Министерство образования Российской Федерации

Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

В.И.Филиппенко, И.Д.Михайлова

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие для студентов всех специальностей

заочной и дистанционной форм обучения

Шахты - 2002

УДК 517.2
Ф 53

СОСТАВИТЕЛИ:

В.И.Филиппенко к.ф.-м.н., доцент кафедры математики ЮРГУЭС

И.Д.Михайлова старший преподаватель кафедры математики ЮРГУЭС

Учебное пособие охватывает традиционные разделы теории линейных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического, гиперболического и параболического типа. Значительное место в пособии занимает описание методов, наиболее часто применяемых на практике при решении уравнений с частными производными, таких, например, как: метод разделения переменных, метод функции Грина и др. В пособии рассмотрено достаточное количество задач, иллюстрирующих теоретический материал.

Пособие предназначено для студентов-заочников второго курса механико-радиотехнического факультета ЮРГУЭС.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например:
1) при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (0.1)$$

где c – скорость распространения волн в данной среде;
2) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (0.2)$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x,y,z). \qquad (0.3)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (0.3) переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (0.4)$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в котором отсутствуют массы и, соответственно, электрические заряды.

Уравнения (0.1)-(0.4) называют основными уравнениями математической физики. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Функция $u = u(x,y,z)$, удовлетворяющая какому-либо из уравнений (0.1)-(0.4), называется его решением.

1. Понятие об общем решении уравнения в частных производных.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка: $f(x,y,y',y'',...,y^{(n)}) = 0$. Его общий интеграл представляет собой некоторое семейство функций, зависящее от n произвольных постоянных $F(x,y,C_1,C_2,...,C_n) = 0$. Любое частное решение получается из него, если параметрам $C_1,C_2,...,C_n$ придать определенные значения.

У дифференциального уравнения в частных производных общее решение содержит произвольные функции, количество которых равно порядку уравнения.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (1.1)$$

Найдем его общий интеграл, т.е. функцию $u(x;y)$, удовлетворяющую (1.1). Для этого сначала запишем это уравнение в виде: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$ Поскольку производная по переменной x от величины, стоящей в скобках, равна нулю, то последняя является некоторой произвольной функцией от y: $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$ Поэтому $u(x,y) = \int f(y)dy.$ Но интегрируя произвольную функцию $f(y)$, получим новую, также произвольную функцию, скажем $F(y)$, плюс произвольная функция $\phi(x)$ ($\phi(x)$ играет роль произвольной постоянной интегрирования в теории обыкновенных дифференциальных уравнений). Таким образом, общий интеграл уравнения второго порядка (1.1) $u(x,y) = \phi(x) + F(y)$ содержит две произвольные функции. Чтобы теперь из общего решения $u(x;y)$ найти определенное частное решение, нужно найти конкретный вид функций $\phi(x)$ и $F(y)$. Однако – и в этом состоит причина существенного различия методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и в частных производных – из-за чрезвычайной общности общего решения уравнения в частных производных, как правило, очень трудно из него выделить нужное конкретное решение.

Примеры

1. Найти общее решение дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2} = 0$, где $u(x;y)$ – неизвестная функция двух независимых переменных.

Решение. Перепишем уравнение в виде: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$ Отсюда видно, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ не зависит от x, так как частная производная от нее по x, равна нулю. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = C_1(y)$ где $C_1(y)$ – произвольная функция от y. В уравнении $\frac{\partial u}{\partial x} = C_1(y)$

частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ берется по x, а y считается постоянной. Взяв интеграл от левой и правой частей, получим решение поставленной задачи:
$u(x,y) = \int C_1(y)dx = xC_1(y) + C_2(y),$ где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции от y. Если найденную функцию $u(x,y)$ два раза продифференцировать по x,

то получим $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, и, следовательно, найденная функция является общим решением данного уравнения.

2. Найти общее решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 - y$.

Решение. Переписав уравнение в виде: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 - y$ и интегрируя левую и правую части по y (считая в это время x постоянным), получим:
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \int (x^2 - y)dy = x^2 y - \dfrac{y^2}{2} + C_1(x)$. Интегрируя теперь по x полученное уравнение (считая в это время y постоянным), получим:
$u(x,y) = \int (x^2 y - \dfrac{y^2}{2} + C_1(x))dx = \dfrac{x^3 y}{3} - \dfrac{y^2 x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y)$. Здесь
$C_1^*(x) = \int C_1(x)dx$. Таким образом, общим решением рассматриваемого уравнения будет функция: $u(x,y) = \dfrac{x^3 y}{3} - \dfrac{y^2 x}{2} + C_1^*(x) + C_2(y)$, где $C_1^*(x)$ и $C_2(y)$ – произвольные функции, причем $C_1^*(x)$ дифференцируема.

3. Решить дифференциальное уравнение в частных производных $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Решение. Переписав уравнение в виде $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u\right) = 0$ и интегрируя левую и правую части по переменной x, получим: $\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = C_1(y)$. В этом уравнении $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ можно рассматривать как обычную производную по y, а x при этом считать параметром. Тогда уравнение перепишется в виде: $\dfrac{du}{dy} - 2u = C_1(y)$. Мы получили неоднородное линейное уравнение первого порядка. Решая его, получаем:
$u(x,y) = e^{\int 2dy}\left(C_2(x) + \int C_1(y)e^{-\int 2dy}dy\right) = C_2(x)e^{2y} + C_1^*(y)$.
Таким образом, $u(x,y) = C_2(x)e^{2y} + C_1^*(y)$, где $C_2(x)$ и $C_1^*(y)$ – произвольные функции.

Упражнения

4. $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) + (x - y)\psi'(y)$. Проверить, что $(x - y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

(φ и ψ – дважды дифференцируемые функции).

5. Исключить произвольные функции ϕ и ψ из семейства:

$u(x,t) = \phi(x - at) + \psi(x + at)$.

Ответ. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений с частными производными:

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Ответ. $u(x,y) = C_1(x) + C_2(y)$.

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y$.

Ответ. $u(x,y) = \dfrac{x^2 y}{2} + \dfrac{xy^2}{2} + C_1(x) + C_2(y)$.

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 + y$.

Ответ. $u(x,y) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{yx^2}{2} + xC_1(y) + C_2 y$.

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+y}$.

Ответ. $u(x,y) = e^{x+y} + yC_1(x) + C_2(x)$.

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Ответ. $u(x,y) = C_1(x) + \dfrac{1}{x} C_2(y)$.

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Ответ. $u(x,y) = C_1(x) e^{y^2} + C_2(y)$.

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 5 \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Ответ. $u(x,y) = C_1(x) + C_2(y) e^{5x}$.

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$.

Ответ. $u(x,y) = x^2 + C_1(y)x + C_2(y)$.

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x.$

Ответ. $u(x, y) = x^2 y + C_1(y) + C_2(x).$

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}.$

Ответ. $u(x, y) = C_1(x)e^y + C_2(x).$

16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y.$

Ответ. $u(x, y) = \dfrac{xy^2}{2} + \dfrac{y^3}{6} + yC_1(x) + C_2(x).$

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x.$

Ответ. $u(x, y) = x^3 + xC_1(y) + C_2(y).$

2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка.

С помощью замены переменных уравнение второго порядка

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.1)$$

сведем к одному из простейших уравнений. Полагая, что коэффициент $c \neq 0$, введем новые независимые переменные $\xi = x + \lambda_1 y$, $\eta = x + \lambda_2 y$, где λ_1 и λ_2 пока произвольные, но различные (иначе ξ и η не будут взаимно независимые функции) числа. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ и}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

то имеет место соответствие $\dfrac{\partial}{\partial x} \to \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial \eta}$, $\quad \dfrac{\partial}{\partial y} \to \lambda_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \lambda_2 \dfrac{\partial}{\partial \eta}$. Поэтому

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\xi}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\lambda_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Умножим эти вторые производные соответственно на a, $2b$ и c и затем их сложим. Тогда левая часть уравнения (2.1) примет вид: $A\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$, где

$$A=a+2b\lambda_1+c\lambda_1^2,\quad B=a+b(\lambda_1+\lambda_2)+c\lambda_1\lambda_2,\quad C=a+2b\lambda_2+c\lambda_2^2.$$

Рассмотрим теперь вспомогательное квадратное уравнение $c\lambda^2+2b\lambda+a=0$. Его корнями являются $\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{c}$. В зависимости от значений дискриминанта $D=b^2-ac$ возможны три случая: если в рассматриваемой области $b^2-ac>0$, то уравнение принадлежит к гиперболическому типу; если $b^2-ac=0$, то уравнение (2.1) параболического типа; если $b^2-ac<0$, то уравнение принадлежит эллиптическому типу.

Следовательно, каноническое уравнение гиперболического типа имеет вид $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f(x,y,z,z'_x,z'_y)$,(или $\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial\beta^2}=\Phi\left(\alpha,\beta,z,\frac{\partial z}{\partial\alpha},\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)$,где $\alpha=\frac{x-y}{2},\beta=\frac{x+y}{2}$); параболического типа – $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y,z,z'_x,z'_y)$;

эллиптического типа – $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y,z,z'_x,z'_y)$.

В общем случае вводятся новые переменные $\xi=\xi(x,y),\eta=\eta(x,y)$. $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции и $\begin{vmatrix}\xi'_x & \xi'_y\\ \eta'_x & \eta'_y\end{vmatrix}\neq 0.$

Дифференциальное уравнение $a\,dy^2-2b\,dxdy+c\,dx^2=0$ называют уравнением характеристик уравнения $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})$.

Примеры

18. Привести к каноническому виду уравнение $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

Решение. Здесь $a = x^2, b = xy, c = y^2, b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0;$ следовательно, уравнение принадлежит к параболическому типу. Составим уравнение характеристик $x^2dy^2 - 2xydxdy + y^2dx^2 = 0.$ В этом случае оба семейства характеристик совпадают. Рассмотрим уравнение $xdy = ydx.$ Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ или $\ln|y| - \ln|x| = \ln|C|,$ т.е. $\frac{y}{x} = C.$ Введем новые переменные $\xi = \frac{y}{x}, \eta = y.$ η выбираем таким образом, чтобы выполнялось условие $\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$ Вводим новые переменные ξ и $\eta.$ Тогда данное уравнение примет вид $-\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$

Ответ. Данное уравнение параболического вида, его каноническая форма $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$

19. Рассмотрим уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$ Это уравнение гиперболического типа, так как $b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$ Составляем уравнение характеристик $dy^2 + 2\sin xdxdy - \cos^2 xdx^2 = 0$ или, дописав в левой части этого равенства $dxdy - dxdy + \sin xdx^2 - \sin xdx^2$ и сгруппировав, получаем $(dy + (1 + \sin x)dx)(dy - (1 - \sin x)dx) = 0.$ Интегрируя уравнения $dy + (1 + \sin x)dx = 0$ и $dy - (1 - \sin x)dx = 0$ получим $x + y - \cos x = C_1, x - y + \cos x = C_2.$ Вводим новые переменные по формулам $\xi = x + y - \cos x, \eta = x - y + \cos x.$ Тогда данное уравнение в новых переменных приводится к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$ Положив $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta,$ приведем уравнение к каноническому виду: $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0.$

Ответ. Данное уравнение гиперболического вида, его каноническая форма $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0.$

20. Привести к каноническому виду уравнения:

а) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ответ. $$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0, \quad \xi = \frac{x^2}{2} + y, \quad \eta = x.$$

б) $$(1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ответ. $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

в) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x} + 6\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Ответ. $$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = 3x + y.$$

3. Свободные колебания струны с закрепленными концами.

В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Натяжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси от 0 до l . Предположим, что концы струны закреплены в точках x=0 и x=l. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя положение, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, или отклонить струну и придать ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения – говорят, что струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси OX и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x,t)$, которая дает величину перемещения точек струны с абсциссой x в момент t.

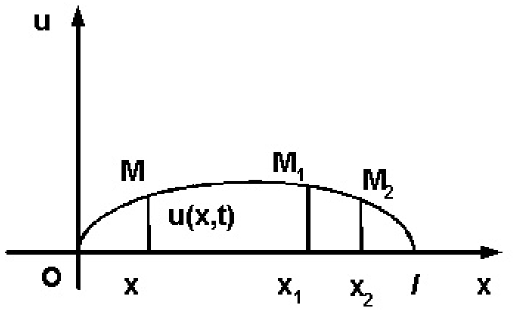

Рисунок 1.

Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости (x,u), то будем предполагать, что длина элемента струны $\cup M_1M_2$ равняется ее проекции на ось OX, т.е. $\cup M_1M_2 = x_2 - x_1$. Также будем предполагать, что натяжение во всех точках струны одинаковое, обозначим его через T.

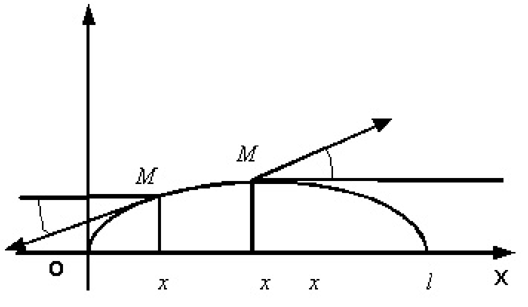

Рисунок 2.

Рассмотрим элемент струны MM'. На концах этого элемента, по касательным к струне, действует сила $\vec{T}$. Пусть касательные образуют с осью OX углы φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда проекция на ось Ou сил, действующих на элемент MM' будет равна $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi$. Так как угол φ мал, то можно положить $tg\varphi \approx \sin\varphi$, и мы будем иметь

$$T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi \approx Ttg(\varphi + \Delta\varphi) - Ttg\varphi = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] =$$

$$= T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции. Пусть $\rho-$ линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет $\rho\Delta x$. Ускорение элемента равно $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, по принципу Даламбера будем иметь $\rho\Delta x\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$. Сокращая на Δx и обозначая $\dfrac{T}{\rho}=a^2$, получаем уравнение движения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (3.1)$$

Это и есть волновое уравнение – уравнение колебаний струны. Для полного определения движения струны одного уравнения (3.1) недостаточно. Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять еще граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны (x =0 и x=l), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент (t=0).

4. Продольные колебания стержня.

Рассмотрим однородный стержень длины l , для изгибания которого надо приложить усилие. Ограничимся исследованием только таких усилий, при которых поперечные колебания перемещаясь вдоль оси стержня остаются плоскими и параллельными друг другу. Это допущение оправдано, если поперечные размеры стержня будут невелики по сравнению с его длиной.

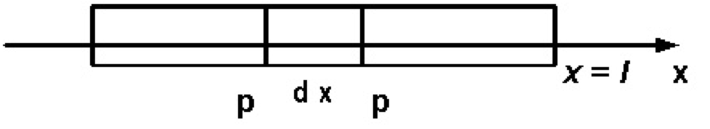

Рисунок 3.

Если стержень несколько растянуть или сжать вдоль продольной оси, а затем предоставить самому себе, то в нем возникнут продольные колебания. Направим ось OX вдоль оси стержня и будем считать, что в состоянии покоя концы стержня находятся в точках x=0 и x=l. Пусть x- абсцисса некоторого сечения стержня, когда последний находится в покое. Обозначим через $u(x,t)$ смещение этого сечения в момент времени t ; тогда смещенное сечение с абсциссой $x+dx$ будет равно $u+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx$. А относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой x выражается производной $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$. Считая, что стержень совершает малые колебания, можно вычислить в этом сечении натяжение Т. Действительно, применяя закон Гука, найдем, что $T = ES\frac{\partial u}{\partial x}$, где E - модуль упругости материала стержня , а S – площадь поперечного сечения. На элемент стержня, заключенный между сечениями с абсциссами x и $x+dx$ действуют силы натяжения T_x и T_{x+dx}, направленные вдоль оси

ОХ; их результирующая $T_{x+dx} - T_x = ES\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - ES\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x} \approx ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ также направлена вдоль оси ОХ. С другой стороны, ускорение элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Согласно второму закону Ньютона $\rho S dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx,$ где ρ- объемная плотность стержня. Положив $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$ получим дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Форма этого уравнения показывает, что продольные колебания стержня носят волновой характер, причем скорость распространения продольных волн равна $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

5. Метод Даламбера.

Рассматривая свободные колебания струны, мы должны решить однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (5.1)$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x), \qquad (5.2)$$

где функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на всей числовой оси. Такая задача называется задачей с начальными условиями или задачей Коши. Эту задачу можно решить методом бегущих волн. Общее решение уравнения (5.1) имеет вид

$$u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \qquad (5.3)$$

где φ и ψ предполагаются дважды дифференцируемыми.

Подобрав функции φ и ψ так, чтобы функция $u = u(x,t)$ удовлетворяла начальным условиям (5.2), приходим к решению исходного дифференциального уравнения $u = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)dz.$

Примеры.

21. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0}=x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$

Решение. Так как $a=1$, а $F(x)=0$, то

$u=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}$, где $u=\frac{x-t+x+t}{2}$, или окончательно $u=x$.

Ответ. $u=x$.

22. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x^3.$

Решение. Здесь $f(x)=0,\ F(x)=x^3$.

$$u=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} z^3dz=\frac{1}{8a}z^4\Big|_{x-at}^{x+at}=\frac{1}{8a}\Big((x+at)^4-(x-at)^4\Big)=$$

$$=\frac{1}{8a}(x^2+2axt+a^2t^2+x^2-2axt+a^2t^2)(x^2+2axt+a^2t^2-x^2+2axt-a^2t^2)=$$

$$=\frac{1}{8a}(2x^2+2a^2t^2)\cdot 2\cdot 2axt=\frac{1}{a}(x^3at+xa^3t^3)=x^3t+xt^3a^2.$$

Ответ. $u=x^3t+xt^3a^2$.

23. Найти форму струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в момент $t=\pi$, если $u\big|_{t=0}=\cos x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=x.$

Решение.

$$u=\frac{\cos(x+at)+\cos(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} z\ dz=$$

$$=\cos x\cos at+\frac{1}{2a}\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_{x-at}^{x+at}=\cos x\cos at+\frac{1}{4a}\cdot 4atx=\cos x\cos at+xt.$$

Если $t=\pi$, то $u=\cos a\pi\cdot\cos x+\pi x$.

Ответ. $u=\cos a\pi\cdot\cos x+\pi x$.

6. Решение уравнения колебаний струны методом Фурье.

Решение дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)$ и граничным (краевым) условиям

$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0,$ может быть представлено суммой бесконечного ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\cdot \sin\frac{k\pi x}{l}, \text{ где}$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Нулевые граничные условия соответствуют колебаниям струны длины l, закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$.

Примеры.

25. Струна длины l закреплена на концах. В начальный момент времени она оттянута в точке $x = \frac{l}{2}$ на расстояние $\frac{l}{10}$, а затем отпущена без толчка. Методом Фурье определить отклонение $u(x,t)$ точек струны в любой момент времени.

Решение. В поставленной задаче мы имеем дело со свободными колебаниями струны, закрепленной на обоих концах. Ее решение сведется к решению следующей математической задачи. Требуется найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (здесь $a^2 = \frac{T}{\rho}$, где T- натяжение струны, а ρ- плотность струны), удовлетворяющее следующим начальным и граничным условиям:

1) Начальные условия:

а) $u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & при \ \ 0 \le x \le \frac{l}{2}, \\ -\frac{1}{5}(x-l), & при \ \frac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$

б) $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) = 0$ (струна была отпущена без толчка, значит, начальная скорость ее точек была равна нулю).

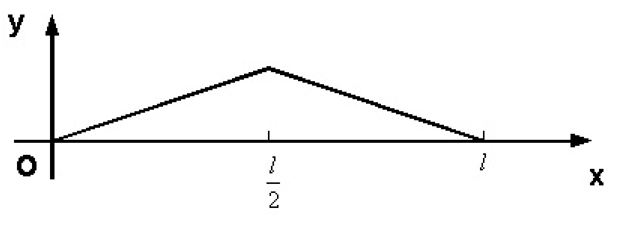

Рисунок 4.

2) Граничные условия: *u(0,t)=0, u(l,t)=0.* Физически они означают, что в точках x=0 и x= l струна закреплена.

Вычисляя a_n, получим:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\frac{1}{5}\left(\int_0^{l/2} x\sin\frac{\pi n x}{l}dx + \int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right) =$$

$$= \frac{4}{5l}\cdot\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Таким образом, $a_n = \frac{4}{5}\cdot\frac{l}{\pi^2 n^2}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}$ $(n = 1,2,....)$. Заметим, что при четных n имеем: $a_n = 0$, так как $\sin\frac{\pi n}{2} = \sin\frac{2\pi k}{2} = 0$. При нечетных $n=2k$-1 имеем $\sin\frac{\pi n}{2} = \sin\frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k-1}$ $(k = 1,2,...)$. Окончательно для коэффициентов a_n получим формулу: $a_{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{4l}{5\pi^2(2n-1)^2}$ $(n = 1,2,...)$.

$a_{2n} = 0.$

Поскольку в рассматриваемой задаче $\psi(x) = 0$, то $b_n = 0$ $(n = 1,2,...)$. Следовательно,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi a n}{l}t\cdot\sin\frac{\pi n x}{l} = \frac{4l}{5\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos\frac{\pi a n}{l}t\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

26. Струна длины l , закрепленная на концах, изогнута так, что она приняла форму синусоиды $u = 2\sin\frac{\pi x}{l}$, и отпущена без начальной скорости. Найти закон колебания струны.

Ответ. $u(x,t) = 2\cos\frac{\pi a t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}.$

27. Струна с закрепленными концами x=0 и $x = l$ в начальный момент времени имеет форму, определяемую уравнением $u(x,0) = 2\sin\frac{5\pi x}{l}$. Начальные скорости точек струны определяются формулой $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 3\sin\frac{4\pi x}{l}$. Найти смещение *u(x,t)* точек струны.

Ответ. $u(x,t)=\dfrac{3l}{4\pi a}\sin\dfrac{4\pi at}{l}\sin\dfrac{4\pi x}{l}+2\cos\dfrac{5\pi at}{l}\sin\dfrac{5\pi x}{l}.$

28. Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bshx$ при нулевых начальных и краевых условиях $u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0.$

Указание. Решение следует искать в виде суммы $u(x,t)=v(x)+w(x,t)$, где $v(x)$ есть решение уравнения $a^2v''(x)+bshx=0$, удовлетворяющее краевым условиям $v(0)=v(l)=0$, а w – решение уравнения $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ при условиях $w(0,t)=0,\ w(l,t)=0,$

$$-\frac{2b\pi shl}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2\pi^2+l^2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

$w(x,0)=-v(x),\quad \dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0.$

Ответ. $u(x,t)=\dfrac{b}{a^2}\left(\dfrac{x}{l}shl-shx\right)+\dfrac{2b}{a^2\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cos\dfrac{n\pi at}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}-$

29. Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bx(x-l)$ при нулевых начальных и краевых условиях $u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0.$

Ответ. $u(x,t)=-\dfrac{bx}{12}(x^3-2x^2l+l^3)+\dfrac{8l^4}{\pi^5}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(2n+1)\pi t}{l}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$

30. Найти закон колебаний струны, концы которой закреплены в точках $x=-l$ и $x=l$, а в начальный момент времени точки струны отклонены по параболе, симметричной относительно центра струны, причем максимальное начальное смещение равно h.

Ответ. $u(x,t)=\dfrac{32h}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos\dfrac{2n+1}{2l}\pi x\cdot\cos\dfrac{2n+1}{2l}\pi at.$

7. Колебания прямоугольной мембраны.

Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны со сторонами p и q, закрепленной по контуру. Эта задача сводится к решению волнового уравнения
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (7.1)$$
при граничных условиях
$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=p} = 0, \quad u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=q} = 0 \qquad (7.2)$$
и начальных условиях
$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x,y)\ . \qquad (7.3)$$
Будем искать частные решения уравнения (7.1) в виде
$$u(x,y,t) = T(t)v(x,y), \qquad (7.4)$$
Подставляя (7.4) в уравнение (7.1), получим
$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -k^2.$$
Отсюда, принимая во внимание граничные условия (7.2), будем иметь
$$T''(t) + a^2k^2T(t) = 0, \qquad (7.5)$$
$$\text{и } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0, \qquad (7.6)$$
$$v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=p} = 0, \quad v\big|_{y=0} = 0, \quad v\big|_{y=q} = 0. \qquad (7.7)$$
Найдем собственные значения и собственные функции задачи (7.6), (7.7). Положим
$$v(x,y) = X(x)Y(y). \qquad (7.8)$$
Подставляя (7.8) в уравнение (7.6), получим

$\dfrac{Y''}{Y} + k^2 = -\dfrac{X''}{X}$, откуда получаем два уравнения
$$X''(x) + k_1^2X(x) = 0, \quad Y''(y) + k_2^2Y(y) = 0, \qquad (7.9)$$
где $\quad k^2 = k_1^2 + k_2^2.$ (7.10)

Общие решения уравнений (7.9) имеют следующий вид:
$$X(x) = C_1\cos k_1x + C_2\sin k_1x; \quad Y(y) = C_3\cos k_2y + C_4\sin k_2y. \qquad (7.11)$$
Из граничных условий получаем

$X(0) = 0, \quad X(p) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(q) = 0,$ откуда ясно, что $C_1 = C_3 = 0,$ и, если мы положим $C_2 = C_4 = 1,$ то окажется $X(x) = \sin k_1x, \quad Y(y) = \sin k_2y,$ причем должно быть
$$\sin k_1p = 0, \quad \sin k_2q = 0. \qquad (7.12)$$
Из уравнений (7.12) вытекает, что k_1 и k_2 имеют бесчисленное множество значений

$k_{1,m} = \dfrac{m\pi}{p}, \quad k_{2,n} = \dfrac{n\pi}{q} \quad (m,n = 1,2,3,...)$. Тогда

$$k_{m,n}^2 = k_{1,m}^2 + k_{2,n}^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}\right). \qquad (7.13)$$

Таким образом, собственным значениям (7.13) соответствуют собственные функции $v_{mn}(x,y) = \sin\dfrac{m\pi x}{p}\sin\dfrac{n\pi y}{q}$ граничной задачи (7.6), (7.7).

Обращаясь теперь к уравнению (7.5), мы видим, что для каждого собственного значения $k^2 = k_{mn}^2$ его общее решение имеет вид

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos ak_{mn}t + B_{mn}\sin ak_{mn}t, \qquad (7.14)$$

где $A_{mn}, и\ B_{mn}$ – произвольные постоянные.

Таким образом, частные решения уравнения (7.1) имеют вид

$$u_{mn}(x,y,t) = (A_{mn}\cos ak_{mn}t + B_{mn}\sin ak_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\ (m,n = 1,2,...).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям составим ряд

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos ak_{mn}t + B_{mn}\sin ak_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}.$$

Если этот ряд равномерно сходится, так же как и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по *x,y,t,* то сумма его, очевидно, будет удовлетворять уравнению (7.1) и граничным условиям (7.2). Для выполнения начальных условий необходимо, чтобы

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} ak_{mn}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}.$$

Эти формулы представляют собой разложение заданных функций $\varphi_0(x,y)\ и\ \varphi_1(x,y)$ в двойной ряд Фурье по синусам. Коэффициенты разложений определяются по формулам

$$A_{mn} = \frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \phi_0(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy,$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ak_{mn}pq}\int_0^p\int_0^q \phi_1(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy.$$

Примеры.

31. Найти закон свободных колебаний квадратной мембраны со стороной l, если в начальный момент отклонение в каждой точке определялось равенством $u(x,y,t)\big|_{t=0}=\dfrac{l}{100}\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l}$. Начальная скорость равна нулю. Вдоль контура мембрана закреплена.

Решение. В рассматриваемом случае

$\varphi_0(x,y)=\dfrac{l}{100}\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l},\quad \varphi_1(x,y)=0.$ Следовательно,

$B_{mn}=0,\ m=1,2,..,\quad n=1,2,...$

$$A_{mn}=\frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l\frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{l}\,dxdy.$$

В силу ортогональности тригонометрической системы функций только $A_{11}\neq 0$, а все остальные

$$A_{mn}=0.\quad A_{11}=\frac{4}{100l}\left(\int_0^l\sin^2\frac{\pi x}{l}dx\right)^2=$$

$$=\frac{4}{100l}\left(\frac{1}{2}\int_0^l\left(1-\cos\frac{2\pi x}{l}\right)dx\right)^2=\frac{1}{100l}\left(x\Big|_0^l-\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\Big|_0^l\right)^2=\frac{l}{100}.$$

Следовательно, $u(x,y,t)=\dfrac{l}{100}\cos\dfrac{a\pi\sqrt{2}}{l}t\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l}.$

8. Метод разделения переменных (общий случай).

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u \qquad (8.1)$$

(где $\rho(x),\ p(x),\ q(x)$ – достаточно гладкие функции, причем $p(x)>0,\ \rho(x)>0,$

$q(x)\geq 0$), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases}\alpha u(0,t)+\beta\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\\ \gamma u(l,t)+\delta\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0.\end{cases} \qquad (8.2)$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x) \quad (0\le x\le l). \qquad (8.3)$$

Находим сначала нетривиальное решение данного уравнения, удовлетворяющее краевым условиям, в виде произведения

$$u(x,t)=T(t)X(x). \qquad (8.4)$$

Подставляя (8.4) в уравнение (8.1) получим

$\rho(x)T''(t)X(x)=T(x)\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dX}{dx}\right)-q(x)T(t)X(x)$ или

$\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dX}{dx}\right)-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\dfrac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda,$ где λ – некоторая постоянная. Отсюда

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)+(\lambda\rho(x)-q(x))X=0, \qquad (8.5)$$

$$T''(t)+\lambda T(t)=0 \qquad (8.6)$$

Так как $T(t)\ne 0$, то для того чтобы функция (8.4) удовлетворяла краевым условиям (8.2), необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases}\alpha X(o)+\beta X'(0)=0,\\ \gamma X(l)+\delta X'(l)=0.\end{cases} \qquad (8.7)$$

Таким образом, для определения функции *X(x)* мы пришли к следующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

Найти такие значения λ, называемые собственными значениями, при которых существует нетривиальное решение уравнения (8.5), удовлетворяющее условиям (8.7), а также найти эти нетривиальные решения, называемые собственными функциями.

Свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи:

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<...$, которым соответствуют собственные функции $X_1(x), X_2(x),...$
2. При $q(x)\ge 0$ и $\left(p(x)X_n(x)X_n^{'}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\le 0$ все собственные значения λ_n положительны.
3. Собственные функции на отрезке $[0,l]$ образуют ортогональную с весом *ρ(x)* и нормированную систему:

$$\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)=\begin{cases}0, & при \quad m\ne n,\\ 1, & при \quad m=n.\end{cases} \qquad (8.8)$$

4. (Теорема Стеклова). Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая краевым условиям

(8.7) и имеющая непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $X_n(x)$: $\quad f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \quad a_n=\int\limits_0^l \rho(x) X_n(x) f(x) dx.$

Далее, для каждого собственного значения λ_n решаем уравнение (8.6). Общее решение уравнения (8.6) при $\lambda=\lambda_n$(обозначим его через $T_n(t)$) имеет вид $T_n(t)=a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t+b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t,$ где a_n и b_n – произвольные постоянные.

Таким образом, мы получили бесчисленное множество решений уравнения (8.1) вида $u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)=(a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t+b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t)X_n(x).$
Чтобы удовлетворить начальным условиям (8.3), составим ряд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t+b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t)X_n(x) \tag{8.9}$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по x и t, то сумма его будет удовлетворять уравнению (8.1) и краевым условиям (8.2).

Для выполнения начальных условий (8.3) найдем постоянные a_n и b_n как коэффициенты разложения функций φ и ψ в обобщенные ряды Фурье по ортонормированной (с весом) системе функций (X_n).

Теперь можно сделать некоторые общие замечания относительно области применения метода разделения переменных.

В основе применимости метода лежит линейность как самих дифференциальных уравнений, так и краевых условий. Коэффициенты исходных дифференциальных уравнений должны быть либо постоянными, либо представляться в виде функций, каждая из которых содержит лишь одну из переменных. Например, в случае дифференциального уравнения с двумя независимыми переменными x и t соответствующее дифференциальное уравнение должно иметь вид

$A(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+C(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+D(t)\dfrac{\partial u}{\partial t}+(F_1(x)+F_2(t))u=0$ или приводиться к этому виду. Краевые условия должны быть однородными. Если в исходной задаче эти условия не однородны, надо привести их к однородным. В случае двумерных (не считая времени) задач граница рассматриваемой области должна состоять из координатных линий (в трехмерном случае – из координатных поверхностей). Таким образом, если используется декартова система координат, границы области – отрезки прямых, параллельных осям координат (куски плоскостей, параллельных координатным плоскостям); при использовании полярной системы координат границы области – дуги окружностей с центрами в полюсе и отрезки лучей, выходящих из полюса, и т.д.

Это обстоятельство сильно ограничивает применимость метода. И в задаче распространения волн в пространстве, и в задачах расчета тепловых режимов, и в теории потенциала приходится при использовании метода разделения переменных ограничиваться лишь самыми простыми конфигурациями исследуемых областей.

9. Вывод уравнения теплопроводности для стержня.

Рассмотрим однородный теплоизолированный с боков стержень конечной длины l, имеющий постоянную по длине толщину, и настолько тонкий, чтобы в любой момент времени температуру тела во всех точках поперечного сечения можно было бы считать одинаковой.

Выберем ось x (направив ее по оси стержня) так, чтобы стержень совпадал с отрезком $[0;l]$ оси $\boldsymbol{x}$.

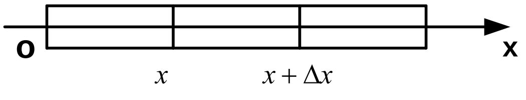

Рисунок 5.

Обозначим температуру стержня в сечении $\boldsymbol{x}$ в момент t через $u(x,t)$. Тогда функция $u=u(x,t)$ дает закон распределения температуры в стержне. Выведем дифференциальное уравнение для этой функции.

Выделим элемент стержня $[x,x+\Delta x]$ и составим для него уравнение теплового баланса, согласно которому скорость изменения количества тепла в рассматриваемом объеме (изменение количества тепла в единицу времени), обусловленная теплоемкостью материала, равна количеству тепла, поступившему в этот объем в единицу времени вследствие теплопроводности.

Скорость изменения тепла в выделенном элементе стержня равна

$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho s \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx$, где c – теплоемкость материала стержня; ρ – плотность; s – площадь поперечного сечения. Применяя к этому интегралу теорему о среднем, получим $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c\rho s \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx = c\rho s \dfrac{\partial u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial t}\Delta x$, где $0<\theta_1<1$.

Теперь найдем количества тепла, поступившее в выделенный элемент стержня за единицу времени. Так как стержень теплоизолирован с боков, то тепло может поступать только через сечения, ограничивающие выделенный элемент стержня. Известно, что количество тепла, протекающее через сечение с абсциссой x за единицу времени, равно $-k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}s$, где k – коэффициент теплопроводности, а s – площадь сечения.

Поэтому искомое количество тепла равно

$$-ks\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}s-\left(-k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}s\right)=ks\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=$$

$$=ks\frac{\partial^2 u(x+\theta_2\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

где $0<\theta_2<1$. (Здесь применяется формула конечных приращений Лагранжа к функции $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$).

Составим уравнение теплового баланса

$$c\rho s\frac{\partial u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial t}\Delta x=ks\frac{\partial^2 u(x+\theta_2\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x.$$

Разделим обе части этого уравнения на $s\Delta x$ (объем выделенного элемента стержня) и устремим Δx к нулю (стягивая выделенный элемент стержня к сечению). Получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\quad\left(a^2=\frac{k}{c\rho}\right). \qquad (9.1)$$

Это уравнение называется уравнением теплопроводности для однородного стержня. Величина $a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$ называется коэффициентом температуропроводности. Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять уравнению (9.1), начальному условию $u(x,t)\big|_{t=0}=u(x,0)=f(x)\quad(0\le x\le l)$, где $f(x)$– заданная функция от x (это условие выражает закон распределения температуры по длине стержня в начальный момент времени $t=0$), и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned}u(x,t)\big|_{x=0}&=u(0,t)=\varphi_1(t),\\ u(x,t)\big|_{x=l}&=u(l,t)=\varphi_2(t).\end{aligned}\right\}$$

$(0\le t\le+\infty)$, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – заданные функции от времени t. Они определяют температуру, поддерживаемую на концах стержня. Отметим, что уравнение не учитывает тепловой обмен между поверхностью стержня и окружающим пространством.

10. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности.

Пусть Ω – конечная область трехмерного пространства. Обозначим через Q в пространстве переменных (x,y,z,t) цилиндр, основание которого есть область Ω и образующие которого параллельны оси Ot. Пусть Q_T – часть этого цилиндра, ограниченного снизу плоскостью $t=0$ и сверху плоскостью $t=T(T>0)$. Часть границы цилиндра Q_T, состоящую из его нижнего основания $(t=0)$ и боковой поверхности, обозначим через Γ.

Рассмотрим следующую задачу: найти в цилиндре Q_T решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (10.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \qquad (10.2)$$

и граничному условию

$$u\big|_{s}=\psi(P,t)\ \ (t\in[0,T]), \qquad (10.3)$$

где S– граница области Ω, P – точка поверхности S. Функции φ и ψ непрерывны, причем значения ψ при $t=0$ совпадают со значениями φ на границе S.

Задача нахождения решения уравнения (10.1) при условиях (10.2), (10.3) называется первой краевой задачей для уравнения теплопроводности.

Теорема. Функция $u(x,y,z,t)$, удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности (10.1) внутри цилиндра Q_T и непрерывная вплоть до его границы, принимает наибольшее и наименьшее значения на Γ, т.е. или при $t=0$, или на боковой поверхности цилиндра Q_T.

Из этой теоремы непосредственно вытекает, что:

1) Решение первой краевой задачи (10.1)-(10.3) единственно.
2) Решение первой краевой задачи (10.1)-(10.3) непрерывно зависит от правых частей начального и граничного условий.
3) Если функция u, непрерывная на замыкании Q_T и удовлетворяющая первой краевой задаче (10.1)-(10.3), равна нулю на Γ, то она тождественно равна нулю в замыкании Q_T.

11. Интегрирование уравнения распространения тепла в ограниченном стержне методом Фурье.

Задача о распространении тепла в теплоизолированном с боков стержне длины l приводится к нахождению решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (11.1)$$

в области $0\le x\le l,\ \ 0\le t<+\infty$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0)=f(x)\quad (0\le x\le l) \qquad (11.2)$$

и граничным условиям $\left.\begin{aligned} u(0,t)&=\varphi_1(t),\\ u(l,t)&=\varphi_2(t)\end{aligned}\right\}(0\le t<+\infty).$

Ограничимся рассмотрением случая, когда на концах стержня поддерживается постоянная температура, т.е. когда граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t)=u_0=const, \\ u(l,t)=u_1=const \end{array}\right\} \quad (0 \le t < +\infty). \quad (11.3)$$

Не умаляя общности можно считать, что $u_0 = 0, u_1 = 0,$ ибо в противном случае этого всегда можно добиться при помощи замены искомой функции $u(x,t)$ по формуле

$$v(x,t) = u(x,t) - u_0 - \frac{u_1 - u_0}{l} x, \qquad (11.4)$$

где v – новая неизвестная функция. Действительно, так как

$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, то функция v удовлетворяет тому же уравнению, что и функция u: $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Далее из (11.4) и (11.3) следует, что

$$\left.\begin{array}{l} v(0,t)=0, \\ v(l,t)=0 \end{array}\right\} \quad (0 \le t < +\infty).$$

Таким образом, достаточно найти решение уравнения (11.1), удовлетворяющее начальному условию (11.2) и граничным условиям

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t)=0, \\ u(l,t)=0 \end{array}\right\} \quad (0 \le t < +\infty).$$

Как и в случае волнового уравнения, будем искать решение уравнения (11.1) в виде произведения двух функций

$$u = X(x)T(t), \qquad (11.5)$$

одна из которых зависит только от x , а другая –только от t; причем $X(x) \ne 0$ и $T(t) \ne 0$, ибо в противном случае $u(x,t) \equiv 0$, что невозможно: функция $u \equiv 0$ не удовлетворяет начальному условию (11.2), поскольку предполагается, что $f(x) \ne 0$.

В силу граничных условий функция $X(x)$ должна обращаться в нуль на концах интервала $[0; l\,]$: $X(0) = 0 \quad X(l) = 0$. Подставляя (11.5) в (11.1), получим

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t) \qquad \text{или} \qquad \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда заключаем, что функции $X(x)$ и $T(t)$ должны быть решениями однородных линейных дифференциальных уравнений

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (11.6)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0 \qquad (11.7)$$

Ненулевые решения уравнения (11.6) существуют только при $\lambda = \lambda_k$, где

$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \quad (k = 1,2,..)$, причем в качестве этих решений можно взять функции

$X_k = \sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1,2,...)$. Заменяя в уравнении (11.7) λ на λ_k, получаем уравнение $T_k' + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k = 0$. Его общим решением будет $T_k = c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}$, где $c_k -$произвольная постоянная, соответствующая взятому значению k.

Подставляя найденные значения $X = X_k$ *и* $T = T_k$ в (11.5), получим решение уравнения (11.1) в виде

$$u_k(x,t) = c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x \quad (k = 1,2,..) \tag{11.8}$$

Каждая из функций (11.8) удовлетворяет граничным условиям. Можно показать, что функция

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x \tag{11.9}$$

тоже является решением уравнения (11.1), удовлетворяющим граничным условиям.

Выберем теперь коэффициенты C_k таким образом, чтобы функция (11.9) удовлетворяла и начальному условию (11.2). Полагая в (11.9) $t=0$, получим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi}{l}x \tag{11.10}$$

Предположим, что функция $f(x)$ разложима в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x \tag{11.11}$$

Тогда $b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx$. Сравнивая (11.10), (11.11), видим, что

$c_k = b_k$, т.е. $c_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx$, чем и завершается решение задачи.

Пример1. Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при граничных условиях $u(0;t) = 0,\ u(l;t) = 0$ и начальном условии

$$u(x;0) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \le x < \frac{l}{2} \\ l - x, \text{ если } \frac{l}{2} \le x \le l. \end{cases}$$

Решение. Решение определяется формулой

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2 t}{l^2}} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l},$$ где c_n вычисляется по формулам

$$c_n=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{\pi n x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\right).$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{\pi n x}{l}dx=-\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2},$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{l^2}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{l^2}{\pi n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Складывая вычисленные интегралы, найдем, что $c_n=\frac{4l}{\pi^2}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}$. Так как $\sin\pi n=0,$ то и $c_{2n}=0$. Далее имеем $c_{2n+1}=\frac{4l}{\pi^2}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$.

Решение задачи запишется так:

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-\frac{\pi^2 a^2(2n-1)^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi(2n-1)}{l}x.$$

32. Дан тонкий однородный стержень длины l, на концах которого поддерживается постоянная температура, равная нулю. Начальная температура стержня определяется уравнением $u(x,0)=3\sin\frac{\pi x}{l}-2\sin\frac{3\pi x}{l}$. Определить температуру стержня при $t>0$.

Ответ. $u(x,t)=3e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\sin\frac{\pi x}{l}-2e^{-\frac{9\pi^2 a^2 t}{l^2}}\sin\frac{3\pi x}{l}$.

33. Концы стержня длиной l=100 см поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру $u(x,t)$ в точках стержня для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{1}{5}x, & \text{если} \quad 0\le x\le 25,\\ \frac{100}{15}-\frac{x}{15}, & \text{если } 25<x\le 100.\end{cases}$$

Ответ. $u(x,t)=\dfrac{160}{3\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{4}e^{-\frac{a^2n^2t}{l^2}}\sin\dfrac{\pi nx}{l}.$

34. Концы стержня длиной l поддерживаются при температуре, равной нулю. Начальная температура определяется формулой $u(x,0)=5\sin\dfrac{\pi x}{l}-2\sin\dfrac{3\pi x}{l}$. Определить температуру стержня для любого момента времени.

Ответ. $u(x,t)=5e^{-\frac{a^2\pi^2t}{l^2}}\sin\dfrac{\pi x}{l}-2e^{-\frac{9a^2\pi^2t}{l^2}}\sin\dfrac{3\pi x}{l}.$

35. Найти распределение температуры в стержне длиной l, если на концах его поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна единице вдоль всего стержня.

Ответ. $u(x,t)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\dfrac{2n+1}{l}\pi x.$

36. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее граничным условиям $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ и начальному условию $u(x,0)=3\sin 2x$.

Ответ. $u(x,t)=3e^{-4t}\sin 2x.$

37. Конец стержня $x=0$ имеет температуру $u(0,t)=0$, а на конце $x=l$ поддерживается температура $u(l,t)=100^\circ$. Вычислить распределение температуры $u(x,t)$ в точках стержня для любого момента времени *t*, если известно распределение ее в начальный момент

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{200}{l}x, & \text{если} \quad 0\le x\le \frac{l}{2},\\ 100, & \text{если} \quad \frac{l}{2}<x\le l.\end{cases}$$

Указание. Эту задачу целесообразно свести к задаче с нулевыми граничными условиями.

Ответ. $u(x,t)=\dfrac{100x}{l}+\dfrac{400}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{a^2n^2t}{l^2}}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}.$

38. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины l, лежащего на отрезке $[0,l]$, если в начальный момент температура внутри стержня была распределена следующим образом:

$$f(x)=u\big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{x}{l}u_0, & при \quad 0\le x\le \dfrac{l}{2};\\ \dfrac{l-x}{l}u_0, & при \ \dfrac{l}{2}<x\le l,\end{cases}$$

где $u_0=const.$ На концах стержня поддерживается нулевая температура. Теплообмен свободный.

Ответ. $u(x,t)=\dfrac{4u_0}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$. (при $0\le x\le l,\ t\ge 0$).

39. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины l, если в начальный момент температура внутри стержня во всех точках равнялась 0°, в левом конце поддерживается все время постоянная температура u_1, а в правом – постоянная температура u_2. Теплообмен свободный.

Ответ. $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}(-u_1+(-1)^n u_2)e^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\dfrac{n\pi x}{l}+u_1+(u_2-u_1)\dfrac{x}{l}.$

12. Охлаждение бесконечного стержня.

Пусть температура тонкого теплопроводного стержня бесконечной длины в начальный момент была распределена по закону: $u\big|_{t=0}=f(x)$. (12.1)

Определим температуру в каждой точке стержня в любой последующий момент времени $t>0$.

Ясно, что это частный случай задачи Коши, которая сводится к определению функции $u(x,\tau)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (12.2)$$

(где $\tau=\dfrac{k}{c\rho}t$) и начальному условию (12.1).

С физической точки зрения эта задача аналогична рассмотренной в предыдущем параграфе с тем отличием, что здесь нет граничных условий. Ясно поэтому, что, разделяя переменные по методу Фурье можно представить решение уравнения (12.1) в виде

$$u(x,\tau)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}. \qquad (12.3)$$

В случае стержня конечной длины l мы определяли из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра $\lambda : \lambda_n = n\dfrac{\pi}{l}$, где каждому значению индекса n соответствуют некоторые коэффициенты A_n и B_n. Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений λ_n (расстояние между λ_n и λ_{n+1} равно $\dfrac{\pi}{l}$ и стремится к нулю, когда $l \to \infty$). Поэтому для бесконечного стержня λ может иметь любое значение от 0 до ∞.

Таким образом, каждому значению λ соответствует частное решение:

$$u_\lambda(x,\tau) = (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}. \qquad (12.4)$$

Общее решение получается из частных решений не суммированием, а интегрированием по параметру λ:

$$u_\lambda(x,\tau) = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \int_0^\infty (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}d\lambda \qquad (12.5)$$

Отсюда видно, что задача свелась к разложению произвольной функции в интеграл Фурье, являющийся обобщением понятия ряда Фурье.

В теории интеграла Фурье доказывается, что любая непрерывная функция *f(x)*, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$, может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_0^\infty (f_c(\lambda)\cos\lambda x + f_s(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda, \qquad (12.6)$$

где $f_c(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx, \quad f_s(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx. \qquad (12.7)$

Подставляя значения Фурье-преобразований $f_c(\lambda)$ и $f_s(\lambda)$ в интеграл (12.6), получим:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi)d\lambda,$$

или $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)(\cos\lambda x\cos\lambda\xi + \sin\lambda x\sin\lambda\xi)d\xi.$

Учитывая, что выражение в скобках есть косинус разности, приходим к иному выражению для интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi. \qquad (12.8)$$

Таким образом, если в качестве коэффициентов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в (12.5) выбрать соответственно $A(\lambda) = f_c(\lambda), B(\lambda) = f_s(\lambda),$ то интеграл

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(f_c(\lambda)\cos\lambda x + f_s(\lambda)\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}d\lambda \qquad (12.9)$$

является решением рассматриваемой задачи.

Другая, эквивалентная форма этого решения, получается из (12.8): $u(x,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2\tau}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi.$ Преобразуем последний интеграл меняя порядок интегрирования:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda. \qquad (12.10)$$

Обозначив $q := \xi - x,$ можно внутренний интеграл свести к известному в математике определенному интегралу :

$$K(\tau,q) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\tau\lambda^2}\cos\lambda q d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{q^2}{4\tau}}. \qquad (12.11)$$

Заменяя обратно q через $\xi - x$ и подставляя (12.11) в (12.10), получим окончательно:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4\tau}}d\xi. \qquad (12.12)$$

Чтобы понять физический смысл полученного решения, допустим, что в начальный момент времени($\tau = 0$) температура бесконечного стержня была равна нулю всюду, кроме окрестности точки $x=0,$ где $u = u_0$.

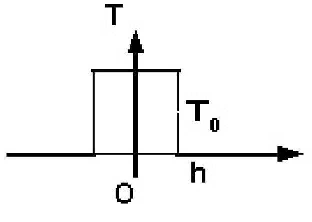

***Рисунок* 6.**

Можно себе представить, что в момент $\tau = 0$ элементу длины $2h$ стержня сообщили некоторое количество тепла $Q_0 = 2hc\rho u_0$, которое вызвало повышение температуры на этом участке до значения u_0. Следовательно, формула (12.12) принимает вид: $u(x,\tau)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\displaystyle\int_{-h}^{h}u_0e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}}d\xi=\dfrac{Q_0}{4h\sqrt{\pi\tau c\rho}}\displaystyle\int_{-h}^{h}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}}d\xi.$

Будем теперь уменьшать h, устремляя его к нулю, считая количество тепла неизменным, т.е. введем понятие мгновенного точечного источника тепла мощности Q_0, помещенного в момент $\tau=0$ в точке x=0. При этом распределение температур в стержне будет определяться формулой: $u(x,\tau)=\dfrac{Q_0}{2\sqrt{\pi\tau c\rho}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}}d\xi,$

или по теореме о среднем $u(x,\tau)=\dfrac{Q_0}{2\sqrt{\pi\tau c\rho}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}$. В частности, если $Q_0=c\rho,$ то температура в любой точке стержня в произвольный момент времени $t=\dfrac{\tau}{a}$ (a – коэффициент температуропроводности) может быть найдена по формуле: $u(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi at}}e^{-\frac{x^2}{4at}}$. Заметим, что величина $c\rho\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)dx$ есть общее количество тепла, полученное стержнем к моменту времени t:

$$Q(t)=c\rho\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)dx=\frac{c\rho}{2\sqrt{\pi at}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{4at}}dx.$$

Но последний(справа) интеграл есть интеграл Пуассона: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Поэтому получаем, что $Q(t)=c\rho=Q_0=const,$ что согласуется с законом сохранения энергии.

40. Решить уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, если начальное распределение температуры стержня определяется равенством $u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}u_0, & если \quad x_1<x<x_2,\\ 0, & если\ x<x_1,\ или\ x>x_2.\end{cases}$

Ответ. $u(x,t)=\dfrac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$

Замечание. Решение $u(x,t)$ можно выразить через интеграл вероятности .

13. Задача о равновесии электрических зарядов на поверхности проводника.

Рассмотрим стационарное электростатическое поле, созданное в пространстве некоторой системой электрических зарядов. Если заряды $q_1, q_2, ..., q_n$ расположены дискретно в точках $\xi_1, \xi_2, .., \xi_n$, то потенциал поля в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$, где $r_i = |\xi_i - x|$ – расстояние от заряда q_i до точки x. Если же заряды непрерывно распределены на некоторой линии L, или поверхности S, или в объеме V, то потенциал поля соответственно выражается одним из интегралов: $u = \int_L \frac{\gamma_1}{r} dl$, $u = \iint_S \frac{\gamma_2}{r} ds$, $u = \iiint_V \frac{\gamma_3}{r} dv$, где r – расстояние от элемента линии (поверхности, объема) до точки поля, обладающей потенциалом u. В этих формулах величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ обозначают линейную, поверхностную или объемную плотность зарядов: $\gamma_1 = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$,

$\gamma_2 = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}$, $\gamma_3 = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}$, где Δq – заряд элемента линии L (поверхности S, объема V). В общем случае потенциал поля равен сумме потенциалов, созданных каждым из этих видов распределения зарядов в отдельности.

Допустим, что конечная область V пространства занята проводящей средой – проводником, т.е. средой, в которой заряды могут свободно передвигаться, а остальная часть пространства – диэлектриком, т.е. средой, в которой движение зарядов невозможно. В стационарном состоянии потенциал поля во всех точках области V, – включая ее границу, одинаков, так как иначе бы возникло движение электрических зарядов, стремящееся выровнять потенциал, и поле менялось бы. Отсюда непосредственно очевидно, что в области V потенциал поля u удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$ $(\Delta u = div\, grad\, u)$. Внутри проводника заряды разных знаков должны быть взаимно нейтрализованы. Следовательно, если достигается стационарное состояние, то избыточные заряды располагаются на границе ∂V проводника в виде бесконечно тонкого электрического слоя. Потенциал этого слоя в точке x выражается интегралом:

$$u = \iint_{\partial V} \frac{\gamma_2}{r} ds, \qquad (13.1)$$

где r – расстояние от переменной точки ξ поверхности проводника до точки x. Если точка x находится вне проводника, то функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, уравнению Лапласа удовлетворяет и потенциал u, определяемый формулой (13.1). Чтобы доказать это утверждение, достаточно применить к инте-

гралу (13.1) правило дифференцирования по параметру, что можно сделать, так как, по предположению, точка x находится вне поверхности ∂V и, следовательно, подынтегральная функция в выражении (13.1) нигде не обращается в бесконечность. Итак, в каждой точке x, лежащей вне проводника, потенциал u также удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому возникает задача нахождения функции u, удовлетворяющей уравнению Лапласа во всех точках окружающего проводник пространства, стремящейся к нулю на бесконечности и удовлетворяющей условию
$U=const$, когда $x \in \partial V$.

Это последнее условие получило название граничного условия, в связи с чем рассматриваемую математическую задачу называют граничной.

В зависимости от вида граничного условия различают три основных вида граничной задачи:

1. $u(x) = \varphi(x)$, когда $x \in \partial V$ – первая граничная задача или задача Дирихле,
2. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x)$, когда $x \in \partial V$ – вторая граничная задача или задача Неймана,
3. $\alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha_1 u = \varphi(x)$, когда $x \in \partial V$ – третья или смешанная граничная задача.

Здесь $\varphi, \alpha_1, \alpha_2$ – непрерывные функции, определенные на граничной поверхности ∂V, а $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ означает производную, взятую в точке поверхности ∂V по направлению внешней нормали к ней. К этим видам граничной задачи приводит изучение широкого круга стационарных физических явлений и процессов.

14. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье.

Функцию, удовлетворяющую в области D уравнению Лапласа, называют гармонической в этой области.

Пусть дан круг радиуса R с центром в полюсе O полярной системы координат. Будем искать функцию $u(\rho,\theta)$, гармоническую в круге и удовлетворяющую на его окружности условию $u\big|_{\rho=R} = \varphi(\theta)$, где $\varphi(\theta)$ – заданная функция, непрерывная на окружности. Искомая функция должна удовлетворять в круге уравнению Лапласа $\rho^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$ Допустим, что частное решение имеет вид $u = Q(\rho) \cdot T(\theta)$. Тогда получим

$$\rho^2 Q''(\rho) \cdot T(\theta) + \rho Q'(\rho) \cdot T(\theta) + Q(\rho) \cdot T''(\theta) = 0.$$

Разделяем переменные: $\dfrac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\dfrac{\rho^2 Q''(\rho) + \rho Q'(\rho)}{Q(\rho)}$. Приравнивая каждую часть полученного равенства постоянной $-k^2$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения: $T''(\theta) + k^2 \cdot T(\theta) = 0, \quad \rho^2 Q''(\rho) + \rho Q'(\rho) - k^2 Q(\rho) = 0.$ Отсюда при $k=0$ получим

$$T(\theta) = A + B\theta, \tag{14.1}$$

$$Q(\rho) = C + D\ln\rho. \tag{14.2}$$

Если же $k > 0$, *то* $T(\theta) = A\cos k\theta + B\sin k\theta,$ (14.3)

а решение второго уравнения будем искать в виде $Q(\rho) = \rho^m$, что дает $\rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + \rho m\rho^{m-1} - k^2\rho^m = 0,$ или $\rho^m(m^2 - k^2) = 0, m = \pm k.$

Следовательно, $Q(\rho) = C\rho^k + D\rho^{-k}.$ (14.4)

Заметим, что $u(\rho,\theta)$ как функция θ есть периодическая функция с периодом 2π, так как величины $u(\rho,\theta)$ и $u(\rho,\theta+2\pi)$ соответствуют однозначной функции в одной и той же области. Поэтому, в (14.1) $B=0$, а в (14.3) k может иметь одно из значений 1,2,3,…(k >0). Далее, в (14.2) и в (14.4) $D=0$, так как в противном случае функция u имела бы разрыв при $r=0$ и не была бы гармонической в круге. Итак, мы получили бесчисленное множество частных решений уравнения $\Delta u(\rho,\theta) = 0$, непрерывных в круге, которые можно записать в виде

$$u_0(\rho,\theta) = \frac{A_0}{2}, \; u_n(\rho,\theta) = \left(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta\right)\rho^n, \quad (n = 1,2,....).$$

Составим функцию $u(\rho,\theta) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta\right)\rho^n$, которая в следствие линейности и однородности уравнения Лапласа также будет его решением. Остается определить величины A_0, A_n, B_n так, чтобы эта функция удовлетворяла условию $u\big|_{\rho=R} = \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta\right)R^n.$

Это разложение функции $\varphi(\theta)$ в ряд Фурье в промежутке [-π,π]. В силу известных формул находим

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)d\tau, \; A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)\cos n\tau\, d\tau, \qquad B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)\sin n\tau\, d\tau.$$

Таким образом, $u(\rho,\theta) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)\left\{\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^n\cos n(\tau-\theta)\right\}d\tau.$ После преобразований получим

$u(\rho,\theta)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)\dfrac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\tau-\theta)+\rho^2}d\tau.$ Это решение задачи Дирихле для круга. Интеграл, стоящий в правой части, называется интегралом Пуассона.

Примеры

41. На окружности круга $x^2+y^2\le R^2$ температура распределяется по закону: $u\big|_{x^2+y^2=R^2}=x^2-y^2+\dfrac{1}{2}y.$ Найти распределение температуры внутри круга, предполагая, что оно стационарно.

Решение. Поставленная задача – задача Дирихле для круга: требуется найти функцию, гармоническую внутри круга и принимающую на границе круга заданные значения $u(R,\theta)=R^2\cos^2\theta-R^2\sin^2\theta+\dfrac{1}{2}R\sin\theta=R^2\cos 2\theta+\dfrac{1}{2}R\sin\theta.$

Согласно теории уравнения Лапласа искомая функция внутри круга имеет вид $u(\rho,\theta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta).$ При этом $A_0=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)d\theta$

Из граничного условия получим:
$u(\rho,\theta)=R^2\cos 2\theta+\dfrac{1}{2}R\sin\theta=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(R^nA_n\cos n\theta+R^nB_n\sin n\theta).$ Откуда, сравнивая коэффициенты при $\cos 2\theta$ и $\sin\theta$, получим: $R^2=R^2A_2$, $\dfrac{1}{2}R=RB_1$. Следовательно, $A_2=1,\ B_1=\dfrac{1}{2}.$ Остальные коэффициенты равны нулю. Подставляя найденные коэффициенты в выражение для $u(\rho,\theta)$, получим решение задачи:

$$u(\rho,\theta)=\rho^2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\rho\sin\theta=\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+$$

$$+\frac{1}{2}\rho\sin\theta=x^2-y^2+\frac{1}{2}y,\ т.е.\ u(x,y)=x^2-y^2+\frac{1}{2}y.$$

42. Является ли гармонической функция $u=\ln\dfrac{1}{\rho}$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$?

Ответ. Да.

43. Решить задачу Дирихле для круга радиуса R с центром в начале координат, если заданы следующие граничные условия:

а) $u\big|_{\rho=R}=\dfrac{3x}{R};$ б) $u\big|_{\rho=R}=3-5y;$

в) $u\big|_{\rho=R} = 2x^2 - 4xy - 6y^2$; г) $u\big|_{\rho=R} = 3R\varphi(2\pi - \varphi)$.

Ответ. а) $u(\rho,\theta) = \dfrac{3}{R}\rho\cos\theta = \dfrac{3x}{R}$;

б) $u = 3 - 5y = 3 - 5\rho\sin\theta$;

в) $u = 4\rho^2\cos 2\theta - 2\rho^2\sin 2\theta - 2R^2 = 4x^2 - 4xy - 4y^2 - 2R^2$;

г) $u(\rho,\varphi) = 2\pi^2 R - 12\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2R^n}\rho^n\cos n\theta$.

44. Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластинке радиуса R, если распределение температуры на окружности, ограничивающей эту пластинку, задается формулой

$$f(R,\theta) = \begin{cases} 1,\ 0 \le \theta \le \pi, \\ 0,\ \pi < \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Ответ. $u = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\pi} arctg\,\dfrac{R^2 - r^2}{2Rr\sin\theta}, & 0 \le \theta \le \pi, \\ -\dfrac{1}{\pi} arctg\,\dfrac{R^2 - r^2}{2Rr\sin\theta}, & \pi < \theta \le 2\pi. \end{cases}$

Указание. В интеграле Пуассона нужно воспользоваться подстановкой $tg\,\dfrac{\tau - \theta}{2} = t$.

45. Найти гармоническую функцию внутри кольца $1 \le \rho \le 2$, удовлетворяющую краевым условиям $u\big|_{\rho=1} = 0$; $u\big|_{\rho=2} = Ay$.

Ответ. $u(\rho,\theta) = \dfrac{8A}{3}sh\ln\rho\sin\theta$.

Указание. Ввести полярные координаты. Можно воспользоваться формулой

$$u(\rho,\varphi) = C_0 + D_0\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(A_n\rho^n + \frac{C_n}{\rho^n}\right)\cos n\theta + \left(B_n\rho^n + \frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\theta\right).$$

Коэффициенты определяются из граничных условий.

46. Найти решение уравнения Лапласа в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 с центром в начале координат, удовлетворяющее краевым условиям $\left.\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1} = \varphi_1(\theta)$, $u\big|_{\rho=R_2} = \varphi_2(\theta)$.

Указание. Решение представить в виде ряда Фурье по $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$.

15. Метод функций Грина.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения эллиптического типа

$$\Delta(u) = f(M), \tag{15.1}$$

$$\left(\alpha_1 u + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial n}\right)_s = \varphi(M), \quad s = \partial V, \tag{15.2}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(M), \quad \alpha_2 = \alpha_2(M), \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0.$

Функцией Грина называют решение задачи (15.1),(15.2) при специальных значениях функций f и φ, именно: $f(M) = -\delta(M,P)$ ($\delta -$дельта функция), $\varphi(M) \equiv 0$.

Решение этой задачи, т.е. функцию Грина обозначим через *G(M,P)*. Если функция Грина найдена, то с ее помощью легко найти и решение исходной задачи (15.1), (15.2). Для этого применим формулу Грина к функциям *v=G(M,P)* и к исходному решению *u(M)*:

$$\int_V (G\Delta(u) - u\Delta(G))dv = \int_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Поскольку в области V $\Delta(u) = f(M)$, а $\Delta(G) = -\delta(M,P)$, то

$$\int_V f(M)G(M,P)dv_M + \int_V u(M)\delta(M,P)dv_M = \int_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_M.$$

Второй интеграл левой части по свойству $\delta -$ функции равен *u(P)*. Поэтому последнее соотношение можно записать в виде

$$u(P) = \int_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma_M - \int_V G(M,P)f(M)dv_M. \tag{15.3}$$

Здесь интегрирование производится по координатам точки *M*.

Для первой граничной задачи $(\alpha_1 \equiv 1, \alpha_2 \equiv 0)$ $G\big|_S = 0, u\big|_S = \varphi$, из формулы (15.3) получим решение задачи (15.1),(15.2)

$u(P) = -\int_S \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma_M - \int_V G(M,P)f(M)dv_M$. Для второй граничной задачи $(\alpha_1 \equiv 0, \alpha_2 \equiv 1)$ $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi(M)$ и из формулы (15.3) получаем решение задачи (15.1), (15.2)

$$u(P) = \int_S G(M,P)\varphi(M)d\sigma_M - \int_V G(M,P)f(M)dv_M.$$

Для третьей граничной задачи $(\alpha_1 \neq 0 \ и \ \alpha_2 \neq 0)$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}G\big|_S, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u\big|_S + \left.\frac{\varphi(M)}{\alpha_2}\right|_S.$$

В этом случае $u(P)=\int\limits_S \frac{\varphi(M)}{\alpha_2(M)}G(M,P)d\sigma_M - \int\limits_V G(M,P)f(M)dv_M$.

Таким образом, исходная задача сводится к задаче о нахождении функции Грина.

16. Нахождение функции Грина методом электростатических изображений.

Функция Грина находится явно лишь для областей частного вида. При построении функции Грина полезно воспользоваться следующей ее физической интерпретацией. Из курса физики известно, что электрический заряд величины q, помещенный в точку P, создает в свободном неограниченном пространстве электростатическое поле, потенциал которого (при определенном выборе системы единиц)

равен: $$u_0(M)=\frac{q}{4\pi\rho_{MP}}. \qquad (16.1)$$

Поскольку в замкнутой области V функция Грина $G(M,P)$ имеет вид

$$G(M,P)=\frac{1}{4\pi\rho_{MP}}+g(M,P), \qquad (16.2)$$

где $g(M,P)$, как функция точки M, гармоническая в области V и непрерывна вместе с первыми производными в замыкании $[V]$ области V, то первое слагаемое в правой части (16.2) является потенциалом точечного единичного заряда, помещенного в точке P области V. Второе слагаемое $g(M,P)$ можно также интерпретировать, как потенциал электростатического поля, созданного одним или несколькими зарядами, но расположенными обязательно вне области V. Это возможно сделать потому, что потенциал электростатического поля, т.е. функция вида (16.1), является гармонической функцией в любой области, свободной от зарядов (т.е. при $M\neq P$). Заряды вне V надо выбрать так, чтобы они уничтожили на поверхности S действие заряда в точке P, т.е. чтобы выполнялось соотношение $G\big|_S=0$; эти заряды называют электростатическими изображениями единичного заряда в P, а сам метод нахождения функции Грина – методом электростатических изображений.

Пример 1. Функция Грина для полупространства. Пусть S есть плоскость $z=0$, а V – полупространство $z>0$. Если в точке $P\in V$ поместить единичный положительный заряд, то его действие на S уничтожится, очевидно, единичным отрицательным зарядом, помещенным в точке P_1, которая является зеркальным изображением точки P относительно S. Потенциал поля, созданного зарядом в P_1, есть

$g(M,P)=-\frac{1}{4\pi\rho_{MP_1}}$ и, следовательно, функция Грина –

$$G(M,P)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\rho_{MP}}-\frac{1}{\rho_{MP_1}}\right).$$

Пример 2. Функция Грина для шара. Пусть V – шар, ограниченный сферой S: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с центром в начале координат. Поместим единичный заряд в точку P, расположенную внутри сферы S. Покажем, что действие этого заряда на S может быть уничтожено некоторым зарядом, помещенным в точке P_1, являющейся инверсией точки P относительно сферы S; точка P_1, лежит на прямой OP вне шара, причем

$$\rho_{OP} \cdot \rho_{OP_1} = R^2. \tag{16.3}$$

Пусть $\overline{P}$ – произвольно зафиксированная точка сферы S. Рассмотрим два треугольника $OP\overline{P}$ и $OP_1\overline{P}$. Эти треугольники подобны, так как они имеют общий угол при вершине O и стороны, образующие этот угол, пропорциональны в силу (16.3). Из подобия треугольников следует $\dfrac{\rho_{\overline{P}P}}{\rho_{\overline{P}P_1}} = \dfrac{\rho_0}{R}$, где $\rho_0 = \rho_{OP}$; откуда

$$\frac{1}{4\pi\rho_{\overline{P}P}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{4\pi\rho_{\overline{P}P_1}} = 0 \tag{16.4}$$

при любом положении точки $\overline{P}$ на сфере.

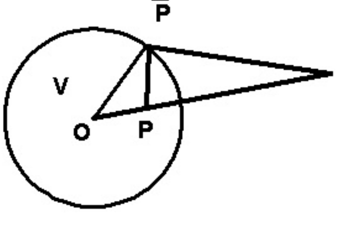

***Рисунок* 7.**

Из (16.4) следует, что действие заряда $q = 1$ в P уничтожается на S зарядом $q = -\dfrac{R}{\rho_0}$, помещенном в P_1. Следовательно, функция Грина – потенциал поля, созданного этими зарядами – есть $G(M,P) = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\rho_{MP}} - \dfrac{R}{\rho_0} \cdot \dfrac{1}{\rho_{MP_1}}\right)$. Метод электростатических изображений можно применить и в плоском случае, однако физическая интерпретация здесь будет несколько иной. Именно, если на прямой, проходящей через точку P ортогонально плоскости (x,y), разместить положительные электрические заряды с единичной плотностью, то они создадут плоское поле (т.е. поле, не зависящее от координаты z), потенциал которого (при соответствующем выборе системы единиц) будет равен $u_0(M) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{\rho_{MP}}$.

17. Решение задачи Дирихле для шара.

Зная функцию Грина, можно построить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Поскольку в этом случае $f(M)=0,$ то искомое решение примет вид
$u(P)=-\int\limits_S \varphi(M)\dfrac{\partial G}{\partial n}d\sigma_M$. Поскольку в этом случае

$G(M,P)=\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\rho_{MP}}-\dfrac{R}{\rho_0}\cdot\dfrac{1}{\rho_{MP_1}}\right)$, то

$u(P)=-\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_S \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{\rho_{MP}}-\dfrac{R}{\rho_0}\cdot\dfrac{1}{\rho_{MP_1}}\right)\varphi(M)dS_M$, где $\varphi(M)=u\big|_S$. Таким образом, остается произвести дифференцирование в подынтегральном выражении. Пусть T – переменная точка, расположенная внутри шара.

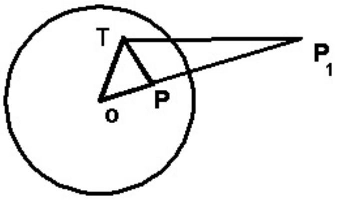

***Рисунок* 8.**

Из треугольников OTP и OTP_1 получим $\rho_{PT}=(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}$,

$\rho_{TP_1}=(\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}$,

где $\rho=\rho_{OT}$, $\rho_0=\rho_{OP}$, $\rho_1=\rho_{OP_1}$, $\gamma-$ угол при вершине O. Учитывая, что направление внешней нормали к сфере совпадает с направлением радиуса (т.е. с направлением роста ρ), получим

$\dfrac{\partial}{\partial n_M}\left(\dfrac{1}{\rho_{PM}}-\dfrac{R}{\rho_0}\cdot\dfrac{1}{\rho_{MP_1}}\right)=\dfrac{\partial}{\partial P}\left(\dfrac{1}{\rho_{TP}}-\dfrac{R}{\rho_0}\cdot\dfrac{1}{\rho_{TP_1}}\right)\Bigg|_{\rho=R}$. Учитывая выражения для ρ_{TP} и для ρ_{TP_1}, а также, что $\rho_1=\dfrac{R^2}{\rho_0}$ подсчитаем правую часть последнего выражения и получим, что

$u(P)=\dfrac{1}{4\pi R}\int\limits_S \dfrac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\varphi(M)dS_M$. Эта формула называется формулой Пуассона, а интеграл, стоящий справа – интегралом Пуассона.

Можно проверить, что функция $u(P)$ действительно является решением задачи Дирихле для шара при любой непрерывной функции $\varphi(M)$. Для этого следует записать подынтегральное выражение в декартовых координатах

$$\frac{R^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2}{((x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \varsigma)^2)^{\frac{3}{2}}} \varphi(M),$$

где $(x_0, y_0, z_0), (\xi, \eta, \varsigma)$ – соответственно координаты точек $P(x_0, y_0, z_0)$ и $M(\xi, \eta, \varsigma)$.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что это выражение как функция точки $P(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Литература

1. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. – М.: Госкомвуз России, 2000.
2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики, тт. 2 и 4. – М.: Физматгиз, 1958.
4. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. – М.: Наука, 1961.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.
6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976.
7. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977.
8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
9. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969.
10. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа, 1976.
11. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: Наука, 1964.
12. Лебедев Н.Н., Скольская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. – М.: Гостехиздат, 1955.
13. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1968.
14. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1983.
15. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.3. – М.: Высшая школа, 1971.