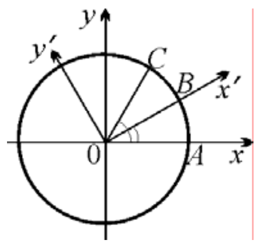
3. Вычислить значение выражения $\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}$.

4. Решить уравнение: $\sqrt{5x - 5} + \sqrt{10x - 5} = \sqrt{15x - 10}$.

5. Доказать, что при любом четном n число $\dfrac{n}{12} + \dfrac{n^2}{8} + \dfrac{n^3}{24}$ целое.

6. Из внешней точки A к окружности проведены касательные AB и секущая ACD, где точки C, D – точки пересечения секущей с окружностью. Известно, что $AC : AB = 2 : 3$, $S_{ABC} = 20$. Найти S_{ABD}.

Занятие 22.
Тригонометрия. Продолжение



Докажем формулу:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Пусть $0 \le \alpha$, $\beta < 2\pi$, $\alpha \ge \beta$, $\alpha = \angle AOC$; $\beta = \angle AOB$; $\angle BOC = \alpha - \beta$. Система координат OX_1Y_1 получена из OXY поворотом на угол β. Расстояние между точками B и C не зависит от системы координат. Следовательно,

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Заменяя β на $(-\beta)$ и используя формулы приведения, получим:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$.

Из этих формул легко получить формулы произведения:

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$;

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$;

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$. $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$.

Задачи

1. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha = m$, найти значение выражения $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$.

2. Известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p}{q}$. Найти значения $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\,2\alpha$.

3. Найти значение выражения: $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$.

4. Упростить выражение:
$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$.

5. Найти значение выражения $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$.

6. Найти сумму: $1-\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha+...,\ 0<\alpha<\pi/4$.

7. Найти наименьшее значение выражения $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ при $0<\alpha<\pi/2$.

8. Вычислить $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}, \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{21}{65}$; $\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{27}{65}$; $\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

Домашнее задание 22

1. Доказать тождества: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$; $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$.

2. Вычислить: а) $\frac{\mathrm{tg}\,80°-\mathrm{tg}\,50°}{1+\mathrm{tg}\,50°\,\mathrm{tg}\,80°}$; б) $\cos 15°-\cos 45°-\cos 75°$.

3. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ и $\mathrm{tg}\,\beta$, если $\sin\beta=-0{,}6$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$.

4. В треугольнике ABC проведена высота CH. Найти отношение $AH:AB$, если $AB:BC:AC=4:2:3$.

5. Какое из чисел больше: $\frac{10^{2008}+1}{10^{2009}+1}$ или $\frac{10^{2009}+1}{10^{2010}+1}$?

6. Имеются два сосуда, содержащих 4 и 6 кг раствора кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35 % кислоты. Если же слить равные веса этих растворов, то получится раствор, содержащий 36 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом сосуде?

Занятие 23.
Векторы. Что необходимо знать по данной теме

Определение 1. Вектором называется класс эквивалентности (по отношению равенства) направленных отрезков. Обозначается $\vec{a}$.

Пусть $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{a_1,a_2\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1\}$, $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

Сложение векторов:
1) правило треугольника;
2) правило параллелограмма;
3) правило ломаной.

Произведение вектора на число: $\vec{a}\cdot\lambda=\{\lambda a_1,\lambda a_2\}$.

Свойства сложения и произведения:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

3) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

4) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Определение 2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если несущие их прямые параллельны. $\Leftrightarrow \exists\lambda\neq 0 \mid \vec{a}=\lambda\vec{b},\ \vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0$

Теорема: Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ неколлинеарны, то любой вектор $\vec{c}$ может быть разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ единственным образом, т. е. существуют числа λ, μ такие, что $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$.

Определение 3. Скалярное произведение векторов равно: $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\angle\vec{a}\vec{b})$.

Определение 4. Векторы называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения:

1) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$; 2) $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$;

3) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$; 4) $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$;

5) $(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

Теорема: Если $\vec{a}=\{a_1,a_2\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2\}$, то $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2$.

Замечание: $\cos(\angle\vec{a}\vec{b})=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ и если скалярное произведение векторов больше нуля, то угол между векторами – острый, если меньше нуля – тупой.

Задачи

1. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $|\vec{m}|=4\sqrt{5}$, угол между $\vec{m}$ и осью OY тупой и $\vec{m}\perp\vec{k}$, где $\vec{k}=\{2,-1\}$.

2. При повороте вокруг начала координат точка A (6,8) переходит в точку B (8,6). Найти косинус угла поворота.

3. Даны векторы $\vec{a}=\{-4,3\}$, $\vec{b}=\{1,-4\}$, $\vec{c}=\{6,2\}$. Разложите вектор $\vec{c}$ по двум другим.

4. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Доказать, что $((\vec{a},\vec{c})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c})\vec{a})\perp\vec{c}$.

5. Дан треугольник $ABC;$ M – точка пересечения его медиан. Доказать, что $3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, где O – произвольная точка плоскости.

6. Доказать, что сумма квадратов всех сторон в параллелограмме равна сумме квадратов диагоналей, используя векторы.

7. При каких значениях x векторы $(x^3-1)\vec{a}$ и $2x\vec{a}$ сонаправлены?

8. Дан квадрат $ABCD$, F – середина AB, E – точка на диагонали AC такая, что $AE=3EC$. Найти угол DEF.

Домашнее задание 23

1. Треугольник задан координатами вершин $A(0,1)$, $B(1,-4)$, $C(5,2)$, точка E – середина стороны BC. Докажите, что отрезок AE перпендикулярен BC.

2. Найдите косинусы углов треугольника, если его вершины заданы точками $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(4,5)$.

3. Даны точки с координатами $A(3,2)$, $B(5,1)$, $D(1,-2)$. Найти длину диагонали AC параллелограмма $ABCD$.

4. Каким, рациональным или иррациональным, является число

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)?$$

5. Задана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Известно, что $a_1a_3=-11$, $a_2=5$. Найти a_5.

6. Задана геометрическая прогрессия $\{b_n\}$. Известно, что $b_1+b_3=30$, $b_2=12$. Найти b_5.

Занятие 24.
Текстовые задачи

Задачи

1. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найти эти числа.

2. Первый рыбак должен проплыть на лодке до места встречи 35 км, а второй рыбак – на $31\frac{3}{7}$ меньше. Чтобы приплыть к месту

встречи одновременно со вторым, первый рыбак выходит на полчаса раньше второго и делает в среднем на 2 км/ч больше, чем второй. Найти скорость, с которой плыл каждый рыбак.

3. Двое рабочих вместе выполнили некоторую работу за 6 часов. Первый из них, работая отдельно, мог выполнить всю работу на пять часов скорее, чем второй, работая один. За сколько часов каждый из них, работая один, может выполнить всю работу?

4. Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с 10%-м и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько надо взять каждого раствора?

5. В пачке письменных работ учащихся – не более 75 работ. Известно, что половина работ в этой пачке имеют оценку отлично. Если убрать три верхние работы, то 48 % оставшихся работ будут с оценкой отлично. Сколько работ было в пачке?

6. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится один, а в остатке – 16. Если же к квадрату разности его цифр прибавить произведение его цифр, то получится заданное число. Найти это число.

7. Пройдя $3/8$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил сзади на дороге автомобиль, идущий со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста, а если вперед, то автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бегает Иа-Иа?

8. В четырехзначном числе каждую цифру увеличили на 1 или на 5, после чего это число увеличилось в 4 раза. Найти все такие числа.

Домашнее задание 24

1. Пусть $\sqrt{x}-\sqrt{y}=10$. Доказать, что $x-2y\le 200$.

2. Можно ли расположить по кругу 15 целых чисел так, чтобы сумма каждых четырех чисел, идущих подряд, равнялась 3 или 7?

3. На стороне AB равностороннего треугольника ABC произвольно отмечена точка D. На отрезке AD вне ABC построен равносторонний треугольник ADE, а на отрезке CE – равносторонний треугольник CEF, по ту же сторону от CE, что и B. Доказать, что точки A, B, F лежат на одной прямой.

4. Несколько команд провели волейбольный турнир в один круг (ничьи невозможны, за победу команда получает одно очко, за поражение – ноль очков). Скажем, что команда А сильнее команды Б, если либо команда А выиграла у Б, либо есть команда В такая, что А выиграла у В, а команда В – у Б. Доказать, что команда, набравшая наибольшее количество очков, сильнее всех остальных.

5. Из 35 прямоугольников с целочисленными сторонами, не являющихся квадратами, можно сложить 9 квадратов со сторонами 10 см. Докажите, что из них можно сложить два прямоугольника, площади которых отличаются не более чем на 80 см^2. В обоих случаях используются все прямоугольники.

6. В ряд выписали 11 натуральных чисел так, что сумма любых трех соседних чисел равна 21. На первом месте стоит число 7, а на девятом – 6. Какое число стоит на втором месте?

Занятие 25.
Уравнения прямых. Метод координат

Уравнение окружности: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Уравнение прямой: $ax+by+c=0$ или

- $b=0$; $x=-\dfrac{c}{a}$;
- $b\ne 0$; $y=kx+b$, где k – тангенс угла наклона прямой.
    1. Две прямые параллельны, если $k_1=k_2$.
    2. Две прямые перпендикулярны, если $k_1k_2=-1$.

Задачи

1. Построить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;2)$ и $B(3;-2)$.

2. Построить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;1)$ перпендикулярно прямой, заданной уравнением: $y=2x+1$.

3. Построить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$ параллельно прямой, заданной уравнением: $y=1-x$.

4. Построить уравнения прямых, пересекающихся в точке (1,3) под прямым углом и одна из которых проходит через точку (3,5).

5. Найти расстояние от точки $A(2,1)$ до прямой, заданной уравнением: $y=2x+1$.

6. Даны вершины треугольника: $A(-2,-3)$, $B(-1,2)$, $C(4,1)$. Доказать, что треугольник *ABC* равнобедренный, и составить уравнение прямой, содержащей высоту, проведенную из вершины *A*.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3)$ и образующей с осью *Ox* угол 120°. Найти площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат.

8. Даны две вершины равностороннего треугольника: $A(2;-2)$ и $B(-2;-4)$. Найти координаты третьей вершины треугольника и его площадь.

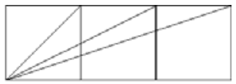
Домашнее задание 25

1. Прямая $y = 3x+b$ пересекает ось абсцисс в точке *A* и ось ординат в точке *B*. Известно, что площадь треугольника *AOB*, где *O* – начало координат, равна 24. Найти *b*.

2. При каких значениях *k* прямая $y - kx - 5 = 0$ удалена от начала координат на расстояние, равное 3?

3. Из числа 123456789 вычеркивается минимальное количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 8. Какое число останется после вычеркивания цифр?

4 Даны три квадрата. Доказать, что сумма трех острых углов между наклонными и горизонтальными прямыми равна 90°.



5. Доказать, что в прямоугольном треугольнике куб гипотенузы больше суммы кубов катетов.

6. Найти сумму: $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n+1} \cdot n^2$.

Занятие 26.
Геометрическое множество точек на плоскости (ГМТ)

Среди всех точек плоскости требуется выделить такие точки, которые обладают каким-либо заданным свойством.

ГМТ называется множество, состоящее из всех точек, которые обладают заданным свойством.

Примеры ГМТ: окружность, биссектриса угла, срединный перпендикуляр; ГМТ точек плоскости *M*, для которых угол *AMB* имеет заданную величину, где точки *A* и *B* заданы.

Задача 1. Внутри окружности с центром в точке *O* задана точка *A*. Найти ГМТ – середин всевозможных хорд, проведенных через точку *A*.

Задача 2. Найти ГМТ плоскости, отстоящих от контура квадрата со стороной *y* на расстоянии 1.

При решении задач на ГМТ с помощью координатного метода сначала на плоскости вводят удобную систему координат, затем координаты любой точки искомого ГМТ задают переменными, например, *u* и *v*, после чего начинают записывать условия, которым удовлетворяют точки ГМТ, с помощью формул системы координат. Далее преобразовывают полученные соотношения, стремясь придать им знакомый вид.

Задача 3. Лестница скользит по сторонам прямого угла – стене и полу. Котенок, сидящий на середине лестницы, описывает некоторую линию. Что это за линия?

Метод ГМТ в задачах на построение

Задача 4. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне.

Задача 5. Даны две точки *A* и *B* и прямая *a*, не проходящая через эти точки. На прямой *a* постройте точку, равноудаленную от точек *A* и *B*. Всегда ли задача имеет решение?

Задача 6. Дан равносторонний треугольник *ABC*. Найти на плоскости множество точек *M* таких, что треугольники *AMB* и *BMC* равнобедренные.

Задача 7. Найти множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до прямых, проходящих через стороны единичного квадрата, равна 4.

Задача 8. Дан треугольник. Найти множество центров прямоугольников, вписанных в этот треугольник так, что основания прямоугольников лежат на основании треугольника, а две другие вершины – на боковых сторонах.

Домашнее задание 26

1. Построить прямоугольный треугольник *ABC* по заданным острому углу *B* и биссектрисе *BD*.

2. Запишите число $\sqrt{7+\sqrt{48}}$, используя знак квадратного корня лишь один раз.

3. В плоскости даны точки A и B. Из точки A проводятся касательные к окружностям с центром в точке B. Найти множество точек касания.

4. В плоскости проводятся пары окружностей, которые касаются друг друга в точке M, а прямой – в данных точках A и B. Найти множество точек M.

5. По полю проходит прямая дорога. Турист может идти по дороге со скоростью 6 км/ч и по полю – со скоростью 3 км/ч. Определить множество точек, до которых турист может дойти за 1 час, отправляясь из заданной точки A по дороге.

6. Концентрация спирта в трех растворах образует геометрическую прогрессию. Если смешать растворы в отношении 2:3:4, то получится раствор, содержащий 32 % спирта. Если же смешать их в весовом отношении 3:2:1, то в растворе будет 22 % спирта. Сколько процентов спирта содержит первый раствор?

Занятие 27.
Задачи на построение

1. Построение по формуле. Алгебраический метод:

- по отрезку a построить отрезок ma, где m – натуральное число;
- по отрезку a построить отрезок $\frac{a}{n}$, где n – натуральное число;
- по отрезкам a, b и c построить отрезок $\frac{ab}{c}$;
- по отрезкам a и b построить отрезок $\sqrt{ab}$;
- по отрезку a построить отрезок $a\sqrt{n}$.

Задача 1. По отрезкам a и b построить отрезок $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$.

2. Построение треугольников:

- построить прямоугольный треугольник по двум сторонам; по стороне и острому углу;
- построить треугольник по трем сторонам; по двум сторонам и углу; по стороне и двум углам;
- построить треугольник, подобный заданному треугольнику с данным коэффициентом подобия.

Задача 2. Построить треугольник по двум углам при основании и высоте, опущенной на основание.

3. Движения фигур – параллельные переносы, повороты, симметрии относительно прямых и точек, подобия.

Задача 3. Построить треугольник по трем медианам.

Задача 4. Построить – вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы две его вершины лежали на основании, а две другие – на боковых сторонах треугольника.

Задача 5. На прямой L найти точку K такую, что $AK+KB$ достигает минимума, точки A и B – некоторые фиксированные точки плоскости.

Задача 6. Построить квадрат, вершины которого лежат на четырех заданных прямых.

Домашнее задание 27

1. По данным отрезкам a, b, c, d построить отрезок $x=\sqrt[4]{abcd}$.

2. Построить отрезок $x=\dfrac{a^4}{a^3+b^3}$ по данным отрезкам a, b.

3. Пункты A и B разделены рекой, берега которой – параллельные прямые. Требуется проложить дорогу из A в B и построить мост через реку так, чтобы путь из A в B был кратчайшим.

4. Построить параллелограмм, у которого середины трех сторон лежат в заданных точках.

5. Построить треугольник по серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

6. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трех заданных параллельных прямых.

Занятие 28.
Доказательства неравенств

1. Докажите неравенство: $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, $a>0$, $b>0$. Равенство возможно тогда и только тогда, когда $a=b$. Докажите неравенство: $a>0$, $a+\dfrac{1}{a}\ge 2$ Равенство возможно тогда и только тогда, когда $a=1$.

2. Даны n положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, произведение которых равно 1. Докажите неравенство: $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 2^n$.

3. Докажите неравенство: $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$.

4. Докажите неравенство: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1$.

5. Докажите двойное неравенство: $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

6. Докажите неравенство: $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$, если $a > 0$, $b > 0$.

7. Докажите неравенство: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

8. Докажите неравенство: $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Домашнее задание 28

1. Доказать, что $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.
2. Доказать, что $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.
3. Доказать, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.
4. Доказать, что если $x + y + z = 1$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.
5. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P. Докажите, что вершина C перемещается при этом по отрезку.
6. В треугольник ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этой вершины тогда и только тогда, когда угол C равен 90°.

Занятие 29.
Метод математической индукции

Индукция есть метод получения общего утверждения из частных наблюдений.

Пример. Рассмотрим целые числа вида $n(x) = x^2 + x + 41$. Они простые при натуральных значениях $x < 40$, но потом появляется составное число. Перебирая значения x достаточно долго, начиная с единицы и получая простые числа по данной формуле, можно сделать ошибочное предположение, что все числа такого вида будут простыми. Чтобы избежать подобных ошибок, надо для обоснования своей гипотезы или перебрать все возможные случаи, что не всегда реально, или доказать справедливость методом, основанном на принципе (аксиоме) математической индукции.

Суть принципа математической индукции:

если некоторое утверждение (формула) справедливо при $n = 1$ (или другом натуральном значении n, при котором имеет смысл это утверждение) и из предположения его справедливости для некоторого значения $n = k$ следует справедливость утверждения для следующего натурального значения $n = k + 1$, то утверждение справедливо для всех натуральных значений n.

Способ доказательства методом математической индукции заключается в следующем:

1. Доказывается или проверяется справедливость утверждения для $n = 1$.
2. Предполагается справедливость утверждения для некоторого натурального $n = k$ (индукционное предположение).
3. Исходя из этого предположения, доказывают справедливость утверждения для $n = k + 1$ (индукционный переход).

Примеры

1. Доказать, что сумма квадратов первых n натуральных чисел равна $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Найти сумму $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n!$.
3. Доказать равенство: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + ... + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

4. Найти сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{n(n+1)}$.

5. Докажите, что число $5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

6. Докажите двойное неравенство:

$$\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$$

7. Докажите неравенство: $3^n-2^n\ge n,\quad n\in N$.

8. Докажите, что число $6^n+20n+24$ кратно 25.

Домашнее задание 29

1. Докажите, что $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Докажите, что $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

3. Докажите, что $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$.

4. Докажите, что $1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

5. Докажите, что $\left(n^3+2n\right)\vdots 3$ для $\forall n\in N$.

6. Докажите, что число $4^n+15n-1$ делится на 9.

Занятие 30. **Планиметрия. Задачи с окружностями**

1. Вокруг равностороннего треугольника *ABC* описана окружность, точка *P* лежит на окружности. Доказать, что из трех хорд *AP*, *BP*, *CP* наибольшая равна сумме двух других.

2. Вокруг равностороннего треугольника *ABC* описана окружность, точка *P* лежит на окружности. Доказать, что сумма квадратов длин трех хорд *AP*, *BP*, *CP* есть величина постоянная для данной окружности.

3. Дан равнобедренный треугольник *ABC*, точка *H* – точка пересечения высот треугольника. Доказать, что окружность, проведенная через точки *A*, *B*, *H* касается прямой *AC*.

4. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 и 16. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

5. Три окружности радиусов 5, 10 и 15 касаются внешне друг друга. Найдите радиус окружности, проходящей через центры данных окружностей.

6. В правильный треугольник со стороной *a* вписаны три равные окружности, касающиеся друг друга и каждая из них касается двух сторон треугольника. Найдите радиус окружностей.

7. Круг радиуса *R* разделен двумя концентрическими с ним окружностями на три равновеликие фигуры. Найти радиусы этих окружностей.

8. Две окружности радиусов *R* и *r* касаются внешним образом. Найти площадь трапеции, ограниченной двумя общими касательными к этим окружностям и отрезками прямых, соединяющими точки касания.

Домашнее задание 30

1. Две окружности радиусов $R=3$ см и $r=1$ см касаются внешним образом. Найти расстояния от точки касания окружностей до их общих касательных.

2. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса *R*, две другие – на касательной к этой окружности. Найти длину стороны квадрата.

3. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на 3 и 9 см. Найти площадь трапеции.

4. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.

5. Доказать, что расстояние от ортоцентра до вершины треугольника в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине.

6. В окружность радиуса *R* вписаны четыре равные окружности, каждая из которых касается данной и двух соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной этими пятью окружностями.

Занятие 31.
Системы алгебраических уравнений

1. Решить графически систему уравнений: $\begin{cases} x+y=3, \\ 3|y|-x=1. \end{cases}$

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3+y=1, \\ y^3-4y^2+4y+x^6=1. \end{cases}$

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+y=4, \\ \left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x-y\right)=16. \end{cases}$

4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} xy-x=2, \\ xy^3-xy^2=8. \end{cases}$

5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+xy+y=7, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

6. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=92, \\ xy=3. \end{cases}$

7. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x\left(y+z\right)=20, \\ y\left(x+z\right)=18, \\ z\left(x+y\right)=14. \end{cases}$

8. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

Домашнее задание 31

1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

3. Решить систему уравнений: $\begin{cases} xy(x+1)(y+1)=72, \\ (x-1)(y-1)=2. \end{cases}$

4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2+y^4=20, \\ x^4+y^2=20. \end{cases}$

5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{ab+1}{b}, \\ x-y+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{ab+1}{a}. \end{cases}$

6. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$

Занятие 32.
Построения, разрезания и геометрические преобразования

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что смог разрезать некоторый равнобедренный треугольник на три треугольника так, что из любых двух можно сложить равнобедренный треугольник. Не хвастает ли барон?

2. Построить общую касательную к двум окружностям.

3. Постройте правильный треугольник, если заданы три расстояния от точки, взятой внутри треугольника, до его сторон.

4. Построить квадрат по разности длин диагонали и стороны.

5. На какое наименьшее число частей можно разрезать прямоугольник со сторонами 4 и 9 так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

6. Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 15 равных многоугольников, не являющихся прямоугольниками?

7. На координатной плоскости OXY изобразили график функции $y=x^2$. Потом оси координат стерли – на рисунке осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?

8. Даны две концентрические окружности. Проведите прямую, на которой эти окружности высекают три равные отрезка.

Домашнее задание 32

1. Две окружности пересекаются в точке M. Провести через M прямую, пересекающую окружности в точках A и B так, что $AM = MB$.

2. Точка O движется по гипотенузе прямоугольного треугольника. При каком положении точки O расстояние между ее проекциями на катеты будет наименьшим?

3. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D и на отрезке CD как на стороне построен равносторонний треугольник CDE вне треугольника ACB. Точки K и M – середины отрезков AD и BE соответственно. Докажите, что треугольник CKM – равносторонний.

4. С помощью циркуля и линейки построить окружность, вписанную в данный угол и проходящую через заданную внутри него точку.

5. Из 8 монет одна фальшивая и легче остальных. Как с помощью двухчашечных весов без гирь найти фальшивую монету двумя взвешиваниями?

6. Два путника вышли одновременно из пункта A в пункт B. Первый из них первую половину своего времени шел со скоростью x, а вторую – со скоростью y. Второй путник шел первую половину пути со скоростью y, а вторую половину со скоростью x ($x > y$). Кто из них раньше пришел в B?

Приложения

III олимпиада НГУ по математике 2000 г. – 9 класс

1. Для нумерации страниц одной толстой книги потребовалось 3829 цифр. Сколько в книге страниц? Страницы нумеруются числами 1, 2, 3 и т. д.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M такая, что треугольник CDM – правильный. Найти величины углов ABM и BAM.

3. Можно ли расставить между числами 1, 1/2, 1/3, …, 1/12 знаки «+» и «–» так, чтобы в результате выполнения операций получился 0?

4. Длины двух высот треугольника равны 6 и 10 см. Доказать, что для длины третьей высоты h_3 этого треугольника справедливо неравенство $15/4 < h_3 < 15$.

5. Два игрока играют по следующим правилам: первый называет натуральное число, не превосходящее 10, второй прибавляет к нему некоторое натуральное число, не превосходящее 10, затем первый аналогично поступает с получившимся числом и т. д. по очереди. Побеждает тот, кто первый сможет получить число 100. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу?

6. Существует ли бесконечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ такая, что для всех n и m выполнено равенство $a_{mn} = a_m + a_n$?

III олимпиада НГУ по математике 2000 г. – 10 класс

1. Однажды улитка заползла на вершину бамбука, который растет так, что каждая точка его стебля поднимается вверх с одной и той же скоростью. На это ей потребовалось 7 часов. Отдохнув на вершине бамбука ровно 1 час, она спустилась на землю за 8 часов. Какое время заняло бы ее путешествие, если бы она отдыхала 2 часа на вершине? Скорость улитки постоянна.

2. Клетки таблицы размера 10 на 10 раскрашены в 9 цветов. За один раз разрешается перекрасить все клетки некоторой строки или некоторого столбца в любой из цветов, в который уже окрашены не менее двух клеток данной строки или столбца. Можно ли за несколько раз перекрасить все клетки таблицы в один цвет?

3. Можно ли расставить между числами 1, 1/2, 1/3, …, 1/12 знаки «+» и «–» так, чтобы в результате выполнения операций получился 0?

4. На плоскости расположены квадраты *ABCD* и *AEFG* с общей вершиной *A*, вершины обозначены по часовой стрелке. Доказать, что центры квадратов и середины отрезков *BG* и *DE* тоже образуют квадрат.

5. На клумбе растет 51 цветок так, что из любых трех цветков некоторые два находятся на расстоянии не более 1 м друг от друга. Доказать, что есть круг радиуса 1 м, в котором растет не менее 26 цветков.

6. Найти все натуральные числа *n*, сумма квадратов делителей которых, включая 1 и исключая *n*, равна $2n+2$.

VI олимпиада НГУ по математике 2003 г. – 9 класс

1. На прямой отмечены 45 точек, лежащих вне отрезка *AB*. Доказать, что сумма расстояний от всех этих точек до *A* не равна сумме расстояний от всех этих точек до *B*.

2. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого и сумма цифр следующего за ним одновременно делятся на 67.

3. На плоскости отмечены середины сторон выпуклого пятиугольника. Восстановите циркулем и линейкой его вершины.

4. Нарисуйте на плоскости многоугольник и некоторую точку вне него так, чтобы ни одна сторона многоугольника не была видна из этой точки полностью.

5. Представить многочлен x^7+x^2+1 в виде произведения двух многочленов ненулевой степени.

VI олимпиада НГУ по математике 2003 г. – 10 класс

1. На организационном собрании Всероссийского общества тупых 47 делегатов из 12 регионов второй день пытаются рассесться за круглым столом так, чтобы среди любых 15 сидящих подряд делегатов были представители всех регионов. Смогут ли они это сделать и приступить, наконец, к делу?

2. Докажите, что если $a^2+5ab+b^2$ делится на 7, то и a^2-b^2 делится на 7.

3. На всех сторонах *AB, BC, CD, DA* квадрата взяты точки *P, Q, R, S* соответственно так, что отрезки *PR* и *QS* перпендикулярны, и пусть *O* – точка их пересечения. Докажите, что сумма периметров четырехугольников *APOS* и *CROQ* равна сумме периметров четырехугольников *BQOP* и *DSOR*.

4. Во вписанном четырехугольнике *ABCD* длины сторон *AB* и *AD* равны, *P* – точка пересечения диагоналей, а *E* – точка пересечения окружности, описанной вокруг *ABP* со стороной *BC*. Докажите, что длины отрезков *CD* и *CE* равны.

5. Докажите, что бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел либо вообще не содержит квадратов натуральных чисел, либо содержит их бесконечно много.

Всесибирская олимпиада по математике (ЛШ-1997) – 9 класс

1. Фальшивые деньги составляли 90 % всей денежной массы страны. Компетентные органы в результате операции «Секвестр» изъяли часть фальшивок, в результате чего они стали составлять лишь 80 % всех денег страны. Какую часть первоначальной денежной массы составляли изъятые фальшивки?

2. Написано 1997-значное число. Каждое число, образованное любыми двумя его соседними цифрами, делится на 19 или на 31. Последняя цифра числа равна 2. Чему равна первая цифра?

3. Внутри треугольника *ABC* выбрана точка *O* такая, что площади треугольников *AOB, BOC, COA* равны. Доказать, что точка *O* совпадает с точкой пересечения медиан треугольника *ABC*.

4. На клетчатом листе бумаги размером 10 на 10 клеток 60 клеток закрашены в черный цвет. Доказать, что всегда найдутся три соседних черных клетки, расположенных уголком (буквой «г», возможно, повернутой).

5. Плоский выпуклый многоугольник M_1 содержится внутри плоского выпуклого многоугольника M_2. Доказать, что периметр M_1 не больше периметра M_2.

Всесибирская олимпиада по математике (ЛШ-1997) – 10 класс

1. Из одного города в другой вниз по реке корабль плывет сутки, а обратно – двое. За какое время можно добраться на плоту из верхнего города в нижний?

2. Доказать, что если каждая диагональ выпуклого 4-угольника делит его на два треугольника равной площади, то этот 4-угольник – параллелограмм.

3. Доказать, что число 1…12…25 (k единиц, $k+1$ двойка) при любом натуральном k является квадратом натурального числа. Найти это число.

4. На конференции 85 % делегатов знают китайский язык, и 75 % – турецкий. Сколько процентов делегатов наверняка знают и китайский, и турецкий?

5. В плоском выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ длины всех сторон равны, а величина угла ACE вдвое меньше величины угла BCD. Найти величину угла ACE.

Всесибирская олимпиада по математике (ЛШ-1999) – 7–8 классы

1. Из A в B автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч, а из B в A – со скоростью 60 км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля на всем пути от A в B и обратно.

2. Вася и Петя удили рыбу. Вася поймал окуней на 20 % меньше, чем Петя. На сколько процентов больше окуней выловил Петя, чем Вася?

3. Существует ли треугольник с длинами сторон больше 199 см, в который можно было бы вписать другой треугольник, каждая сторона которого меньше 1 см. Все вершины вписанного треугольника должны быть расположены на разных сторонах искомого треугольника.

4. Можно ли в клетках таблицы 4×4 расставить плюсы и минусы так, чтобы у каждого минуса было три соседних плюса, а у каждого плюса – ровно один соседний минус? Клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону.

5. В классе 33 ученика, а сумма их возрастов равна 430 лет. Доказать, что в классе найдутся 20 учеников, сумма возрастов которых больше 260 лет.

Всесибирская олимпиада по математике (ЛШ-1999) – 9 класс

1. Каждый год на заводе производство падало на одинаковое количество процентов и в итоге за два года упало на 36 %. На сколько процентов падало производство каждый год?

2. В угол вписаны три окружности, причем средняя из них касается двух крайних. Площади крайних равны 4 и 16 см^2. Найти площадь средней окружности.

3. В классе 33 ученика, а сумма их возрастов равна 430 лет. Доказать, что в классе найдутся 20 учеников, сумма возрастов которых больше 260 лет.

4. В треугольнике ABC величина угла A равна 60°, а биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 1 : 2$. Найти углы треугольника ABC.

5. Найти все решения уравнения: $x^2 + 2\{x\} - 13 = 0$. Здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть x, т. е. разность между x и максимальным целым числом, не превосходящим x, например $\{1,3\} = \{-1,7\} = 0,3$.

6. Школьный кружок по астрономии за год провел 20 занятий. На каждом занятии присутствовало ровно 6 школьников, при этом никакие два школьника не встречались в кружке более одного раза. Доказать, что на занятиях кружка побывало не менее 25 разных школьников.

Всесибирская олимпиада по математике (ЛШ-1999) – 10 класс

1. Если лыжник будет проходить в час 10 км, то он придет на базу на час позже срока, а если будет бежать со скоростью 15 км/ч, то прибудет на час раньше срока. С какой скоростью ему надо бежать, чтобы прийти точно в срок?

2. Внутри окружности радиуса 3 см расположены одна окружность радиуса 2 см и две несовпадающие окружности одинакового радиуса r. Найти этот радиус, если известно, что все три внутренних окружности касаются внешней и друг друга.

3. У бабушки имелись груши и яблоки. Она разделила их между внуками, причем каждому внуку досталось одинаковое количество фруктов. Пете досталась четверть всех яблок и одна седьмая всех груш. Определить количество внуков у бабушки.

4. В треугольнике ABC величина угла B равна 60°. Пусть O – точка пересечения биссектрис AA_1 и CC_1. Доказать, что треугольник A_1OC_1 – равнобедренный.

5. Какое максимальное количество попарно различных натуральных чисел от 1 до 50 можно выбрать так, чтобы среди них не было чисел, различающихся ровно в 2 раза?

6. На встрече десяти великих путешественников выяснилось, что каждый из них побывал более чем в половине всех стран мира. Доказать, что найдутся три страны таких, что каждый великий путешественник побывал в одной из них.

Ответы и подсказки к занятиям

Занятие 1.

1. Зазоры одинаковы. 2. 12. 3. Теорема Фалеса. 4. Средние линии. 5. 900. 6. $x \in (-\infty;-1] \cup [0;1) \cup \left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. 7. Нет, четность. 8. 5 дней и 4 ночи.

Занятие 2.

1. Сначала построить без модуля. 2. Раскрыть модуль. 3. Геометрическое определение модуля. 4. Сначала построить без модуля. 5. Строить по шагам. 6. Раскрыть модули. 7. Когда произведение равно 0?

Занятие 3.

1. 3. 2. Да, можно. 3. 13. 4. Целочисленность. 5. Четность. 6. Остатки при делении на 5. 7. От противного. 8. По принципу Дирихле.

Занятие 4.

1. Выбрать самых старших. 2. Разность 14 может встретиться лишь 1 раз. 3. Рассмотреть $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ и их разности. 4. Рассмотреть количество точек, лежащих по одну сторону от прямой. 5. 16. 6. От противного. 7. Нет. 8. И снова принцип Дирихле.

Занятие 5.

1. Да, нет, да, нет. 2. Нет. 3. Да. 4. Да. 5. Нет, например, $a = 2$. 6. Нет, только четное число. 7. Да, нет, например 12. 8. Остатки. 9. Нет, делимость на 3. 10. Разложить на множители. 11. 120 = 5!. 12. Оно делится на 11111, например.

Занятие 6.

1. 84, 4. 2. Перебор. 3. 0. 4. 1. 5. 0. 6. 99. 7. mod 3. 8. 13.

Занятие 7.

1. $S = r\,(c + r)$. 2. 8 и 15 см. 3. $\frac{4ab}{a+b}$. 4. $\sqrt{5}$. 5. $\frac{65}{18}$. 6. $\frac{80}{3}$. 7. 20 и 10 или 5 и 40. 8. 5.

Занятие 8.

1. Теорема Фалеса. 2. Метод ГМТ. 3. Подобие треугольников. 4. m, $m\sqrt{3}$, $2m$. 5. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. 6. 4 и $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ см. 7. $2a\sqrt{7}$. 8. 8, 4 и 6 см.

Занятие 9.

1. Стандартное, множество точек, равноудаленных от сторон и через пропорциональность сторон и отрезков. 2. См. второе определение. 3. Через вершину провести прямую, параллельную одной из сторон, потом подобные треугольники. 4. Как множества точек, равноудаленных от вершин. 5. Через все вершины провести прямые, параллельные противоположным сторонам, и рассмотреть полученный большой треугольник.

6. Через углы. 7. $r = \frac{a+b-c}{2}$. 8. Соединить точку M с A и с B, потом свойство высот в треугольнике.

Занятие 10.

1. 47. 2. 8. 3. 90000. 4. $n!$ 5. $30 \cdot 29 \cdot 28$. 6. $\frac{8!}{3!}$. 7. 3136. 8. 18.

Занятие 11.

1. МУХА=3125. 2. Ольга – 1, Мария – 2, Полина – 3, Нина – 4. 3. 120 м. 4. Рассмотреть большие треугольники (с основаниями – сторонами прямоугольника). 5. Экстремум параболы. 6. Неравенство о средних. 7. Делимость, десятичная форма записи чисел, монотонность. 8. Свойства вписанных углов.

Занятие 12.

1. Нет, нельзя. Четность. 2. Нет, четность. 3. Нет, четность. 4. Нет, четность. 5. Начинающий, кладя в центр. Дальше центральная симметрия. 6. Победит второй, осевая симметрия. 7. Победит второй, повторяя ходы первого. 8. Если в каждой кучке – четное число спичек, то победит 2, иначе – 1.

Занятие 13.

1. Через 5 лет. 2. $\frac{60}{11}$ мин. 3. Четверг. 4. Получить 1 л в пятилитровом, потом долить туда 3 из трехлитрового. 5. 50. 6. 35 суток. 7. $\min = \frac{1}{9!}$, $\max = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$. 8. 35.

Занятие 14.

1. 60 %. 2. 3. 3. Перебор. 4. 9382+3152=12534. 5. 556. 6. 2. 7. $\sum_{k=1}^{9} a_k$. 8. Перебор.

Занятие 15.

1. Использовать свойство вписанного угла. 2. Описать около треугольника окружность. 3. $2\sqrt{\frac{S}{3}}$. 4. $2r^2(3+2\sqrt{3})$. 5. 2 см. 6. $\sqrt{2}-1$. 7. 5,5 и 6 см. 8. $\frac{\pi(b^2-2ac)}{4a^2}$.

Занятие 16.

1. Подобие треугольников. 2. Подобие треугольников. 3. Отрезки касательных равны. 4. Вписанные углы. 5. 2. 6. $\sqrt{b^2+c^2}$. 7. Точки O, B, A_1 и A_2 лежат на одной окружности. 8. Симметрия.

Занятие 17.

1. 63. 2. $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. 3. $b_7 = 7 \cdot 3^6$; $b_7 = \dfrac{7}{3^4}$. 4. Нет. 5. 10, 12, 14, 16, 18. 6. Могут, $q = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$. 7. –2. 8. 6 рыб.

Занятие 18.

1. $S_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3\cdot(3n+1)}$. 2. $S_n = (n+1)! - 1$. 3. -500. 4. 35 392. 5. 577 203. 6. $-8k^2 - 4k$. 7. $n^2(n+1)$. 8. $\dfrac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$. Используйте равенство: $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$.

Занятие 19.

1. Теорема косинусов для углов между диагоналями. 2. Достраивание до параллелограмма. $m_a = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. 3. $\dfrac{1}{4}; \dfrac{7}{25}$. 4. 13. 5. Искомая точка – это основание высоты треугольника, проведенной из вершины B. Указание: через вершину B и основания перпендикуляров проведите окружность. 6. 3:5:7. 7. $P = \dfrac{2(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 8. 10, 20, $10\sqrt{3}$.

Занятие 20.

1. Провести высоту. 2. $\dfrac{1}{4}$. 3. $\dfrac{3}{8}S$. 4. S=30. 5. S=320. 6. Написать площадь треугольников через отрезки диагоналей. 7. $\dfrac{m^2+n^2}{|m-n|}$.

8. $\dfrac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}$.

Занятие 21.

1. Использовать основное тригонометрическое тождество. 2. $30°$ и $150°$, 0 и 2π, $\dfrac{4}{3}\pi$ и $\dfrac{5}{3}\pi$. 3. $-\dfrac{3}{5}$ и $-\dfrac{4}{5}$. 4. $-\cos\alpha$, $-\cos\alpha$, $-\sin\alpha$, $-\operatorname{tg} x$.

5. Формулы приведения. 6. $-\cos^2\alpha$, $-\sin^2\alpha$. 7. $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$.
8. Привести к общему знаменателю.

Занятие 22.

1. $1 - 3\dfrac{(m^2-1)^2}{4}$. 2. $\dfrac{pq}{p^2+q^2}$, $\dfrac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$, $\dfrac{pq}{q^2-p^2}$. 3. $\dfrac{1}{3}$. 4. 1. 5. $\dfrac{1}{32}$. 6. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$. 7. $\dfrac{1}{4}$. 8. $\dfrac{7}{\sqrt{130}}$ и $\dfrac{9}{\sqrt{130}}$.

Занятие 23.

1. {-4,-8}. 2. $\dfrac{24}{25}$. 3. $c = -2a - 2b$. 4. Свойства скалярного произведения. 5. $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. 6. Ввести два вектора-стороны и выразить все через них. 7. $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. 8. $90°$.

Занятие 24.

1. $n_1 = 45; n_2 = 54$. 2. 14 и 12; 10 и 8. 3. 10 и 15 часов. 4. 30 % – 150 г; 10 % – 450 г. 5. $n = 28$. 6. 37 и 48. 7. 15 км/ч. 8. 1717.

Занятие 25.

1. $y = -x + 1$. 2. $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. 3. $y = -x - 1$. 4. $y_1 = x + 2; y_2 = -x + 4$. 5. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. 6. $y = 5x + 7$. 7. $y = -x\sqrt{3} + (3 + 2\sqrt{3}); 6 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$. 8. $(-2+3\sqrt{3}; -1)$ или $(-2-3\sqrt{3}; -1)$; $9\sqrt{3}$.

Занятие 26.

1. Окружность, построенная на отрезке AO как на диаметре, где т.O – центр окружности. 2. 4 отрезка и 4 дуги. 3. Дуга окружности. 4. Метод ГМТ. 5. Провести срединный перпендикуляр. 6. Либо AB = BM, тогда точка M лежит на окружности радиуса AB с центром в точке B. Либо AM = BM= = CM, тогда M – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Либо MA = AB = MC, тогда M – точка, симметричная B относительно AC. 7. Восьмиугольник, четыре стороны которого равны и параллельны сторонам квадрата и отстоят от центра квадрата на расстояние в 1,5 единицы. 8. Отрезок, соединяющий середину основания с серединой высоты, опущенной на основание.

Занятие 27.

Теорема Пифагора, потом высота в прямоугольном треугольнике. 2. Отдельно можно построить два прямоугольных треугольника, на которые исходный треугольник разбивается высотой. 3. Достроить до параллелограмма. 4. Преобразование подобия. 5. Осевая симметрия. 6. Преобразование поворота.

Занятие 28.

1. Эквивалентно $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$. 2. $1+a_i \ge 2\sqrt{a_i}$. Далее перемножаем. 3. Эквивалентно $\left(\frac{a}{2}+c-b\right)^2 \ge 0$. 4. $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. Следовательно, сумма меньше $1-\frac{1}{n}$. 5. $\frac{k-1}{k} < \frac{k}{k+1}$. Перемножая эти неравенства ($k=2$, 4,…), и обозначая выражение за A, получим $A<\frac{1}{101A}$. Еще их можно перемножить по другому ($k=3, 5, \ldots$). В итоге получится $\frac{1}{200} < A^2 < \frac{1}{101}$, откуда следует требуемое. 6. Сведением к неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом. 7. Сведением к неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом. 8. Замена переменных и сведение к неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Занятие 29.

1. Метод математической индукции. 2. $n\cdot n! = (n+1)!-n!$. 3. Метод математической индукции. 4. $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. 5. Метод математической индукции. 6. Метод математической индукции для правого неравенства, левое очевидно. 7. Метод математической индукции. 8. Метод математической индукции.

Занятие 30.

1. Провести через одну из вершин прямую, параллельную той из меньших хорд, которая не проходит через эту вершину. 2. Воспользоваться предыдущей задачей, потом теоремой косинусов. 3. Использовать свойства вписанных углов. 4. 5. 5. $\frac{25}{2}$. 6. $\frac{a}{2(1+\sqrt{3})}$. 7. $R\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $R\sqrt{\frac{2}{3}}$. 8. $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$.

Занятие 31.

1. (2,1); (5,–2). 2. (0,1); (1,0); (–1,2); $\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3};2\right)$; $\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3},2\right)$. 3. (1,3) и (3,1). 4. $\left(-\frac{2}{3};2\right)$; (2,2). 5. (1,3);(3,1); $\left(-\frac{5}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{23},-\frac{5}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{23}\right)$; $\left(-\frac{5}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{23},-\frac{5}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{23}\right)$. 6. (1,3); (–1,–3) и симметричные. 7. (4, 3, 2) и (–4, –3, –2). 8. (1, 2) и (2, 1).

Занятие 32.

1. Нет. Взять равнобедренный треугольник с углом 45° напротив основания, разрезать его по высоте, проведенной к боковой стороне, а потом еще от большего треугольника отрезать треугольник, равный меньшему. 2. Гомотетия (преобразование подобия). 3. Сумма этих отрезков – высота. 4. Найти сторону. 5. На две части. 6. Да. 7. Если соединить середины двух параллельных хорд параболы, то получим направление оси *OY*. 8. Рассмотреть симметрию с центром в произвольной точке внутренней окружности.

III *олимпиада НГУ по математике* 2000 *г.*

9 класс

1. 1234. 2. 15° и 15°. 3. Нет. 4. Через неравенство треугольника. 5. Первый. 6. Нет.

10 класс

1. 8 часов 4 минуты. 2. Да, можно, доказать можно индукцией. 3. см. задачу 3 в 9 классе. 4. Доказать равенство и перпендикулярность соседних сторон. 5. Принцип Дирихле. 6. 6.

VI *олимпиада НГУ по математике* 2003 *г.*

9 класс

1. Четность. 2. 9999999399999999999999 и 9999999400000000000000. 3. Центральная симметрия. 4. Пилообразный круг. 5. $x^7+x^2+1 = \left(x^2+x+1\right)\left(x^5-x^4+x^2-x+1\right)$.

10 класс

1. Нет. 2. mod 7. 3. Параллельный перенос и поворот. 4. Вписанные углы. 5. Если a^2 – член прогрессии, то и $(a+kd)^2$ – тоже член прогрессии для любого целого *k*.

Всесибирская олимпиада по математике (ЛШ-1997)

9 класс

1. Половину. 2. 9. 3. Метод ГМТ. 4. Принцип Дирихле. 5. Провести прямую через сторону внутреннего многоугольника до пересечения со сторонами внешнего.

10 класс

1. 4 суток. 2. Доказать равенство треугольников. 3. 3…35 (*k* троек). 4. 60 %. 5. 120°.

Всесибирская олимпиада по математике (ЛШ-1999)

7–8 классы

1. 48. 2. На 25 %. 3. Да, длины сторон: 400; 200,001; 200,001. 4. Можно. 5. От противного.

9 класс

1. На 20 %. 2. 8. 3. От противного. 4. 30, 60 и 90. 5. $-1-\sqrt{6}$ и $2\sqrt{5}-1$. 6. Принцип Дирихле.

10 класс

1. 12. 2. 9/8. 3. 5 или 6. 4. Считать углы. 5. 33. 6. Принцип Дирихле.

Ответы и подсказки к домашним заданиям

Домашнее задание 1.

1. $\frac{1}{2b}$. 2. $50\,\%$. 3. $MN=\frac{2ab}{a+b}=2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. 4. часть бесконечной трапеции и часть «пилы». 5. $\left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$. 6. Нет, четность.

Домашнее задание 2.

1. Две прямые $y=-x+1$ и $y=-x-1$. 2. Раскрыть модули, кусочно-линейный график. 3. 300 кг. 4. 9. 5. $\left(x^5-x^4+x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$. 6. Нет, четность.

Домашнее задание 3.

1. Принцип Дирихле. 2. Верно. 3. После снижения цена понизилась на 4 %. 4. 6568 и 568. 5. $x=16$, $y=15$. 6. Да, справедливо.

Домашнее задание 4.

1. Принцип Дирихле. 2. Определение биссектрисы через ГМТ. 3. График состоит из кусков прямых. 4. График состоит из кусков гипербол. 5. 5 цветов. 6. Принцип Дирихле.

Домашнее задание 5.

1. $(52,49);(152,151)$. 2. $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. 3. От противного и сумма внешних углов многоугольника. 4. $111=3\cdot 37$. 5. Преобразования по модулю 7. 6. 4 кг.

Домашнее задание 6.

1. $x\in[5,10]$. 2. Перебор остатков. 3. Остатки или индукция. 4. Остатки, принцип Дирихле. 5. Десятичная запись числа. 6. Перебор остатков.

Домашнее задание 7.

1. $\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$. 2. Свойства прямоугольника. 3. $S=3a^2\left(7-4\sqrt{3}\right)$. 4. Кусочно-линейный график. 5. Делимость. 6. Делимость на 1000, принцип Дирихле.

Домашнее задание 8.

1. Например, достроить до треугольника. 2. Отсекает одну седьмую часть. 3. $AH:HB=1:9$. 4. $x\in(-\infty,-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$. 5. Поделить четвертую степень этого числа на куб его же. 6. От противного.

Домашнее задание 9.

1. Рассмотреть площади треугольников ABC и BCD. 2. $60°$. 3. 24. 4. Уравнения + целочисленность. 5. Остатки по модулю 11. 6. Свойство биссектрисы.

Домашнее задание 10.

1. –1; 3. 2. $S_{\max}=11250$, при $x=75$. 3. 7, 8, 9. 4. Объединение пересечений полуплоскостей. 5. $x=y=z=1$. 6. 64·14.

Домашнее задание 11.

1. 9. 2. Принцип Дирихле. 3. Написать площадь через высоту. 4. От противного (получится последовательность Фибоначчи). 5. 8, доказать от противного. 6. Упорядочить школьников по количеству посещенных занятий.

Домашнее задание 12.

1. Выигрывает Петя. 2. Нет, инвариант – четность числа нечетных чисел. 3. –7, 1, –3. 4. 25 грибов. 5. Неравенство о средних. 6. Достроить до крестика из 5 маленьких квадратов.

Домашнее задание 13.

1. Делимость на 9, десятичная форма записи числа. 2. 2002. 3. а) $25^2=625$; б) $26^2=676$; в) $11^3=1331$; г) $343=7^7$. 4. 3087. 5. $3025=55^2$. 6. Сложить два раза пополам и отрезать конец.

Домашнее задание 14.

1. 2. 2. 90 человек. 3. 20 человек. 4. Остатки. 5. Три кучки по 7 монет взвешивать. 6. Сначала взвесить 8 и 8.

Домашнее задание 15.

1. $r=10/3$. 2. «Распрямление» периметра. 3. -1; 4. 4. 60. 5. Группировка, сумма квадратов. 6. Да, дискретная непрерывность.

Домашнее задание 16.

1. $r_1=R\cdot\frac{d-R}{d+R};r_2=R\cdot\frac{d+R}{d-R}$. 2. 3 или 6. 3. $71{,}125\,\%$. 4. Разложение на множители, остатки. 5. «Распрямление» периметра. 6. 3/5.

Домашнее задание 17.

1. $127/8$. 2. $x_1=1/2$; $x_2=-7/9$. 3. 9. 4. $1/3;2/3$. 5. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right]$.

6. Стороны равны 21, 15, 7, 13, $S=168$.

Домашнее задание 18.

1. $S_n=\frac{n}{2n+1}$. 2. $S=\frac{10^{n+1}-10-9n}{81}$. 3. $a=3;d=6$. 4. 3, 4, 5. 5. 3, 243.

6. $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

Домашнее задание 19.

1. Теорема синусов. 2. $R=\dfrac{8\sqrt{43}}{\sqrt{7}}$. 3. 0. 4. 252. 5. Остатки. 6. 10 дней.

Домашнее задание 20.

1. Отношения площадей. 2. 1210, 2020. 3. Свойства площадей. 4. 1/3, 2/3, 2/3, 4/3. 5. 18. 6. Неравенства треугольника.

Домашнее задание 21.

1. Формулы приведения. 2. 2/3. 3. $x=\sqrt[3]{75}$. 4. 1. 5. Преобразования, делимости. 6. 45.

Домашнее задание 22.

1. Тригонометрические формулы. 2. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}-1\right)$. 3. $-\dfrac{12}{13}$; $-\dfrac{3}{4}$. 4. $AH:AB=21:32$. 5. Левое выражение больше. 6. 1,86 и 1,64.

Домашнее задание 23.

1. Скалярное произведение. 2. $0;\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}$. 3. 5. 4. Равно 3. 5. 23, –13. 6. 96, 3/2.

Домашнее задание 24.

Сведение к квадрату разности. 2. Нельзя, четность. 3. Угол ABF – развернутый. 4. От противного. 5. Конструкция. 6. 8.

Домашнее задание 25.

1. 12 и –12. 2. 4/3 и –4/3. 3. 1234568. 4. Дополнительные построения. 5. Неравенство треугольника. 6. $S_{2n}=-2n^2-n$, $S_{2n+1}=2n^2+3n+1$.

Домашнее задание 26.

1. Метод подобия, алгебраический метод. 2. $2+\sqrt{3}$. 3. Окружность с диаметром AB. 4. Окружность с диаметром AB. 5. Фигура из углов и дуг окружности. 6. 10 %.

Домашнее задание 27.

1. Алгебраические преобразования. 2. Алгебраические преобразования. 3. Параллельный перенос. 4. Свойства параллелограмма. 5. Осевая симметрия. 6. Поворот.

Домашнее задание 28.

1. Преобразования. 2. Преобразования. 3. Удвоение. 4. Неравенство о средних. 5. Свойства вписанных углов. 6. Свойства замечательных отрезков треугольника.

Домашнее задание 29.

1. Метод математической индукции. 2. Метод математической индукции. 3. Метод математической индукции. 4. Метод математической индукции. 5. Метод математической индукции. 6. Метод математической индукции.

Домашнее задание 30.

1. $\dfrac{3}{2}$. 2. $\dfrac{8}{5}R$. 3. $\dfrac{216}{5}$. 4. 8. 5. Замечательные точки в треугольнике. 6. $\pi R^2\left(8\sqrt{2}-11\right)$.

Домашнее задание 31.

1. (3, 2) и (2, 3). 2. (2, 1) и (–1, –2). 3. (2, 3), (3, 2), $\left(\dfrac{-7\pm\sqrt{73}}{2},\dfrac{-7\mp\sqrt{73}}{2}\right)$. 4. $(\pm2,\mp2),(\pm2,\pm2)$. 5. $\left(\dfrac{a+b}{2};\pm\dfrac{a-b}{2}\right)$. 6. $\left(\dfrac{17}{12},\dfrac{5}{3}\right)$.

Домашнее задание 32.

1. Центральная симметрия. 2. Когда она совпадет с основанием высоты. 3. Подобие. 4. Индукция, делимости, остатки. 5. 3, 3, 2. 6. Одновременно.

Список литературы

1. Материалы подготовительных курсов СУНЦ НГУ / Сост.: Г. Я. Куклина, А. А. Киприянов, С. Г. Барам, М. А. Ильин, В. Д. Алешин / Под ред. А. А. Никитина, А. С. Марковичева. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, Специализированный учебно-научный центр, 2006.

2. Урман А. А., Храмцов Д. Г., Шрайнер А. А. Задачи городских и районных математических олимпиад. Новосибирск: Новосиб. гос. пед. ун-т, Новосибирский государственный университет, 2004.

3. Шрайнер А. А. Задачи районных математических олимпиад Новосибирской области. Новосибирск: НГПУ, 2000.

4. Никитин А. А., Белоносов В. С., Вишневский М. П., Войтишек В. В., Зеленяк Т. И., Мальцев А. А., Марковичев А. С., Михеев Ю. В., Саханенко А. И., Смирнов Д. М. Математика: Учебник для девятых классов средних общеобразовательных учебных заведений / Под ред. А. А. Никитина. Ч. I. Новосибирск: ИДМИ, 2001.

5. Никитин А. А., Белоносов В. С., Вишневский М. П., Войтишек В. В., Зеленяк Т. И., Мальцев А. А., Марковичев А. С., Михеев Ю. В., Саханенко А. И., Смирнов Д. М. Математика: Учебник для девятых классов средних общеобразовательных учебных заведений / Под ред. А. А. Никитина. Ч. II. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2003.

6. Белоносов В. С., Фокин М. В. Задачи вступительных экзаменов по математике: Учеб. пособие. Новосибирск: Сиб. унив. Изд-во, 2005.

7. Сурмин А. Г., Ерофеев В. И. Вычислительные задачи по математике с решениями: Учеб. пособие. Новосибирск: Сиб. Унив. изд-во, 2003.

8. Сурмин А. Г., Ерофеев В. И. Задачи по математике, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в ВКИ НГУ в 1993–2001 гг. Новосибирск: НГУ, 2001.

9. Барсуков А. Н. Алгебра. Учебник для 6–8 классов. М.: Просвещение, 1970.

10. Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Пигарев Б. П., Трушанина Т. Н. Задания для проведения письменного экзамена по математике в 9 классе: Пособие для учителя. М.: Просвещение, 1996.

11. Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С. Геометрия: задачник к школьному курсу. М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998.

12. Атанасян Л. С., Бутузов А. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия: Учебник для 7–9 классов средней школы. М.: Просвещение, 1994.

13. Атанасян Л. С., Бутузов А. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И. Геометрия: Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса. М.: Просвещение, 1997.

14. Киселев А. П., Рыбкин Н. А. Геометрия: Планиметрия: 7–9 классы: Учебник и задачник. М.: Дрофа, 1995.

15. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике: Геометрия. М.: Просвещение, 1992.

16. Каганов Э. Д. 400 самых интересных задач с решениями по школьному курсу математики для 6–11 классов. М.: ЮНВЕС, 1997.

17. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник. М.: МНЦМО, 2003.

18. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре: Учеб. пособие для 8–9 классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2001.

19. Лурье М. В. Задачи на составление уравнений. Техника решения. М.: Учебно-научный центр довузовского образования, ФИЗМАТЛИТ, 2002.

20. Егерев В. К., Зайцев В.В., Кордемский Б. А. и др. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие / Под ред. М. И. Сканави. 6-е изд. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2001.

21. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1975.

22. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2004.

23. Алфутова Н. Б., Загорский В. В., Корнеева Т. П., Смуров М. В., Устинов А. В. Варианты вступительных экзаменов в Школу имени А. Н. Колмогорова. М.: Школа имени А. Н. Колмогорова, «Самообразование», 2000.

24. Петраков И. С. Математика для любознательных. М.: Просвещение, 2000.

25. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математические олимпиады Московской области. 1993–2002. М.: Изд-во МФТИ, 2003.

26. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 9 класс. М.: «Просвещение», 1997.

27. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 10 класс. М.: Просвещение, 1998.

28. Агаханов Н. Х., Купцов Л. П., Нестеренко Ю. В., Резниченко С. В., Слинько А. М. Математические олимпиады школьников. 11 класс. М.: Просвещение, 1999.

29. LXIII Московская математическая олимпиада. М.: МЦНМО, 2000.

30. LXIV Московская математическая олимпиада. М.: МЦНМО, 2001.

31. Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел. М.: Просвещение, 1986.

32. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. М.: Наука, 1978.

33. Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи. М.: Наука, 1988.

34. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. СПб.: Манускрипт, 1994.

35. Произволов В. В. Задачи на вырост. М.: Бюро Квантум, 2003. Приложение к журналу «Квант» № 5/2003.

36. Аменицкий Н. Н., Сахаров И. П. Забавная арифметика. М.: Наука, 1991.

37. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад. М.: Просвещение, 1971.

38. Леман А. А. Сборник задач московских математических олимпиад. Пособие для внеклассной работы по математике / Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965.

39. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1986.

40. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Работ Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1981.

41. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Киров: АСА, 1994.

42. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1971.

43. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. Библиотечка физико-математической школы. М.: Наука, 1970.

44. Блинков А. А. Московские математические регаты. М.: МЦНМО, 2001.

45. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.

46. Рукшин С. Е. Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге. Первые пятьдесят лет. Ростов н/Д.: МарТ, 2000.

47. Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. Петербургские математические олимпиады. СПб.–М.–Краснодар: Лань, 2003.

48. Кохась К. П., Иванов С. В., Храбров А. И. и др. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2003 года. СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2003.

49. Медников Л. Э., Мерзляков А. С. Математические олимпиады. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

50. Муштари Д. Х. Подготовка к математическим олимпиадам. Казань: Казанское математическое общество, 2000.

Оглавление

Учебное издание

Авдюшенко Александр Юрьевич,
Куклина Галина Яковлевна,
Храмцов Дмитрий Геннадьевич

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В СУНЦ НГУ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 9 КЛАССОВ

Верстка Т. В. Ивановой

Подписано в печать 08.02.2010 Формат 60x84/16
Заказ №
Усл. печ. л. 5,3
Уч.-изд. л. 4,4
Тираж 300 экз.

Редакционно-издательский центр НГУ
630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2