Факультет Вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Лифанов И.К.

Особые интегральные уравнения и методы их численного решения

Учебное пособие

Учебное пособие издано при поддержке образовательной программы «Формирование системы инновационного образования в МГУ».

Макс Пресс
Москва
2006

УДК 519
ББК

Учебно-методическое пособие

Лифанов И.К. Особые интегральные уравнения и методы их численного решения. Учебное пособие по курсу лекций. Москва, 2006 год. – 68 с.

Москва, «МАКС-Пресс», 2006 г. – 68 стр.

В этом спецкурсе излагается теория одномерных особых интегральных уравнений первого рода в периодическом случае и на отрезке с помощью элементарных средств без использования достаточно сложного аппарата краевых задач теории аналитических функций. Для этих уравнений изложен метод дискретных вихрей их численного решения.

ISBN

Факультет Вычислительной математики
и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова,

Кратко об авторе.

Иван Кузьмич Лифанов – доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации, почетный профессор Военно-воздушной инженерной академии им. Н.Е. Жуковского, почетный доктор Одесской национальной академии связи им. А.С. Попова.

Работает на кафедре вычислительных технологий и моделирования факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, заведует кафедрой высшей математики в Военно-воздушной инженерной академии им. Н.Е. Жуковского и является главным научным сотрудником Института вычислительной математики РАН.

Его научные интересы: теоретические исследования и численные методы для особых интегральных уравнений, математическое моделирование в аэродинамике, электродинамике, дифракции волн.

Имеет более 290 научных публикаций, в том числе 11 монографий из которых 3 на английском языке и одна на украинском.

Более 20 лет совместно с профессором Е.В. Захаровым руководит научно-исследовательским семинаром «Интегральные уравнения и их приложения» на факультете ВМиК в МГУ.

Один из организаторов Международных симпозиумов «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», которые регулярно проводятся уже 23 года.

Председатель докторского диссертационного совета в ВВИА им. Н.Е. Жуковского и член такого совета в ИВМ РАН.

Заместитель председателя научно-методического совета по математике Минобрнауки РФ.

Член редколлегий ряда научных журналов.

Член Национального комитета по теоретической и прикладной механики РАН.

В этом спецкурсе мы хотим изложить теорию одномерных особых интегральных уравнений первого рода в периодическом случае и на отрезке с помощью элементарных средств без использования достаточно сложного аппарата краевых задач теории аналитических функций. Потом изложить для этих уравнений метод дискретных вихрей их численного решения.

Текст разбит на четыре пункта. В каждом пункте нумерация сквозная. Если ссылка идет на формулу из другого пункта, то указывается номер пункта и формулы, а если из того же пункта, то указывается только номер формулы.

Оглавление дано в виде вопросов для подготовки к сдаче спецкурса. К каждому вопросу даны страницы в пособии, где излагается этот вопрос, а в круглых скобках указана литература, где можно посмотреть этот вопрос более подробно. Сами вопросы выделены в тексте жирным шрифтом.

п.1. Особые интегралы и уравнения с ними в периодическом случае.

Рассмотрим вначале **интегральный оператор с ядром Гильберта**

$$S(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi \qquad (1.1)$$

который по определению полагаем равным

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_0^{\varphi_0-\varepsilon} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi+\int_{\varphi_0+\varepsilon}^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi\Big). \qquad (1.2)$$

Так как функция $ctg\frac{\varphi}{2}$ нечетна на отрезке $[-\pi,\pi]$, то справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}d\varphi=0, \varphi_0\in[0,2\pi]. \qquad (1.3)$$

Можно доказать, что оператор $S(g(\varphi),\varphi_0)$ определен для любой 2π периодической функции $g(\varphi)$, удовлетворяющей условию Гельдера степени $\alpha, 0<\alpha\le 1$, на отрезке $[0,2\pi]$, т.е. для любых φ_1 и φ_2 из отрезка $[0,2\pi]$ выполняется соотношение $|g(\varphi_2)-g(\varphi_1)|\le A|\varphi_2-\varphi_1|^{\alpha}$, где A>0 некоторая константа.

Утверждение 1.1.Справедливы следующие **спектральные соотношения для интегрального оператора с ядром Гильберта**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}e^{in\varphi}d\varphi=-i\cdot sign(n)e^{in\varphi_0}, n=0,\pm1,\pm2,... \qquad (1.4)$$

где $\operatorname{sign}(n)=\begin{cases}1, n>0,\\ 0, n=0,\\ -1, n<0,\end{cases}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\cos n\varphi d\varphi=\sin n\varphi_0, n=0,1,2,... \qquad (1.5)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\sin n\varphi d\varphi=-\cos n\varphi_0, n=1,2,... \ . \qquad (1.6)$$

Действительно, при целом положительном n имеем

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}(e^{in\varphi}-e^{in\varphi_0})=i\frac{e^{i\varphi}+e^{i\varphi_0}}{e^{i\varphi}-e^{i\varphi_0}}[(e^{i\varphi})^n-(e^{i\varphi_0})^n]=$$
$$=i(e^{i\varphi}+e^{i\varphi_0})(e^{i(n-1)\varphi}+e^{i(n-2)\varphi}e^{i\varphi_0}+...+e^{i\varphi}e^{i(n-2)\varphi_0}+e^{i(n-1)\varphi_0})=$$
$$=i(e^{in\varphi}+2e^{i(n-1)\varphi}e^{i\varphi_0}+...+2e^{i\varphi}e^{i(n-1)\varphi_0}+e^{in\varphi_0}). \qquad (1.7)$$

Переходя в равенстве (7) к комплексно сопряженным величинам, получаем

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}(e^{-in\varphi}-e^{-in\varphi_0})==-i(e^{-in\varphi}+2e^{-i(n-1)\varphi}e^{-i\varphi_0}+...+2e^{-i\varphi}e^{-i(n-1)\varphi_0}+e^{-in\varphi_0}). \qquad (1.8)$$

Таким образом, для отрицательных целых чисел n имеем

$$ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}(e^{in\varphi}-e^{in\varphi_0})=-i(e^{in\varphi}+2e^{i(n-1)\varphi}e^{i\varphi_0}+...+2e^{i\varphi}e^{i(n-1)\varphi_0}+e^{in\varphi_0}). \qquad (1.9)$$

Интегрируя тождества (7) и (8) и меняя местами аргументы под котангенсом получаем равенство (4). Для получения равенства (5) надо взять равенство (4) при n=1 и n=-1, сложить их и разделить на 2. Аналогичным образом получается равенство (6).

Так как оператор Гильберта обладает свойством линейности, т.е.

$$S(af(\varphi)+bg(\varphi),\varphi_0)=aS(f(\varphi),\varphi_0)+bS(g(\varphi),\varphi_0), \qquad (1.10)$$

то знак конечной суммы для функций $e^{ik\varphi}, k=0,\pm1,\pm2,...$, и знак оператора Гильберта можно менять местами. Поэтому оператор Гильберта переводит тригонометрические полиномы в тригонометрические полиномы. В силу этого этот оператор можно распространить на пространство L_2 комплекснозначных 2π периодических функций на $[0, 2\pi]$ с интегрируемым квадратом модуля. В этом пространстве вводится норма $\|f\|_2=\sqrt{(f,f)}$, где под знаком квадратного корня стоит скалярный квадрат функции f. Скалярное произведение функций f и g в этом пространстве вводится следующим образом: $(f,g)=\int_0^{2\pi}f(\varphi)\overline{g(\varphi)}d\varphi$. Указанное пространство L_2 является Гильбертовым и поэтому в нем имеется базис, состоящий из функций $\psi_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}$, $n=0,\pm1,\pm2,...$. Пусть теперь $f(\varphi)$- 2π периодическая функция из L_2, тогда

$$f(\varphi)=\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)\psi_n,\ \hat{f}(n)=\left(f(\varphi),\overline{\psi}_n\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi, \qquad (1.11)$$

причем выполняется соотношение

$$\|f\|_2=(\sum_{n\in Z}\left|\hat{f}(n)\right|^2)^{\frac{1}{2}}<\infty. \qquad (1.12)$$

Для этих функций будем по определению полагать

$$S(f(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}f(\varphi)d\varphi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)\psi_n(\varphi)d\varphi=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\psi_n(\varphi)d\varphi=$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)(-isign(n))\psi_n(\varphi_0)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}_\bullet(n)\psi_n(\varphi_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}_\bullet(n)\psi_n(\varphi_0). \qquad (1.13)$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что последний ряд сходится в L_2. Действительно, имеем

$$\sum_{n\in Z}\left|\hat{f}_\bullet(n)\right|^2=\sum_{n\in Z,n\neq0}\left|\hat{f}(n)\right|^2<\infty. \qquad (1.14)$$

Итак, по определению имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)\psi_n(\varphi)d\varphi=\sum_{n\in Z}(-isign(n))\hat{f}(n)\psi_n(\varphi_0). \qquad (1.15)$$

Таким образом, если функция $g(\varphi)$ принадлежит пространству L_2, то функция $f(\varphi_0)$, определяемая равенством

$$f(\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi \tag{1.16}$$

так же принадлежит пространству L_2.

Утверждение 1. 2. При $n\neq 0, n\in Z$, справедливо равенство

$$e^{in\varphi}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}(-isign(n))e^{in\varphi_0}d\varphi_0 . \tag{1.17}$$

Действительно

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}(-isign(n))e^{in\varphi_0}d\varphi_0=isign(n)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}e^{in\varphi_0}d\varphi_0=$$
$$isign(n)(-isign(n))e^{in\varphi}=e^{in\varphi} .$$

Теперь заметим, что в равенствах (4) и (17) вместо функции $e^{in\varphi}$, $n\neq 0, n\in Z$, можно поставить функцию $\psi_n(\varphi)$.

Обратимся теперь к **характеристическому интегральному уравнению первого рода с ядром Гильберта.** Так называется уравнение вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=f(\varphi_0),\ \varphi_0\in[0,2\pi]. \tag{1.18}$$

Утверждение 1.3. Пусть $f(\varphi_0)$ принадлежит пространству L_2. Тогда, для того чтобы уравнение (18) имело решение из L_2 необходимо выполнение равенства

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi=0 . \tag{1.19}$$

Действительно, пусть функция $g(\varphi)$, принадлежащая пространству L_2, является решением уравнения (18). В этом случае должно выполняться равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\sum_{n\in Z}\hat{g}(n)e^{in\varphi}d\varphi=$$
$$\sum_{n\in Z}\hat{g}(n)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}e^{in\varphi}d\varphi=\sum_{n\in Z}(-sign(n))\hat{g}(n)e^{in\varphi_0}=f(\varphi_0). \tag{1.20}$$

Из последнего равенства следует равенство (19).

Пусть теперь функция $f(\varphi_0)$ в (18) принадлежит пространству L_2 и для нее выполняется равенство (19). Тогда в силу равенства (17) и определения интеграла с ядром Гильберта от функции из L_2 получаем, что функция $g(\varphi)$, определяемая равенством

$$g(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi_0)d\varphi_0=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)e^{in\varphi_0}d\varphi_0=$$
$$\sum_{n\in Z}(-sign(n))\hat{f}(n)e^{in\varphi} \tag{1.21}$$

является решением уравнения (18). Ясно, что в силу равенство (3) функция $g(\varphi)$ +C для произвольной константы C так же является решением уравнения (18).

Приведенные выше рассуждения показывают справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.1. Пусть в уравнении (18) функция $f(\varphi_0)$ принадлежит пространству L_2 и для нее выполняется равенство (19). Тогда общее решение этого уравнения, так же принадлежащее L_2, дается формулой

$$g(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi - \varphi_0}{2} f(\varphi_0)d\varphi_0 + C. \qquad (1.22)$$

Теперь рассмотрим **интегральный оператор с логарифмической особенностью.** Так будем называть оператор

$$L(g(\varphi),\varphi_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right| g(\varphi)d\varphi,\ \varphi_0 \in [0,2\pi]. \qquad (1.23)$$

Если $g(\varphi)$ является непрерывной функцией на $[0,2\pi]$, то интеграл в (23) имеет логарифмическую особенность при $\varphi = \varphi_0$ и поэтому определен. Обозначим через $G(\varphi)$ некоторую первообразную функции $g(\varphi)$. Тогда интегрируя по частям получим равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right| g(\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right| G(\varphi)\ \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2} G(\varphi)d\varphi.$$

Так как первое слагаемое справа в последней формуле равно нулю, в силу периодичности функции $G(\varphi)$ (предполагается, что $g(\varphi)$ не является константой), то получаем равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right| g(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2} G(\varphi)d\varphi,\ \varphi_0 \in [0,2\pi]. \qquad (1.24)$$

Интеграл справа в (24) определен, так как функция $G(\varphi)$ удовлетворяет условию Гельдера при $\alpha = 1$, т.е. условию Липшица. Поэтому равенство (24) справедливо. Возьмем $g(\varphi) = e^{in\varphi}$, тогда можно взять $G(\varphi) = (in)^{-1}e^{in\varphi}$. Теперь в силу равенства (4) получаем соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right| e^{in\varphi}d\varphi = -\frac{1}{n}sign(n)e^{in\varphi_0}, \quad n = \pm1,\pm2,\ldots. \qquad (1.25)$$

Наконец, осталось вычислить значение $L(1,\varphi_0)$. Это значение имеется в справочниках (см. [1] стр. 107), но мы здесь дадим вычисление этого значения, приведенное в учебном пособии Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов, Харьков-2001, 92 с. В силу периодичности функции $\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|$ с периодом 2π получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\ln|\sin\theta|-\ln 2)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta-\ln 2\,. \tag{1.26}$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|d\varphi=\text{-2ln2}. \tag{1.27}$$

В силу формулы (24) и формул (5), (6) получаем справедливость соотношений

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|\cos n\varphi d\varphi=-\frac{1}{n}\cos n\varphi\,,\ \text{n=1,2,...} \tag{1.28}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|\sin n\varphi d\varphi=-\frac{1}{n}\sin n\varphi\,,\ \text{n=1,2,...} \tag{1.29}$$

Наконец, отметим, что из соотношений (4) и (25), (27) следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.2. Пусть функция $f^{'}(\varphi_0)$ принадлежит пространству L_2, т.е. $f(\varphi_0)\in W_2^1$, на $[0,2\pi]$, и функция $g(\varphi)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|g(\varphi)d\varphi=f(\varphi_0)\,,\ \varphi_0\in[0,2\pi]\,. \tag{1.30}$$

Тогда $g(\varphi)\in L_2$ на $[0,2\pi]$ и справедливо следующее равенство

$$\frac{d}{d\varphi_0}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|g(\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\varphi_0}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|g(\varphi)d\varphi=f^{'}(\varphi_0)\,,\varphi_0\in[0,2\pi]\,. \tag{1.31}$$

Теперь рассмотрим **гиперсингулярный оператор**. Так будем называть оператор вида

$$H(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}\,,\varphi_0\in[0,2\pi]\,. \tag{1.32}$$

Вначале дадим определение $4\pi\ H(1,\varphi_0)$, что будем понимать в следующем смысле:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sin^2\dfrac{\theta_0-\theta}{2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{[0,2\pi]\backslash O(\theta_0,\varepsilon)}\frac{d\theta}{\sin^2\dfrac{\theta_0-\theta}{2}}-4ctg\frac{\varepsilon}{2}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[2ctg\frac{\varepsilon}{2}-2ctg\frac{\theta_0}{2}+2ctg\frac{\theta_0-2\pi}{2}+2ctg\frac{\varepsilon}{2}-4ctg\frac{\varepsilon}{2}\right]=$$

$$=2ctg\left(\frac{\theta_0}{2}-\pi\right)-2ctg\left(\frac{\theta_0}{2}\right)=0\,. \tag{1.33}$$

Теперь для $2\pi\ H(g(\varphi),\varphi_0)$ по определению будем полагать

$$\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{[0,2\pi]\backslash O(\theta_0,\varepsilon)}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}-4g(\varphi_0)ctg\frac{\varepsilon}{2}\right]. \tag{1.34}$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1.4. Оператор $H(g(\varphi),\varphi_0)$ определен для любой функции $g(\varphi)$, принадлежащей классу $H_1(\alpha)$, т.е. $g^{'}(\varphi)$ удовлетворяет условию Гельдера степени $\alpha, 0<\alpha\le 1,$ на отрезке $[0,2\pi]$.

Действительно, имеем

$$\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}=\int_0^{2\pi}\frac{(g(\varphi)-g(\varphi_0)-g^{'}(\varphi_0)(\varphi-\varphi_0))d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}+g(\varphi_0)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}+$$

$$g^{'}(\varphi_0)\int_0^{2\pi}\frac{(\varphi-\varphi_0)d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}},\ \varphi_0\in[0,2\pi]. \qquad (1.35)$$

Первое слагаемое справа в (35) существует как абсолютно сходящийся интеграл, так как из того, что $g^{'}(\varphi)\in H_1(\alpha)$, имеем

$$\left|g(\varphi)-g(\varphi_0)-g^{'}(\varphi_0)(\varphi-\varphi_0)\right|\le A|\varphi-\varphi_0|^{1+\alpha}\ . \qquad (1.36)$$

Второе слагаемое равно нулю в силу (33), третье слагаемое существует как сингулярный интеграл.

Утверждение 1.5. Пусть функция $g(\varphi)$ - 2π-периодическая и принадлежит классу $H_1(\alpha)$ на $[0,2\pi]$. Тогда для интеграла (34) справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}=-2\int_0^{2\pi}g'(\varphi)ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}d\varphi. \qquad (1.37)$$

Действительно, первообразной для функции $1/\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}$ является функция $2ctg\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}$. Поэтому, интегрируя по частям, получаем

.

$$\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}=2ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)\ \Big/_0^{2\pi}-2\int_0^{2\pi}g'(\varphi)ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}d\varphi.$$

Первое слагаемое справа равно нулю в силу периодичности функции $g(\varphi)$.

Итак, для оператора $H(g(\varphi),\varphi_0)$ имеем

$$H(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g'(\varphi)ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}d\varphi,\quad \varphi_0\in[0,2\pi]. \qquad (1.38)$$

Теперь из формул (4)-(6) и (38) получаем следующие спектральные соотношения

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{\sin^2\dfrac{\varphi_0-\varphi}{2}}=-nsign(n)e^{in\varphi_0},n=0,\pm1,\pm2,...,\varphi_0\in[0,2\pi], \qquad (1.39)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\varphi d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}} = -n\sin n\varphi_0, n = 0,1,2,..., \ \varphi_0 \in [0,2\pi], \tag{1.40}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\varphi d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}} = -n\cos n\varphi_0, n = 0,1,2,..., \ \varphi_0 \in [0,2\pi]. \tag{1.41}$$

Отметим, что из равенства (38) следует

Утверждение 1.6. Пусть функция $f(\varphi_0)$ принадлежит пространству L_2 и функция $g(\varphi)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}} = f(\varphi_0), \ \ \varphi_0 \in [0,2\pi], \tag{1.42}$$

тогда функция $g(\varphi)$ принадлежит пространству W_2^1.

А из равенств (4) и (39) следует

Теорема 1.3. Пусть функция $f'(\varphi_0)$ принадлежит пространству L_2, т.е. $f(\varphi_0) \in W_2^1$, на $[0,2\pi]$, и функция $g(\varphi)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi = f(\varphi_0), \ \varphi_0 \in [0,2\pi]. \tag{1.43}$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{d}{d\varphi_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\varphi_0}ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi = f'(\varphi_0), \ \varphi_0 \in [0,2\pi] \tag{1.44}$$

Действительно, из равенств (4) и (39) имеем

$$\frac{d}{d\varphi_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}e^{in\varphi}d\varphi = = \frac{d}{d\varphi_0}(-isign(n)e^{in\varphi_0}) = nsign(n)e^{in\varphi_0} =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\varphi_0}ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}e^{in\varphi}d\varphi, \varphi_0 \in [0,2\pi], n = 0,\pm1,\pm2,... . \tag{1.45}$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы, так как если $f(\varphi_0) \in W_2^1$, то она и ее производная представляются сходящимися рядами Фурье.

Обратимся теперь к рассмотрению интегральных уравнений. Вначале рассмотрим **характеристическое интегральное уравнение первого рода с логарифмической особенностью,** т.е. уравнение вида

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|g(\varphi)d\varphi = f(\varphi_0), \ \varphi_0 \in [0,2\pi]. \tag{1.46}$$

Из спектральных соотношений (25), (27) следует, что любая функция $g(\varphi) \in L_2$ является решением уравнения (46) для некоторой функции $f(\varphi_0) \in W_2^1$. Действительно, пусть $g(\varphi) \in L_2$, т.е.

$$g(\varphi) = \sum_{n\in Z}\hat{g}(n)\psi_n, \ \hat{g}(n) = (g(\varphi),\overline{\psi}_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}g(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi, \tag{1.47}$$

где $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}$, причем выполняется соотношение

$$\|g\|_2 = (\sum_{n\in Z} \left|\hat{g}(n)\right|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty . \qquad (1.48)$$

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right| g(\varphi)d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right| \sum_{n\in Z} \hat{g}(n)\psi_n(\varphi)d\varphi =$$

$$\sum_{n\in Z} \hat{g}(n)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right| \psi_n(\varphi)d\varphi = \sum_{n\in Z, n\neq 0} \hat{g}(n)(-\frac{1}{n} sign(n)\psi_n(\varphi_0)) + \hat{g}(0)(-2\ln 2)\psi_0(\varphi_0) =$$

$$f(\varphi_0), \varphi_0 \in [0,2\pi]. \qquad (1.49)$$

Из последнего равенства следует, что $f(\varphi_0) \in W_2^1$. Из него же и соотношений (25) и (39) следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.4. Для любой функции $f(\varphi_0) \in W_2^1$ уравнение (46) имеет единственное решение, которое задается равенством

$$g(\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi_0)}{\sin^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} d\varphi_0 - \frac{1}{2\ln 2}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi, \quad \varphi \in [0,2\pi], \qquad (1.50)$$

и принадлежит пространству L_2.

Теперь рассмотрим **характеристическое гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода**, т.е. уравнение вида

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}} = f(\varphi_0), \quad \varphi_0 \in [0,2\pi]. \qquad (1.51)$$

Из спектральных соотношений (39) следует, что любая функция $g(\varphi) \in W_2^1$ является решением уравнения (46) для некоторой функции $f(\varphi_0) \in L_2$. Действительно, пусть $g(\varphi) \in W_2^1$, т.е. $g'(\varphi) \in L_2$. Последнее означает, что

$$g'(\varphi) = (\sum_{n\in Z} \hat{g}(n)\psi_n(\varphi))' = \sum_{n\in Z} \hat{g}(n)\psi_n'(\varphi) = \sum_{n\in Z} in\,\hat{g}(n)\psi_n(\varphi) \qquad (1.52)$$

и последний ряд является сходящимся в L_2. Отсюда имеем

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\sum_{n\in Z}\hat{g}(n)\psi_n(\varphi))d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}} = \sum_{n\in Z} \hat{g}(n)\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi_n(\varphi)d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}} =$$

$$\sum_{n\in Z} (-n sign(n))\,\hat{g}(n)\psi_n(\varphi_0) = f(\varphi_0). \qquad (1.53)$$

Из формулы (52) следует, что функция $f(\varphi_0)$ в формуле (53) принадлежит пространству L_2. Последние рассуждения показывают справедливость теоремы.

Теорема 1.5. Пусть в уравнении (51) функция $f(\varphi_0)\in L_2$. Тогда условием существования решения этого уравнения является равенство (19), т.е.

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = 0\,,$$

его решение определено с точностью до константы и задается формулой

$$g(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right| f(\varphi_0)d\varphi_0+\frac{C}{2\pi}\,. \qquad (1.54)$$

Действительно, если $f(\varphi_0)\in L_2$, то из формулы (25) следует, что при $n\neq 0$ из равенства (54) получаем

$$\hat{g}(n)=-\frac{1}{nsign(n)}\hat{f}(n)\,. \qquad (1.55)$$

Подставляя значения $\hat{g}(n)$ из формулы (55) в формулу (53) получаем справедливость теоремы.

П.2. Особые интегралы и уравнения с ними на отрезке.

Как и для особых интегралов в периодическом случае рассмотрение начнем с **оператора Коши на отрезке** [-1,1],

$$S(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{x_0-x}\,,\ x_0\in(-1,1)\,, \qquad (2.1)$$

который по определению полагаем равным

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_{-1}^{x_0-\varepsilon}\frac{g(x)dx}{x_0-x}+\int_{x_0+\varepsilon}^{1}\frac{g(x)dx}{x_0-x}\Big]. \qquad (2.2)$$

При $g(x)$=1 получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x_0-x}=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\,,\ x_0\in(-1,1)\,. \qquad (2.3)$$

Из (2) и (3) следует, что оператор $S(g(x),x_0)$ определен для любой функции $g(x)$, которая удовлетворяет условию Гельдера степени $\alpha, 0<\alpha\le 1$, на отрезке [-1,1], т.е. $g(x)\in H_\alpha$. Более того, он определен для любой функции $g(x)$, которая может быть представлена в виде произведения функций $\lambda(x)\in H_\alpha$ на [-1,1] и функции $\rho(x)=(1+x)^{-\nu}(1-x)^{-\mu}$.

Для того, чтобы рассмотреть спектральные соотношения для оператора $S(g(x),x_0)$ вначале обратимся опять к интегралу Гильберта. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Если функция $g(\varphi)\in H_\alpha$ на $[-\pi,\pi]$ и является нечетной, то выполняется равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=-2\int_0^{\pi}\frac{g(\varphi)\sin\varphi d\varphi}{\cos\varphi_0-\cos\varphi}\,,\ \varphi_0\in[-\pi,\pi]\,, \qquad (2.4)$$

а если $g(\varphi)$ является четной , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=-2\sin\varphi_0\int_0^{\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\cos\varphi_0-\cos\varphi}\,,\ \varphi_0\in[-\pi,\pi]\,. \qquad (2.5)$$

Доказательство проведем для равенства (4), так как для равенства (5) оно аналогично. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=\int_{-\pi}^{0} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi+\int_{0}^{\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi\,. \quad (2.6)$$

Сделаем в первом интеграле справа в (6) замену переменной $\varphi=-\theta$, поменяем местами пределы интегрирования и обозначим опять θ через φ. Получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=\int_{0}^{\pi} (ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}-ctg\frac{\varphi_0+\varphi}{2})g(\varphi)d\varphi=$$

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_0-\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}}g(\varphi)d\varphi=-2\int_{0}^{\pi}\frac{g(\varphi)\sin\varphi d\varphi}{\cos\varphi_0-\cos\varphi}\,. \quad (2.7)$$

Полагая теперь в (5) $g(\varphi)=\cos n\varphi$ и воспользовавшись равенством (1.5), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos n\varphi d\varphi}{\cos\varphi_0-\cos\varphi}=-\frac{\sin n\varphi_0}{\sin n\varphi_0}\text{, n=0,1,2,…} \quad (2.8)$$

Взяв теперь в (4) $g(\varphi)=\sin n\varphi$ из (1.6) получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin n\varphi\sin\varphi d\varphi}{\cos\varphi_0-\cos\varphi}=\cos n\varphi_0\text{, n=1,2,…} \quad (2.9)$$

Сделаем теперь в равенствах (8), (9) замену переменной $\cos\varphi=x$, $\cos\varphi_0=x_0$, $\varphi,\varphi_0\in[0,\pi]$, $x,x_0\in[-1,1]$. Тогда получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\cos(n\arccos x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)}=-\frac{\sin(n\arccos x_0)}{\sin(\arccos x_0)}\text{, n=0,1,2,…} \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}\dfrac{\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)}dx}{x_0-x}=\cos(n\arccos x_0)\text{, n=1,2,…} \quad (2.11)$$

Известно (см. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие транцендентные функции, т. II, М., Наука, 1966, 296 с.), что функция

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)\text{, n=0,1,2,…} \quad (2.12)$$

является многочленом степени n и называется многочленом Чебышева первого рода, а функция

$$U_{n-1}(x)=\frac{\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)}\text{, n=1,2,…} \quad (2.13)$$

Является многочленом степени n-1 и называется многочленом Чебышева второго рода. Доказательство того, что функции $T_n(x)$ и $U_{n-1}(x)$ являются многочленами, получается следующим образом [7]. Обозначим $\arccos x=\theta$ и напомним, что

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n =$$
$$= \cos^n\theta + iC_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta - iC_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \ldots \tag{2.14}$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем тождества

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta(1-\cos^2\theta) + \ldots \tag{2.15}$$

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = C_n^1\cos^{n-1}\theta - C_n^3\cos^{n-3}\theta(1-\cos^2\theta) + \ldots. \tag{2.16}$$

Теперь соотношения (10) и (11) можно записать так

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)} = -U_{n-1}(x_0),\ x_0\in[-1,1],\ \text{n=0,1,2,}\ldots \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)dx}{x_0-x} = T_n(x_0),\ x_0\in[-1,1],\ \text{n=1,2,}\ldots \tag{2.18}$$

Равенства (17) и (18) при x_0 равным -1 или 1 надо понимать в том смысле, что надо сделать в этих равенствах замену $\cos\varphi = x$, $\cos\varphi_0 = x_0$ и воспользоваться равенствами (8) и (9). Равенства (17) и (18) и будем называть спектральными соотношениями для интеграла с ядром Коши на отрезке в классах функций, обращающихся в нуль или в бесконечность на концах отрезка.

Теперь, опираясь на соотношения (17) и (18), покажем **справедливость еще следующих спектральных соотношений для интеграла с ядром Коши на отрезке**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{P_n(x)dx}{x_0-x} = -Q_n(x_0),\ x_0\in[-1,1],\ \text{n=0,1,2,}\ldots \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{Q_n(x)dx}{x_0-x} = P_n(x_0),\ x_0\in[-1,1],\ \text{n=0,1,2,}\ldots \tag{2.20}$$

где $P_n(x) = [T_{n+1}(x) - T_n(x)]/(1-x)$, $Q_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$, $x\in[-1,1]$.

Соотношение (19) легко следует из соотношения (17).

Соотношение (20) получается из следующей цепочки равенств

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{Q_n(x)dx}{x_0-x} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{U_n(x)-U_{n-1}(x)dx}{x_0-x} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\frac{\dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} - \dfrac{\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)}dx}{x_0-x} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi)\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}d\varphi =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2\cos(n+\frac{1}{2})\varphi\sin\frac{\varphi}{2}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2\cos(n+\frac{1}{2})\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi_0-\cos\varphi}d\varphi =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\varphi+\cos n\varphi}{\cos\varphi_0-\cos\varphi}d\varphi=-(\frac{\sin(n+1)\varphi_0}{\sin\varphi_0}-\frac{\sin n\varphi_0}{\sin\varphi_0})=-\frac{2\sin(n+\frac{1}{2})\varphi_0\cos\frac{\varphi_0}{2}}{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}=$$

$$-\frac{2\sin(n+\frac{1}{2})\varphi_0\sin\frac{\varphi_0}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}=-\frac{\cos(n+1)\varphi_0-\cos n\varphi_0}{1-\cos\varphi_0}=\frac{\cos((n+1)\arccos x_0)-\cos(n\arccos x_0)}{1-x_0}=$$

$$\frac{T_{n+1}(x_0)-T_n(x_0)}{1-x_0}=P_n(x_0),\ x_0\in[-1,1],\ n=0,1,2,\ldots \tag{2.21}$$

Эта цепочка равенств получается следующим образом. Вначале пользуемся определением функции $U_n(x_0)$, затем делаем в интеграле замену $\cos\varphi=x$, $\cos\varphi_0=x_0$ и потом пользуемся известными преобразованиями тригонометрических выражений.

Рассмотрим теперь **интегральный оператор с логарифмической особенностью на отрезке,** т.е. оператор вида

$$L(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|x_0-x|g(x)dx,\ x_0\in[-1,1]. \tag{2.22}$$

Будем вначале предполагать, что функция $g(x)$ представляется в виде произведения функции $\lambda(x)\in H_\alpha$ на [-1,1] и функции $\rho(x)=(1+x)^{-\nu}(1-x)^{-\mu}$, где $0\le\nu,\mu<1$. В этом случае подынтегральная функция в (22) будет абсолютно интегрируемой на [-1,1] для любого $x_0\in[-1,1]$. При сформулированном условии на функцию $g(x)$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.2. Для интеграла в (22) справедлива формула интегрирования по частям, т.е. справедлива формула

$$\int_{-1}^{1}\ln|x_0-x|g(x)dx=\ln|x_0-x|G(x)/_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{G(x)dx}{x_0-x},\ x_0\in(-1,1), \tag{2.23}$$

где $G(x)$ некоторая первообразная для функции $g(x)$ на [-1,1]

Используя формулу (23) можно доказать следующее соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|T_n(x)dx=-\frac{1}{n}T_n(x_0),x_0\in(-1,1),n=1,2,... \tag{2.24}$$

Действительно, возьмем в равенстве (23) $g(x)=\cos(n\arccos x)/\sqrt{1-x^2}$, тогда можно взять $G(x)=-\frac{1}{n}\sin(n\arccos x)$. При этом получаем G(-1)=G(1)=0. Поэтому получаем следующее равенство

$$\int_{-1}^{1}\ln|x_0-x|\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\frac{\sin(n\arccos x)dx}{x_0-x}=-\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,\frac{\sin(n\arccos x)}{\sin(\arccos x)}dx}{x_0-x}=$$

$$-\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x)dx}{x_0-x}=-\frac{\pi}{n}T_n(x_0)\,,\ x_0\in[-1,1]\,,\ \text{n=1,2,…} \tag{2.25}$$

которое и доказывает равенство (24).

Отдельно докажем равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|dx=-\ln 2, x_0\in(-1,1), n=0\,. \tag{2.26}$$

Действительно, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln|\cos\varphi_0-\cos\varphi|d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln\left|2\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\right|d\varphi=$$

$$\ln 2+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|d\varphi+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0+\varphi}{2}\right|d\varphi=\ln 2+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|d\varphi=-\ln 2,\ x_0\in(-1,1)\,.$$

В последней цепочке равенств вначале сделали замену переменной $\cos\varphi=x$, $\cos\varphi_0=x_0$, затем воспользовались формулой разности косинусов, потом формулой (1.27).

Таким образом, равенства (24) и (26) дают спектральные соотношения для оператора с логарифмической особенностью.

Теперь рассмотрим **гиперсингулярный оператор**. Так будем называть оператор вида

$$H(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}\,, x_0\in(-1,1)\,. \tag{2.27}$$

Вначале дадим определение $\pi\,H(1,x_0)$, что будем понимать в следующем смысле:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x_0-x)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{x_0-\varepsilon}\frac{dx}{(x_0-x)^2}+\int_{x_0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{(x_0-x)^2}-\frac{2}{\varepsilon}\right]=-\frac{1}{x_0+1}+\frac{1}{x_0-1},\ \ x_0\in(-1,1)\,. \tag{2.28}$$

Теперь для $\pi\;H(g(x),x_0)$ по определению будем полагать

$$\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{x_0-\varepsilon}\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}+\int_{x_0+\varepsilon}^{1}\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}-\frac{2g(x_0)}{\varepsilon}\right], x_0\in(-1,1)\,. \tag{2.29}$$

Докажем теперь следующие два утверждения.

Утверждение 2.3. Интеграл (29) существует для любой функции $g(x)\in H_{1,\alpha}$ на отрезке $[a,b]$, т.е. $g'(x)\in H_\alpha$ классу Гёльдера степени α на $[a,b]$.

Действительно, преобразуем формулу (29) следующим образом:

$$\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{[-1,1]\setminus O(x_0,\varepsilon)}\frac{g(x)-g(x_0)-g'(x_0)(x-x_0)dx}{(x-x_0)^2}+\right.$$

$$\left.+g(x_0)\int_{[-1,1]\setminus O(x_0,\varepsilon)}\frac{dx}{(x-x_0)^2}-g'(x_0)\int_{[-1,1]\setminus O(x_0,\varepsilon)}\frac{dx}{x_0-x}-\frac{2g(x_0)}{\varepsilon}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{[-1,1]\setminus O(x_0,\varepsilon)}\frac{g(x)-g(x_0)-g'(x_0)(x-x_0)dx}{(x-x_0)^2}\right]+$$

$$+g(x_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{[-1,1]\backslash O(x_0,\varepsilon)}\frac{dx}{(x-x_0)^2}-\frac{2}{\varepsilon}\right]-g'(x_0)\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{[-1,1]\backslash O(x_0,\varepsilon)}\frac{dx}{x_0-x}\right\}=$$

$$=I_1(x_0)+g(x_0)I_2(x_0)-g'(x_0)I_3(x_0)\,. \qquad (2.30)$$

В формуле (30) интеграл $I_1(x_0)$ существует как несобственный интеграл, так как $g(x)\in H_{1,\alpha}$, и поэтому

$$\left|g(x)-g(x_0)-g'(x_0)(x-x_0)\right|\le A\left|x-x_0\right|^{1+\alpha}. \qquad (2.31)$$

Интеграл $I_2(x_0)$ существует в силу формулы (28), а интеграл $I_3(x_0)$ существует в смысле главного значения по Коши, см. (3). Утверждение 3 доказано.

Утверждение 2.4. Пусть функция $g(x)\in H_{1,\alpha}$ на отрезке $[a,b]$. Тогда для интеграла (29) справедлива следующая формула интегрирования по частям

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2}=\frac{g(1)}{x_0-1}-\frac{g(-1)}{x_0+1}-\int\limits_{-1}^{1}\frac{g'(x)dx}{x_0-x} \qquad (2.32)$$

Действительно, выполнив в формуле (29) интегрирование по частям, получим:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{g(x)}{x_0-x}\bigg|_{-1}^{x_0-\varepsilon}+\frac{g(x)}{x_0-x}\bigg|_{x_0+\varepsilon}^{1}-\int\limits_{[-1,1]\backslash O(x_0,\varepsilon)}\frac{g'(x)dx}{x_0-x}-\frac{2g(x_0)}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{g(1)}{x_0-1}-\frac{g(-1)}{x_0+1}+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{g(x_0-\varepsilon)}{\varepsilon}+\frac{g(x_0+\varepsilon)}{\varepsilon}-\frac{2g(x_0)}{\varepsilon}\right)-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{[-1,1]\backslash O(x_0,\varepsilon)}\frac{g'(x)dx}{x_0-x}\right)=\frac{g(1)}{x_0-1}-\frac{g(-1)}{x_0+1}+I_4(x_0)-I_5(x_0). \qquad (2.33)$$

Интеграл $I_5(x_0)$ существует в смысле главного значения по Коши. Так как $g(x)\in H_1(\alpha)$, то

$$\begin{aligned}&\left|g(x_0+\varepsilon)+g(x_0-\varepsilon)-2g(x_0)\right|=\\&=\left|\left[g(x_0+\varepsilon)-g(x_0)\right]-\left[g(x_0)-g(x_0-\varepsilon)\right]\right|\le 2A\varepsilon^{1+\alpha}\end{aligned} \qquad (2.34)$$

и поэтому предел $I_4(x_0)$ равен нулю для любого $x_0\in(a,b)$. Утверждение 4 доказано.

Замечание 2.1. Если $g(a)=g(b)=0$ и $g(x)\in H_{1,\alpha}$ на $[a,b]$, то формула (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**) получает вид:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{(x-x_0)^2}=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{g'(x)dx}{x_0-x},\quad x_0\in(-1,1)\,. \qquad (2.35)$$

Замечание 2.2. Формула (35) справедлива и в том случае, если g(-1) =g(1)=0, а $g(x)\in H^{\bullet}_{1,\alpha}$ на $[a,b]$, т.е. производная $g^{'}(x)\in H^{\bullet}_{\alpha}$ на [-1,1] что означает :

$$g'(x)=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\nu}(b-x)^{\mu}}\,, \qquad (2.36)$$

где $\psi(x)\in H_{\alpha}$ на [-1,1], а $\nu,\mu<1$.

Если функция $g(x)$ удовлетворяет требованиям, указанным в Замечании **2.2**, то будем говорить, что $g(x)\in H_1^{(0,0),*}$ на [-1,1].

Покажем теперь, что для интеграла (29) выполняется следующее спектральное соотношение.

Утверждение 2.5. Справедливо следующее спектральное соотношение:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}U_n(x)dx}{(x-x_0)^2}=-\pi(n+1)U_n(x_0),\ \ x\in(-1,1), \tag{2.37}$$

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)},$$

где $U_n(x)$ – полином Чебышёва второго рода.

Действительно, используя представление $U_n(x)$ и равенство $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, можно написать:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}U_n(x)dx}{(x-x_0)^2}=\int_{-1}^{1}\frac{\sin((n+1)\arccos x)dx}{(x-x_0)^2}. \tag{2.38}$$

Теперь в силу формулы интегрирования по частям (3**Ошибка! Источник ссылки не найден.**), так как $\sin((n+1)\arccos(1))=\sin((n+1)\arccos(-1))=0$, получаем:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sin((n+1)\arccos x)dx}{(x-x_0)^2}=(n+1)\int_{-1}^{1}\frac{\cos((n+1)\arccos x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)}=$$

$$=(n+1)\int_{-1}^{1}\frac{T_{n+1}(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)}=-\pi(n+1)U_n(x_0),\ \ x\in(-1,1).$$ (**Ошибка! Текст указанного стиля в документе отсутствует.**.39)

Последнее равенство справедливо в силу соответствующего спектрального соотношения (17) для сингулярного интеграла на отрезке. Утверждение 5 доказано.

Теперь обратимся к **формулам обращения для характеристических уравнений первого рода с особыми интегралами.** Для этого, в силу спектральных соотношений (17)-(20), (25), (26), (37), эти характеристические уравнения запишем в следующем виде

$$L_{\rho_1}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|g(x)dx=f(x_0),\ x_0\in(-1,1), \tag{2.40}$$

$$S_{\rho_1}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1), \tag{2.41}$$

$$S_{\rho_2}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1), \tag{2.42}$$

$$S_{\rho_3}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1), \tag{2.43}$$

$$S_{\rho_4}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{g(x)dx}{x_0-x}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1), \tag{2.44}$$

$$H_{\rho_2}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1), \tag{2.45}$$

где $\rho_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\rho_2(x)=\rho_1^{-1}(x)$, $\rho_3(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\rho_4(x)=\rho_3^{-1}(x)$.

Для дальнеших построений напомним сначала понятие пространства $L_{2,\rho}$ функций на отрезке [-1,1] оси OX, квадрат модуля которых интегрируем на этом отрезке с весом $\rho=\rho(x)$, т.е. функций $f(x)$, $x\in[-1,1]$, таких, что $\int_{-1}^{1}\rho(x)|f(x)|^2dx$, где функция $\rho=\rho(x)$>0 почти всюду на [-1,1]. Естетсвенным образом вводится скалярное произведение функций в этом пространстве $(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}\rho(x)f(x)\overline{g(x)}dx$. После этого пространство $L_{2,\rho}$ становится гильбертовым и поэтому в нем можно взять полную ортонормированную систему функций $\psi_{n,\rho}$, n=0,1,2,…, являющуюся базисом в нем, т.е. $\int_{-1}^{1}\rho(x)\psi_{n,\rho}(x)\overline{\psi_{m,\rho}(x)}dx=\delta_{n,m}$, где $\delta_{n,m}$=0 при $n\neq m$ и $\delta_{n,m}$=1 при n=m. Любая функция $f(x)\in L_{2,\rho}$ представляется рядом Фурье по системе этих функций, сходящимся по норме $L_{2,\rho}$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\psi_{n,\rho}(x),\quad \hat{f}(n)=\int_{-1}^{1}\rho(x)f(x)\overline{\psi_{n,\rho}(x)}dx \tag{2.46}$$

$$\|f\|_{L_{2,\rho}}^2=\int_{-1}^{1}\rho(x)|f(x)|^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2<+\infty .$$

В пространстве $L_{2,\rho}$ при $\rho=\rho_1(x)$ полной ортонормированной системой является система функций $T_n^{\bullet}(x)=\sqrt{2/\pi}T_n(x)$, n=1,2,…, и $T_0^{\bullet}(x)=\sqrt{1/\pi}T_0(x)$, при $\rho=\rho_2(x)$ - система функций $U_n^{\bullet}(x)=\sqrt{2/\pi}U_n(x)$, n=0,1,2,…, при $\rho=\rho_3(x)$ - система функций $P_n^{\bullet}(x)=\sqrt{1/\pi}P_n(x)$, при $\rho=\rho_4(x)$ - система функций $Q_n^{\bullet}(x)=\sqrt{1/\pi}Q_n(x)$. Теперь в силу (46) видно, что если $g(x)\in L_{2,\rho}$, то

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\hat{g}(n)\psi_{k,\rho}(x). \tag{2.47}$$

Поэтому значение $L_{\rho_1}(g(x),x_0)$, $S_{\rho_k}(g(x),x_0)$, $k=1,2,3,4$, $H_{\rho_2}(g(x),x_0)$ будем определять по правилу перемены местами знаков интеграла и суммы в этих операторах. Отсюда в силу спектральных соотношений (17)-(20), (25), (26), (37), получаем, что оператор $L_{\rho_1}(g(x),x_0)$ взаимооднозначно отображает пространство L_{2,ρ_1} в L_{2,ρ_1}, оператор $S_{\rho_1}(g(x),x_0)$ отображает пространство L_{2,ρ_1} на L_{2,ρ_2}, оператор $S_{\rho_2}(g(x),x_0)$ отображает пространство L_{2,ρ_2} в L_{2,ρ_1}, оператор $S_{\rho_3}(g(x),x_0)$ отображает пространство L_{2,ρ_3} на L_{2,ρ_4}, оператор $S_{\rho_4}(g(x),x_0)$

отображает пространство L_{2,ρ_4} на L_{2,ρ_3}, оператор $H_{\rho_2}(g(x),x_0)$ отображает пространство L_{2,ρ_2} на L_{2,ρ_2}.

Теперь можно сформулировать результаты об обращении сингулярных интегральных уравнений (40)-(45).

Теорема 2.1. Пусть функция $f(x)\in L_{2,\rho_2}$. Тогда уравнение (41) имеет решение с точность до константы принадлежащее L_{2,ρ_1}, которое получается по формуле

$$g(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\,f(x_0)dx_0}{x-x_0}+C,\ x\in(-1,1), \tag{2.48}$$

и удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{C}. \tag{2.49}$$

Действительно, пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\psi_{n,\rho_2}(x),\quad \hat{f}(n)=\int_{-1}^{1}\rho_2(x)f(x)\overline{\psi_{n,\rho_2}(x)}dx \tag{2.50}$$

$$\|f\|_{L_{2,\rho}}^2=\int_{-1}^{1}\rho_2(x)|f(x)|^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2<+\infty.$$

Тогда по (18) получаем

$$g(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\,f(x_0)dx_0}{x-x_0}+C=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\psi_{n,\rho_2}(x_0)dx_0}{x-x_0}+C=$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\,\psi_{n,\rho_2}(x_0)dx_0}{x-x_0}+C=-\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\psi_{n+1,\rho_1}(x)+\text{C}. \tag{2.51}$$

Используя (51), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\psi_{n+1,\rho_1}(x)dx}{x_0-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\psi_{n,\rho_2}(x_0)=f(x_0),$$

так как (см. (17) при n=0)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dx}{x_0-x}=0.$$

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.2. Пусть функция $f(x)\in L_{2,\rho_1}$. Тогда при выполнении условия

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=0 \tag{2.52}$$

уравнение (42) имеет единственное решение принадлежащее пространству L_{2,ρ_2}, задаваемое формулой

$$g(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x_0)dx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,(x-x_0)},\ x\in(-1,1). \tag{2.53}$$

Условие (52) следует из того, при $g(x)\in L_{2,\rho_2}$ функция $S_{\rho_2}(g(x),x_0)$ не содержит свободного члена.

Теорема 2.3. Пусть функция $f(x) \in L_{2,\rho_4}$. Тогда уравнение (43) имеет единственное решение принадлежащее пространству L_{2,ρ_3}, задаваемое формулой

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}}\frac{f(x_0)dx_0}{(x-x_0)},\ x \in (-1,1). \qquad (2.54)$$

Теорема 2.4. Пусть функция $f(x) \in L_{2,\rho_3}$. Тогда уравнение (44) имеет единственное решение принадлежащее пространству L_{2,ρ_4}, задаваемое формулой

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}}\frac{f(x_0)dx_0}{(x-x_0)},\ x \in (-1,1). \qquad (2.55)$$

Теперь рассмотрим **характеристическое интегральное уравнение первого рода с логарифмической особенностью (39)**. Вначале заметим, что в силу равенств (24) и (26) получаем справедливость равенств

$$\frac{d}{dx_0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|T_n(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx_0}\ln|x_0-x|T_n(x)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}\,(x_0-x)} = -\frac{d}{dx_0}\left(\frac{1}{n}T_n(x_0)\right) = -U_{n-1}(x_0),\ x_0 \in [-1,1],\ n=1,2,\ldots \qquad (2.56)$$

$$\frac{d}{dx_0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|dx = \frac{d}{dx_0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|T_0(x)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx_0}\ln|x_0-x|T_0(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_0(x)dx}{\sqrt{1-x^2}\,(x_0-x)} = 0. \qquad (2.57)$$

Пусть производная $f'(x)$ функции f(x) удовлетворяет условию H_α, $0 < \alpha \le 1$. Пусть функция g(x) является решением уравнения (40). Из равенств (56) и (57) следует, что это уравнение можно почленно продифференцировать. Получим равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{g(x)dx}{x_0-x} = f'(x_0),\ x_0 \in (-1,1). \qquad (2.58)$$

Из уравнения (58) функция g(x) определяется с точностью до константы (см. теорему 1). Поэтому надо задать значение интеграла стоящего слева в (49). Для этого умножим почленно уравнение (40) на функцию $1/\pi\sqrt{1-x_0^2}$ и возьмем интеграл от обеих частей по отрезку [-1,1], получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}\ln|x_0-x|dx_0 =$$

$$-\ln 2\,\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2.59)$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2.60)$$

Так как $f'(x) \in L_{2,\rho_1}$, то по теореме 1 в силу формулы (48) получаем

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\,f'(x_0)dx_0}{x-x_0} - \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1). \qquad (2.61)$$

В первом интеграле справа в (61) произведем интегрирование по частям, получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\,f'(x_0)dx_0}{x-x_0} = \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x-x_0}f'(x_0)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\Big(\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x-x_0}\Big)'f(x_0)dx_0 =$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{1-xx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,(x-x_0)^2}f(x_0)dx_0,\ x\in(-1,1). \qquad (2.62)$$

Для оправдания равенства (62) напомним, что по определению полагаем

$$\int_{-1}^{1}\frac{1-xx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,(x-x_0)^2}f(x_0)dx_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{I/O(x,\varepsilon)}\frac{1-xx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,(x-x_0)^2}f(x_0)dx_0 - \frac{2\sqrt{1-x^2}\,f(x)}{\varepsilon}\Big), \qquad (2.63)$$

где $x\in(-1,1)$, $I/O(x,\varepsilon)=[-1,x-\varepsilon]\cup[x+\varepsilon,1]$.

Таким образом, из формул (61), (62) следует справедливость теоремы.

Теорема 2.5. Пусть функция $f(x)\in H_{1,\alpha}$, $0<\alpha\le 1$. Тогда уравнение (40) имеет единственное решение, задаваемое формулой

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-xx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,(x-x_0)^2}f(x_0)dx_0 - \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1). \qquad (2.64)$$

Наконец рассмотрим **характеристическое гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода на отрезке (45)**. Обозначая $g^{\bullet}(x)=\sqrt{1-x^2}\,g(x)$ запишем это уравнение в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g^{\bullet}(x)dx}{(x_0-x)^2} = f(x_0),\ x_0\in(-1,1). \qquad (2.65)$$

Используя замечание 1, запишем его в виде

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(g^{\bullet}(x))'\,dx}{x_0-x} = f(x_0),\ x_0\in(-1,1), \qquad (2.66)$$

где функцию $(g^{\bullet}(x))'$ можно записать в виде $(g^{\bullet}(x))'=\lambda(x)/\sqrt{1-x^2}$. Пусть теперь в уравнении (45) $g(x)\in H_{1,\alpha}$, тогда $\lambda(x)\in H_{\alpha}$. Если теперь в уравнении (66) функция $f(x)\in L_{2,\rho_2}$, то из теоремы 1 следует, что

$$(g^{\bullet}(x))' = \lambda(x)/\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\,f(x_0)dx_0}{x-x_0}, \qquad (2.67)$$

так как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(g^{\bullet}(x))'\,dx = 0. \qquad (2.68)$$

В силу того, что $g^{\bullet}(-1)=0$ и с учетом равенства (68) имеем

$$g^{\bullet}(x) = \int_{-1}^{x}d\tau\,\frac{1}{\pi\sqrt{1-\tau^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\,f(x_0)dx_0}{\tau-x_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x_0^2}\,f(x_0)dx_0\int_{-1}^{x}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau-x_0)}. \qquad (2.69)$$

Если теперь во внутреннем интеграле справа в (69) сделать замену переменного $\tau = \cos\varphi$, а затем $tg\frac{\varphi}{2} = \lambda$, то получим

$$g^{\bullet}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{x - x_0}{1 - xx_0 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}}\right| f(x_0)dx_0 . \ x \in (-1,1) . \qquad (2.70)$$

Предыдущие рассуждения в силу формул (67) и (70) показывают справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.6. Пусть функция $f(x) \in L_{2,\rho_2}$ на [-1,1]. Тогда уравнение (45) имеет единственное решение, задаваемое формулой

$$g(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{x - x_0}{1 - xx_0 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}}\right| f(x_0)dx_0 , \ x \in (-1,1) . \qquad (2.71)$$

Заметим, что в силу формулы (67) и спектральных соотношений (18) и (37) получаем, что функция $g(x)$ определяемая формулой (71) удовлетворяет условию $(\sqrt{1-x^2}\,g(x))'\sqrt{1-x^2} \in L_{2,\rho_1}$, а сама функция $g(x) \in L_{2,\rho_2}$.

Замечание 2.3. Стандартный гиперсингулярный оператор $H_{\rho_2}(g(x), x_0)$ переводит многочлен Чебышева второго рода $U_n(x)$ в многочлен $-(n+1)U_n(x)$. Теперь исходя из соотношений (24) и (26), а так же из формулы обращения (64) для уравнения с логарифмической особенностью получаем гиперсингулярный оператор который переводит многочлен Чебышева первого рода $T_n(x)$ в многочлен -n$T_n(x)$, т.е. верно соотношение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1 - xx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,(x - x_0)^2}T_n(x_0)dx_0 = -nT_n(x) , \ x \in [-1,1], \text{ n=0,1,2,}\ldots \qquad (2.72)$$

Равенство (72) еще можно получить заметив, что справедливы равенства

$$\frac{1 - xx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,(x - x_0)^2} = \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{(x - x_0)^2} - \frac{x_0}{(x - x_0)\sqrt{1-x_0^2}} , \qquad (2.73)$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x)) , \text{ n=0,1,2,}\ldots, \qquad (2.74)$$

$$xT_n(x) = \frac{1}{2}(T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)) , \text{ n=0,1,2,}\ldots \qquad (2.75)$$

Аналогично можно заметить, стандартный оператор с логарифмической особенностью $L_{\rho_1}(g(x), x_0)$ переводит многочлен Чебышева первого рода $T_n(x)$ в многочлен $-\frac{1}{n}T_n(x)$, n=1,2,… . Исходя теперь из соотношения (37), а так же из формулы обращения (71) для уравнения с гиперсингулярной особенностью получаем оператор с логарифмической особенностью который переводит многочлен Чебышева второго рода $U_n(x)$ в многочлен $-\frac{1}{n+1}U_n(x)$, т.е. верно соотношение

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{x - x_0}{1 - xx_0 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}}\right| U_n(x_0)dx_0 = -\frac{1}{n+1}U_n(x) , x \in [-1,1], \text{n=0,1,2,}\ldots \qquad (2.76)$$

П. 3. Обобщенные функции на Гильбертовых пространствах и особые интегральные уравнения.

В предыдущих двух пунктах были рассмотрены особые интегральные уравнения в наиболее широких, используемых до настоящего времени, пространствах. Пространствах L_2 периодических функций с интегрируемым квадратом модуля и пространствах $L_{2,\rho}$ функций с интегрируемым с весом $\rho(x)$ квадратом модуля. Однако в последнее время некоторые прикладные задачи привели к необходимости рассмотреть особые интегральные уравнения в классах обобщенных функций на отрезке.

В качестве примера рассмотрим **задачу обтекания профиля с отсосом внешнего потока.** Пусть кривая L является контуром непроницаемого профиля крыла, безотрывно обтекаемого потенциальным потоком несжимаемой жидкости со скоростью $\vec{U}_0(M)$, т.е. $\vec{U}_0(M)=\nabla\Phi_0(M)=(\partial\Phi_0(M)/\partial x)\vec{i}+(\partial\Phi_0(M)/\partial y)\vec{j}$, $\vec{i},\vec{j}$ -орты осей Ох, Оу, М-точка полскости Оху, а функция $\Phi_0(M)$ гармонична на всей плоскости. Непроницаемость профиля и безотрывность его обтекания в данной точке означают, что частица жидкости в этой точке имеет только касательную к профилю скорость. Предполагаем, что кривая L задана параметрически $x = x(t), y = y(t)$, $t\in[0,l]$, с направлением обхода по часовой стрелке, если кривая L замкнутая, а параметр t является длиной дуги кривой L. Функции $x'(t), y'(t)$ удовлетворяют условию Гельдера степени α на $[0,l]$, т.е. $x'(t), y'(t)\in H_\alpha$ на $[0,l]$, и так как параметр t является длиной дуги на L, то $x'^2(t)+y'^2(t)=1$, $t\in[0,l]$. Если кривая L замкнутая, то функции $x = x(t), y = y(t)$ и их производные необходимых порядков периодические с периодом t, причем для простоты будем полагать $t = 2\pi$. Предположим еще, что в точке $M_q(x_q, y_q)$ профиля L ($x_q = x(t_q), y_q = y(t_q)$, $t_q\in(0,l)$) происходит всасывание внешнего потока внутрь оболочки профиля. **Требуется найти поле скоростей в жидкости, возмущенное профилем.**

Будем моделировать профиль вихревым слоем [1] интенсивности $\gamma(t)=\gamma(M(t))$ в точке $M(t)=M(x(t), y(t))$ кривой L. Тогда профиль возмущает в любой точке $M_0 = M(x_0, y_0)$ плоскости скорость $\vec{V}_\gamma(M_0)$, определяемую формулой

$$\vec{V}_\gamma(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\vec{i}\,y_1(M,M_0)-\vec{j}\,x_1(M,M_0)}{r^2_{M,M_0}}\gamma(t)dt,\ M_0\notin L, \tag{3.1}$$

$$x_1(M,M_0)=x_0-x(t),\ y_1(M,M_0)=y_0-y(t),$$

$$r_{M,M_0}=\left|\vec{r}_{M,M_0}\right|=\left|\vec{i}\,x_1(M,M_0)+\vec{j}\,y_1(M,M_0)\right|.$$

В каждой точке M кривой L определен орт касательной $\vec{\tau}_M = x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}$. Выберем направление орта нормали к кривой L в этой точке по формуле $\vec{n}_M = -y'(t)\,\vec{i} + x'(t)\,\vec{j}$ и будем обозначать ту сторону кривой L, куда направлен вектор $\vec{n}_M$, знаком “+” или (L^+), а противоположную знаком “-“ или (L^-). Тогда известны [1] формулы для скорости $\vec{V}^{\pm}_{\gamma}(M_0)$ от вихревого слоя в точках M_0 кривой L при подходе к ним с соответствующей стороны

$$\vec{V}^{\pm}_{\gamma}(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\vec{i}\,y_1(M,M_0) - \vec{j}\,x_1(M,M_0)}{r^2_{M,M_0}}\gamma(t)dt \pm \frac{\gamma(t_0)}{2}\vec{\tau}(t_0),\ M_0 \in L. \qquad (3.2)$$

Устройство всасывания внешнего потока внутрь оболочки профиля будем моделировать стоком интенсивности Q в точке $M_q(x_q, y_q)$ согласно экспериментам (см. [314] в [1]). Поле скоростей $\vec{V}_q(M_0)$, порожденное стоком, имеет особенность в точке $M_q(x_q, y_q)$ и задается формулой

$$\vec{V}_q(M_0) = \frac{Q}{2\pi}\frac{\vec{r}_{M,M_0}}{r^2_{M,M_0}}. \qquad (3.3)$$

Всасывание потока внутрь оболочки профиля означает, что полное поле скоростей $\vec{U}(M_0) = \vec{U}_0(M_0) + \vec{V}_{\gamma}(M_0) + \vec{V}_q(M_0)$, возникающее в этой задаче, имеет особенность типа (3) в окрестности точки $M_q(x_q, y_q)$ с внешней стороны профиля (L^+) и не имеет особенности (является гладким) с противоположной стороны профиля (L^-). Среди трех слагаемых в $\vec{U}(M_0)$ два известны и неизвестным является только $\vec{V}_{\gamma}(M_0)$. Для его нахождения достаточно найти $\gamma(t) = \gamma(M(t))$, которое находят из условия непроницаемости профиля и безотрывности обтекания. Если это условие выполнять на (L^+), то придется пропустить точку $M_q(x_q, y_q)$, так как в ней не выполняется непроницаемость профиля. Поэтому будем выполнять это условие на (L^-). Получим равенство

$$\vec{U}^-(M_0)\,\vec{n}_{M_0} = 0,\ M_0 \in L,$$

или

$$\vec{V}^-{}_{\gamma}(M_0)\,\vec{n}_{M_0} = -\vec{U}^-_0(M_0)\,\vec{n}_{M_0} - \vec{V}^-_q(M_0)\,\vec{n}_{M_0},\ M_0 \in L. \qquad (3.4)$$

Равенство (4) можно записать в виде

$$-\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{y'(t_0)y_1(t,t_0) + x'(t_0)x_1(t,t_0)}{r^2_{M,M_0}}\gamma(t)dt = f(t_0),\ t_0 \in [0,l], \qquad (3.5)$$

где $f(t_0) = -\vec{U}^-_0(M_0)\,\vec{n}_{M_0} - \vec{V}^-_q(M_0)\,\vec{n}_{M_0}$, $x_1(t,t_0) = x_1(M,M_0)$, $y_1(t,t_0) = y_1(M,M_0)$, $M, M_0 \in L$.

Уравнение (5) справедливо для замкнутой и разомкнутой кривой L. Если кривая L разомкнутая, то уравнение (5) может быть записано в виде

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\gamma(t)dt}{t_0-t}+\int_0^l K_1(t_0,t)\gamma(t)dt=f(t_0),\; t_0\in(0,l), \qquad (3.6)$$

а если контур L замкнутый, то в виде

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{t_0-t}{2}\gamma(t)dt+\int_0^{2\pi} K_2(t_0,t)\gamma(t)dt=f(t_0),\; t_0\in[0,2\pi]. \qquad (3.7)$$

Если $x^{''}(t), y^{''''}(t)\in H_\alpha$ на [0,l] ($[0,2\pi]$ для замкнутой кривой), то можно показать [1], что в уравнениях (6), (7) ядра $K_1(t_0,t)$ и $K_2(t_0,t)$ так же принадлежат классу H_α на соответствующих множествах.

Рассмотрим более подробно правую часть в уравнении (5). Здесь функция $f(t_0)$ состоит из двух слагаемых. Функция $\vec{U}_0^-(M_0)\,\vec{n}_{M_0}$ является «хорошей» в окрестности точки $M_q(x_q,y_q)$, так как она лежит на участке гладкости кривой L. Изучим теперь функцию $\vec{V}_q^-(M_0)\,\vec{n}_{M_0}$. Из физики движения жидкости ясно, что эта функция описывает распределенную плотность количества жидкости, протекающей через точки кривой L. Отсюда видно, что для точек $M_0\in L$ и $M_0\neq M_q$ имеем $\vec{V}_q^-(M_0)\,\vec{n}_{M_0}=\vec{V}_q(M_0)\,\vec{n}_{M_0}$ = $(2\pi)^{-1}Q\omega_1(M_0,M_q)$, $\omega_1(M_0,M_q)=r^{-2}_{M_0,M_q}(\vec{r}_{M_0,M_q},\vec{n}_{M_0})$. В традиционных курсах по математической физики доказано, что если $x^{''}(t), y^{''''}(t)\in H_\alpha$ на [0,l] , то функция $\omega_1(M_0,M_q)\in H_\alpha$ равномерно по обеим переменным при соответствующем доопределении ее в точке $M_0= M_q$. Если кривая L имеет в точке M_q касательную, то из сущности источника следует, что через точку M_q со стороны L^- протекает $Q/2$ жидкости (направление движения точек жидкости в точку M_q со стороны L^- имеет острый угол с вектором $\vec{n}_{M_q}$). Поэтому для точек кривой L можно написать $\vec{V}_q^-(M_0)\,\vec{n}_{M_0}=$ $(2\pi)^{-1}Q\omega_1(M_0,M_q)$ + $(Q/2)\delta(M_0-M_q)$, где M_0 - произвольная точка кривой L и функция $\delta(M_0-M_q)$ определяется равенствами: $\delta(M_0-M_q)$=0 при $M_0\in L$, $M_0\neq M_q$, и $\delta(M_0-M_q)=+\infty$ при $M_0= M_q\in L$, а также

$$\int_L \delta(M_0-M_q)dt_0=1$$

Теперь ясно, что поскольку в правой части уравнения (5) стоит обобщенная функция, то решение тоже надо искать в классе обобщенных функций. Как понимать эти обобщенные функции и как понимать особый интеграл от таких функций покажем ниже.

Один вариант обобщенных функций на Гильбертовых пространствах. Рассмотрим бесконечномерное вещественное Гильбертово пространство H(для комплексного пространства ниже следующие построения остаются справедливыми с соответствующими изменениями).

Операцию скалярного произведения векторов $f, g \in H$ запишем как (f, g). Пусть система векторов $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...\}$ является ортонормированным базисом в пространстве H, т.е. удовлетворяет условиям

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{i,j}, \quad \delta_{i,j} = 1, \text{ при i=j и } \delta_{i,j} = 0, \text{ при } i \neq j, \tag{3.8}$$

тогда любой вектор f из H представляется в виде

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k , \tag{3.9}$$

где для коэффициентов a_k выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty .$$

При этом норма вектора f определяется по формуле

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} . \tag{3.10}$$

Определим теперь в пространстве H основное множество S векторов.

Определение 3.1. Вектор f пространства H принадлежит основному множеству S, если его разложение по базису имеет только конечное число коэффициентов отличных от нуля, т. е. для разложения (9) существует такое натуральное число K, что

$$a_k = 0, k > K . \tag{3.11}$$

Отметим, что множество S=S(H) является линейным и всюду плотным в пространстве H, но не является замкнутым в H. Действительно, любой вектор f из H, имеющий в представлении (9) бесконечно много отличных от нуля коэффициентов, является пределом в метрике пространства H последовательности векторов

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k . \tag{3.12}$$

Поэтому введем во множестве S другое понятие сходимости векторов.

Определение 3.2. Будем говорить, что последовательность векторов $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}, ...$ из множества S сходится к вектору f конечномерно, если существует такой общий номер K, что

$$a_k^{(n)} = 0, k > K, n = 1,2,... , \tag{3.13}$$

и для любого n=1,2,… выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} \left| a_k^{(n)} - a_k \right| = 0 , \text{ k=1,2,…} \tag{3.14}$$

Кратко это будем записывать так

$$f^{(n)} \to f(S) \tag{3.15}$$

Итак, другими словами, последовательность векторов $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}, ...$ из S сходится к вектору f из H, если все они лежат в общем конечномерном подпространстве из H и выполняется соотношение (14). Таким образом, вектор f лежит в том же конечномерном подпространстве и, следовательно, принадлежит множеству S. Это означает, что конечномерная сходимость в S обеспечивает замкнутость S. Теперь множество S с введенной конечномерной сходимостью будем называть пространством S основных векторов. Можно еще сказать, что в S введена конечномерная покоординатная сходимость.

Введем теперь понятие обобщенной функции.

Определение 3.3. Обобщенной функцией называется любой линейный непрерывный функционал F на пространстве основных векторов S. Значение функционала F на основном векторе f будем записывать F(f) или (F,f). При этом непрерывность функционала понимаем следующим образом. Функционал F называется непрерывным на S, если из конечномерной сходимости последовательности $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}, ...$ векторов пространства S к вектору f из того же пространства следует, что выполняется соотношение

$$\lim_{f^{(n)} \to f} (F, f^{(n)}) = (F, f) \ . \qquad (3.16)$$

Множество всех обобщенных функций обозначим через $S' = S'(H)$.

Множество S' является линейным, если линейную комбинацию $\lambda F + \mu G$ обобщенных функций F и G определить как функционал, действующий по формуле

$$(\lambda F + \mu G, f) = \lambda(F, f) + \mu(G, f), \ f \in S \ . \qquad (3.17)$$

Следуя методике в [8], можно показать, что функционал $\lambda F + \mu G$ линейный и непрерывный на S, т.е. принадлежит S'.

Интересно отметить следующее. Покоординатная сходимость в S такова, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Любой линейный функционал на S является непрерывным на S в смысле определения 3.

Доказательство. Действительно, пусть последовательность $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}, ...$ векторов пространства S конечномерно сходится к вектору f из S. Это означает, что для коэффициентов разложения $\{a_k^{(n)}\}$ векторов $f^{(n)}$ существует некоторое такое K, что $a_k^{(n)} = 0, k > K, n = 1,2,...$. Поэтому, если F линейный на S функционал, то имеем

$$\lim_{f^{(n)} \to f} (F, f^{(n)}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{K} (F, \psi_k) a_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{K} (F, \psi_k) \lim_{n \to \infty} a_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{K} (F, \psi_k) a_k = (F, \sum_{k=1}^{K} a_k \psi_k) = (F, f) .$$

Таким образом, теорема 1 справедлива.

Отметим, что любой ряд $G = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k$, а, следовательно, и любой элемент пространства H, определяет на S линейный функционал по следующему правилу. Пусть $f = \sum_{k=1}^{K} f_k \psi_k \in S$, тогда по определению полагаем

$$G(f) = (G, f) = \sum_{k=1}^{K} b_k f_k \,. \tag{3.18}$$

Функционал G действительно является линейным, так как

$$G(\lambda f + \mu g) = \sum_{k=1}^{K} b_k (\lambda f_k + \mu g_k) = \lambda \sum_{k=1}^{K} b_k f_k + \mu \sum_{k=1}^{K} b_k g_k = \lambda G(f) + \mu G(g)\,.$$

Из теоремы 1 следует, что функционал G является непрерывным на S, а, следовательно, является обобщенной функцией на H.

Отметим теперь, что значение обобщенной функции F на элементе f из S определяется как

$$F(f) = (F, f) = \sum_{k=1}^{K} f_k (F, \psi_k)\,. \tag{3.19}$$

Покажем теперь справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.2. Пусть задана некоторая обобщенная функция F на H. Тогда ряд

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} (F, \psi_k)\psi_k \tag{3.20}$$

является обобщенной функцией из S', совпадающей с F.

Доказательство. Пусть f произвольный элемент из S. Тогда по определению имеем (см. (18) и (19))

$$G(f) = \sum_{k=1}^{K} (F, \psi_k) f_k = F(f)\,.$$

Итак, получаем важный вывод, что множество произвольных рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k$ и множество обобщенных функций на H, при нашем построении, совпадают.

Определим теперь сходимость в S' как слабую сходимость последовательности функционалов.

Определение 3.4. Последовательность обобщенных функций $F_1, F_2, ..., F_n, ...$ из S' сходится к обобщенной функции F из S', если для любого вектора f из S имеем $(F_n, f) \to (F, f), n \to \infty$. В этом случае мы будем писать $F_n \to F, n \to \infty$, в S'.

Линейное множество S' с введенной в нем сходимостью назовем пространством обобщенных функций S'.

Теперь можно доказать теорему.

Теорема 3.3. Пусть последовательность $F_1, F_2, ..., F_n, ...$ из S' такова, что для каждого вектора f из S числовая последовательность (F_n, f) сходится при $n \to \infty$. Тогда функционал F на S, определенный равенством

$$(F, f) = \lim_{n \to \infty} (F_n, f)\,,\ f \in S\,, \tag{3.21}$$

также является линейным и непрерывным на S, т. е. $F \in S^{'}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать линейность функционала F. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}(F,\alpha f+\beta g)=\lim_{n\to\infty}(F_n,\alpha f+\beta g)=\lim_{n\to\infty}(\alpha(F_{n,}f)+\beta(F_n,g))=\\ \alpha\lim_{n\to\infty}(F_n,f)+\beta\lim_{n\to\infty}(F_n,g)=\alpha(F,f)+\beta(F,g)\end{aligned}.$$

где α и β произвольные числа, а f и g элементы пространства S.

Теорема 3 показывает, что пространство обобщенных функций $S^{'}$ является полным относительно введенной в нем сходимости.

Обратимся теперь к рассмотрению характеристических особых интегральных уравнений в пространствах обобщенных функций. Причем начнем с **особых интегральных уравнений на классе периодических функций.** Для этого вначале напомним спектральные соотношения, полученные в п.1

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|e^{in\varphi}d\varphi=\begin{cases}-\frac{1}{n}\operatorname{sign}(n)e^{in\varphi_0},\ n=\pm1,\pm2,\ldots\\ -2\ln 2,\ n=0,\end{cases}\qquad(3.22)$$

где $\operatorname{sign}(n)=\begin{cases}1, n>0,\\ 0, n=0,\\ -1, n<0,\end{cases}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}e^{in\varphi}d\varphi=-i\cdot sign(n)e^{in\varphi_0},n=0,\pm1,\pm2,...\qquad(3.23)$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}=-n\operatorname{sign}(n)e^{in\varphi_0},\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\qquad(3.24)$$

Рассмотрим теперь Гильбертово пространство L_2 комплекснозначных 2π периодических функций с интегрируемым квадратом модуля, построенное в п.1. В этом пространстве ортонормированным базисом является система функций $\psi_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}$, $n=0,\pm1,\pm2,...$. Ясно, что для этих функций также справедливы спектральные соотношения (22)-(24). Пусть теперь $S^{'}(L_2)$ пространство обобщенных функций построенное на пространстве L_2. Теперь для любой обобщенной функции $g(\varphi)=\sum_{n\in Z}\hat{g}(n)\psi_n$ из $S^{'}(L_2)$ будем полагать

$$L(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\varphi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|g(\varphi)d\varphi=-\sum_{n\in Z_0}\frac{1}{n}sign(n)\hat{g}(n)\psi_n(\varphi_0)-2\ln 2\hat{g}(0)\psi_0(\varphi_0),(3.25)$$

$Z_0=\pm1,\pm2,...$

$$S(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\varphi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=-\sum_{n\in Z} i\cdot sign(n)\hat{g}(n)\psi_n(\varphi_0)\,, \tag{3.26}$$

$$H(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\varphi}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}g(\varphi)d\varphi=-\sum_{n\in Z} n\cdot sign(n)\hat{g}(n)\psi_n(\varphi_0)\,. \tag{3.27}$$

Из соотношений (25)-(27) можно сделать следующие выводы для уравнений

$$L(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|g(\varphi)d\varphi=f(\varphi_0),\varphi_0\in[0,2\pi], \tag{3.28}$$

$$S(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_o-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=f(\varphi_0),\varphi_0\in[0,2\pi], \tag{3.29}$$

$$H(g(\varphi),\varphi_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}=f(\varphi_0),\varphi_0\in[0,2\pi], \tag{3.30}$$

где $f(\varphi)$ - 2π периодическая обобщенная функция.

Уравнение (28) имеет единственное решение для любой обобщенной функции $f(\varphi)$, а уравнения (29) и (30) имеют решение с точностью до константы и условием их разрешимости является равенство

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi=0\,, \tag{3.31}$$

где под значением интеграла от $f(\varphi)$ по $[0,2\pi]$ понимается величина $\sqrt{2\pi}\hat{f}(0)$. Причем формулы обращения для этих уравнений в пространстве обобщенных функций те же, что и в пространстве L_2 и имеют следующий вид (см. п.1). Для уравнения (28) имеем

$$g(\varphi)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi_0)}{\sin^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2}}d\varphi_0-\frac{1}{2\ln 2}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi\,, \tag{3.32}$$

для уравнения (29) имеем

$$g(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}f(\varphi_0)d\varphi_0+\frac{C}{2\pi}\,, \tag{3.33}$$

для уравнения (30) имеем

$$g(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|f(\varphi_0)d\varphi_0+\frac{C}{2\pi}\,, \tag{3.34}$$

где в (33) и (34) для C выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi=C\,, \tag{3.35}$$

так как для разрешимости этих уравнений должно выполняться равенство (31).

Однако для построения вычислительных методов решения уравнений (28)-(30) надо уметь оценивать близость решений этих уравнений по близости их правых частей. Для этого заметим, что если взять произвольный ряд из экспонент (обобщенную функцию) и применить к нему один из операторов L, S или H, то, получим аналогичный ряд у которого коэффициенты отличаются от коэффициентов исходного ряда множителем порядка $\underline{n}^{\lambda}$, $\underline{n}^{\lambda}=\max\{1,|n|\}$. Поэтому естественно возникает идея использования пространств H^{λ} типа пространств Соболева обобщенных функций. Пусть $f(\varphi)$ - 2π периодическая обобщенная функция на L_2, тогда

$$f(\varphi)=\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)\psi_n\,,\ \hat{f}(n)=\left(f(\varphi),\overline{\psi}_n\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi\,, \tag{3.36}$$

где под $\left(f(\varphi),\overline{\psi}_n\right)$ понимается значение обобщенной функции (линейного функционала) $f(\varphi)$ на функции $\overline{\psi}_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-in\varphi}$. Обозначим через H^{λ} множество таких обобщенных функций $f(\varphi)$, что

$$\|f\|_{\lambda}=(\sum_{n\in Z}\underline{n}^{2\lambda}\left|\hat{f}(n)\right|^2)^{\frac{1}{2}}<\infty\,, \tag{3.37}$$

т.е. функция $f^*(\varphi)=\sum_{n\in Z}\underline{n}^{\lambda}\hat{f}(n)\psi_n(\varphi)$ принадлежит пространству L_2.

Введем теперь для функций из H^{λ} скалярное произведение по формуле

$$(f,g)=\sum_{n\in Z}\underline{n}^{2\lambda}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}\,. \tag{3.38}$$

Так введенное скалярное произведение делает H^{λ} гильбертовым пространством причем $H^0=L_2$ - пространство функций с интегрируемым квадратом модуля на $[0,2\pi]$.

Теперь рассмотрим **характеристические особые интеральные уравнения на отрезке.** Для этого опять вначале напомним спектральные соотношения, полученные в п.1

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|T_n(x)dx=-\frac{1}{n}T_n(x_0),x_0\in(-1,1),n=1,2,...\,, \tag{3.39}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|dx=-\ln 2,x_0\in(-1,1),n=0, \tag{3.40}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{T_n(x)dx}{x_0-x}=-U_{n-1}(x_0)\,,\ x_0\in(-1,1)\,,\ n=0,1,2,...\,, \tag{3.41}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\frac{U_{n-1}(x)dx}{x_0-x}=T_n(x_0)\,,\ x_0\in(-1,1)\,,\ n=1,2,...\,, \tag{3.42}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{P_n(x)dx}{x_0-x}=-Q_n(x_0)\,,x_0\in(-1,1)\,,\ n=0,1,2,...\,, \tag{3.43}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{Q_n(x)dx}{x_0-x}=P_n(x_0)\,,\ x_0\in(-1,1)\,,\ n=0,1,2,...\,, \tag{3.44}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\frac{U_n(x)dx}{(x_0-x)^2}=-(n+1)U_n(x_0)\,,\ x_0\in(-1,1)\,,\ n=0,1,2,...\,, \tag{3.45}$$

где $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, $U_n(x)=\sin((n+1)\arccos x)/\sin(\arccos x)$, $P_n(x)=[T_{n+1}(x)-T_n(x)]/(1-x)$, $Q_n(x)=U_n(x)-U_{n-1}(x)$. Теперь характеристические особые интегральные уравнения на отрезке записываются в виде (см. п.1)

$$L_{\rho_1}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln|x_0-x|g(x)dx=f(x_0),\ x_0\in(-1,1),\tag{3.46}$$

$$S_{\rho_1}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1),\tag{3.47}$$

$$S_{\rho_2}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1),\tag{3.48}$$

$$S_{\rho_3}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1),\tag{3.49}$$

$$S_{\rho_4}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{g(x)dx}{x_0-x}=f(x_0),\ x_0\in(-1,1),\tag{3.50}$$

$$H_{\rho_2}(g(x),x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2}=f(x_0),x_0\in(-1,1),\tag{3.51}$$

где $\rho_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\rho_2(x)=\rho_1^{-1}(x)$, $\rho_3(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $\rho_4(x)=\rho_3^{-1}(x)$.

Рассмотрим Гильбертовы пространства $L_{2,\rho}$ построенные в п.2 и возьмем пространства обобщенных функций $S'(L_{2,\rho})$. Пусть теперь $f(x)$ является обобщенной функцией на $L_{2,\rho}$, т.е. $f(x)\in S'_\rho=S'(L_{2,\rho})$, тогда

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)\psi_{n,\rho}(x),\quad \hat{f}(n)=(f(x),\overline{\psi_{n,\rho}(x)})=\int_{-1}^{1}\rho(x)f(x)\overline{\psi_{n,\rho}(x)}dx,\tag{3.52}$$

где под $(f(x),\overline{\psi_{n,\rho}(x)})$ понимается значение обобщенной функции (линейного функционала) $f(x)$ на функции $\overline{\psi_{n,\rho}(x)}$. Обозначим через H_ρ^λ множество таких обобщенных функций $f(x)$ на $L_{2,\rho}$, что

$$\|f\|_{\lambda,\rho}=(\sum_{n\in Z}\underline{n}^{2\lambda}\left|\hat{f}(n)\right|^2)^{\frac{1}{2}}<\infty,\tag{3.53}$$

т.е. функция $f^*(x)=\sum_{n\in Z}\underline{n}^{\lambda}\hat{f}(n)\psi_{n,\rho}(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho}$. Введем теперь для функций из H_ρ^λ скалярное произведение по формуле

$$(f,g)=\sum_{n\in Z}\underline{n}^{2\lambda}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}.\tag{3.54}$$

Так введенное скалярное произведение делает H_ρ^λ гильбертовым пространством причем $H_\rho^0=L_{2,\rho}$ - пространство функций с интегрируемым квадратом модуля на [-1,1]. Теперь для любой обобщенной функции $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{g}(n)\psi_{2,\rho}(x)$, $\rho(x)=\rho_k(x)$, k=1-4, будем полагать, что значение $L_{\rho_1}(g(x),x_0)$, $S_{\rho_k}(g(x),x_0)$, $k=1,2,3,4$, $H_{\rho_2}(g(x),x_0)$ получается по правилу перемены местами знаков интеграла и суммы в этих операторах. Теперь соотношения (39)-(45) показывают следующее. Оператор $L_{\rho_1}(g(x),x_0)$ взаимнооднозначно отображает пространство обобщенных функций $S'(L_{2,\rho_1})$

на себя и пространство $H_{\rho_1}^{\lambda}$ на пространство $H_{\rho_1}^{\lambda+1}$; оператор $S_{\rho_1}(g(x),x_0)$ отображает $S'(L_{2,\rho_1})$ на $S'(L_{2,\rho_2})$ и ядром отображения является множество констант и с таким же свойством $H_{\rho_1}^{\lambda}$ на $H_{\rho_2}^{\lambda}$; оператор $S_{\rho_2}(g(x),x_0)$ отображает $S'(L_{2,\rho_2})$ в $S'(L_{2,\rho_1})$ и для функций $f(x)$ из образа выполняется соотношение

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0 \qquad (3.55)$$

и с таким же свойством $H_{\rho_2}^{\lambda}$ в $H_{\rho_1}^{\lambda}$; оператор $S_{\rho_3}(g(x),x_0)$ отображает взаимнооднозначно $S'(L_{2,\rho_3})$ на $S'(L_{2,\rho_4})$ и $H_{\rho_3}^{\lambda}$ на $H_{\rho_4}^{\lambda}$; оператор $S_{\rho_4}(g(x),x_0)$ отображает взаимнооднозначно $S'(L_{2,\rho_4})$ на $S'(L_{2,\rho_3})$ и $H_{\rho_4}^{\lambda}$ на $H_{\rho_3}^{\lambda}$; и , наконец, оператор $H_{\rho_2}(g(x),x_0)$ отображает взаимнооднозначно $S'(L_{2,\rho_2})$ на $S'(L_{2,\rho_2})$ и $H_{\rho_2}^{\lambda}$ на $H_{\rho_2}^{\lambda-1}$.

Важно, что теперь можно говорить о близости правых частей и соответсвующих решений, являющихся обобщенными функциями.

Теперь сделаем следующее важное замечание. Для уравнений (46)-(51) на базисных элементах соответсвующих пространств справедливы формулы обращения, полученные в п.1. Поэтому, в силу определения значений операторов $L_{\rho_1}(g(x),x_0)$, $S_{\rho_k}(g(x),x_0)$, $k=1,2,3,4$, $H_{\rho_2}(g(x),x_0)$ на обобщенных функциях соответствующих пространств, для уравнений (46)-(51) справедливы следующие формулы обращения.

Для уравнения (46) имеем

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-1}^{1}\frac{1-xx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,(x-x_0)^2}f(x_0)dx_0-\frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}\Big),\ x\in(-1,1), \qquad (3.56)$$

для уравнения (47) имеем

$$g(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x_0^2}\,f(x_0)dx_0}{x-x_0}+\frac{C}{\pi},\ x\in(-1,1), \qquad (3.57)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=C, \qquad (3.58)$$

для уравнения (48) имеем

$$g(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x_0)dx_0}{\sqrt{1-x_0^2}\,x-x_0},\ x\in(-1,1), \qquad (3.59)$$

при выполнении условия (55),
для уравнения (49) имеем

$$g(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}}f(x_0)dx_0,\quad x\in(-1,1), \qquad (3.60)$$

для уравнения (50) имеем

$$g(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}}f(x_0)dx_0,\ x\in(-1,1), \qquad (3.61)$$

для уравнения (51) имеем

$$g(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{x-x_0}{1-xx_0+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_0^2}}\right|f(x_0)dx_0,\ x\in(-1,1). \qquad (3.62)$$

Используя проведенные выше построения в пространствах обобщенных функций получим теперь **некоторые точные решения характеристических особых интегральных уравнений первого рода** в этих пространствах.

Например, задача бесциркуляционного обтекания кругового цилиндра потоком идеальной несжимаемой жидкости при наличии на нем устройства отсоса внешнего потока сводится к решению уравнения [3]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_o-\varphi}{2}g(\varphi)d\varphi=\delta(\varphi_0-q)-\frac{1}{2\pi},\varphi_0,q\in[0,2\pi]. \qquad (3.63)$$

В равенстве (63) под функцией $\delta(\varphi-q)$ понимаем 2π периодическую дельта функцию, определяемую равенствами: $\delta(\varphi-q)$=0, при $\varphi\neq q$, и $\delta(\varphi-q)$=+∞, при $\varphi=q,\varphi,q\in[0,2\pi]$, и для любой функции $\psi_n(\varphi)$, $n=0,\pm1,\pm2,...$, выполняется равенство $\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-q)\psi_n(\varphi)d\varphi=\psi_n(q)$. Из этого вытекает, что если $w(\varphi)$ обобщенная функция, то так же имеем равенство $\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-q)w(\varphi)d\varphi=w(q)$.

Теперь из (33) получаем, что решением уравнения (63) является фунция

$$g(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2}+\frac{C}{2\pi}. \qquad (3.64)$$

Таким образом, получаем формулу[3]

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_o-\varphi}{2}\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2}d\varphi=\delta(\varphi_0-q)-\frac{1}{2\pi},\varphi_0,q\in[0,2\pi]. \qquad (3.65)$$

Этот же результат получается [3] если обобщенные функции $\delta(\varphi-q)$ и $-\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2}$ представить рядами Фурье по функциям $\psi_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}$ и подставить эти ряды в уравнение (63). Действительно, имеем

$$-\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2}= f(\varphi)=\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)\psi_n(\varphi),$$

$$\hat{f}(n)=\left(f(\varphi),\overline{\psi}_n\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-in\varphi}d\varphi.$$

Теперь из (1.4) следует

$$-\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2}=\sum_{n\in Z}isign(n)\psi_n(q)\psi_n(\varphi),\ \varphi,q\in[0,2\pi]. \qquad (3.66)$$

Используя опять (1.4) получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi_o-\varphi}{2}(-\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2})d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi_o-\varphi}{2}\sum_{n\in Z}isign(n)\psi_n(q)\psi_n(\varphi)d\varphi=$$

$$\sum_{n\in Z}isign(n)\psi_n(q)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\varphi_o-\varphi}{2}\psi_n(\varphi)d\varphi\ =\ \sum_{n\in Z,n\neq0}\psi_n(q)\psi_n(\varphi_0). \qquad (3.67)$$

С другой стороны, по определению $\delta(\varphi-q)$ функци полусаем

$$\delta(\varphi-q)=\sum_{n\in Z}\psi_n(q)\psi_n(\varphi_0)=\sum_{n\in Z,n\neq 0}\psi_n(q)\psi_n(\varphi_0)+\frac{1}{2\pi}. \tag{3.68}$$

Сравнивая (67) и (68), видим справедливость равенства (65).

Из представлений рядами Фурье (66) и (68) следует, что обе функции $-\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2}$ и $\delta(\varphi-q)$ принадлежат любому пространству H^{λ} для $\lambda<-\frac{1}{2}$. Заметим так же следующее. Из соотношений (22), (23) следует, что равенство (65) можно почленно интегрировать и поэтому верно соотношение

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0-\varphi}{2}\right|\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\varphi-q}{2}d\varphi=-\frac{\varphi_0}{2\pi}+F(\delta(\varphi_0-q))+C_q,\varphi_0,q\in[0,2\pi], \tag{3.69}$$

где $F(\delta(\varphi-q))=0$, $0\le\varphi<q$; $F(\delta(\varphi-q))=\frac{1}{2}$, $\varphi=q$; $F(\delta(\varphi-q))=1$, $q<\varphi\le 2\pi$, и $0<q<2\pi$, а для q=0 имеем $F(\delta(\varphi))=0$, $\varphi=0$; $F(\delta(\varphi))=\frac{1}{2}$, $0<\varphi<2\pi$; $F(\delta(\varphi))=1$, $\varphi=2\pi$. Так как свободный член ряда Фурье для функции справа в (69) должен быть равен нулю, то $C_q=\frac{1}{2\pi}(q-\pi)$. Отметим, что функция $F(\delta(\varphi-q))$ является первообразной для функции $\delta(\varphi-q)$, обращающаяся в нуль при $\varphi=0$.

Решение задачи о расчете входного сопротивления тонкой проволочной антенны при запитке антенны источником тока, повлекло за собой рассмотрение гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке, в правой части которого стоит функция с особенностью типа 1/x внутри области поиска решения [5]. Аналогом этого уравнения в периодическом случае будет уравнение

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\varphi}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi_0-\varphi}{2}}g(\varphi)d\varphi=ctg\frac{\varphi_0-q}{2},\ \varphi_0,q\in[0,2\pi]. \tag{3.70}$$

В силу формулы обращения (34) для рассматриваемого уравнения и формулы (69) получаем, что решнием уравнения (70) будет функция

$$g(\varphi)=\frac{\varphi}{2\pi}-F(\delta(\varphi-q))+C_q+\frac{C}{2\pi},\ \varphi\in[0,2\pi], \tag{3.71}$$

для которой выполняется равенство (35).

Для приближенного метода решения уравнения (63) методом дискретных вихрей важно, что функция $\delta(\varphi-q)$ является пределом в смысле определения 4 последовательности 2π периодических функций $\delta_h(\varphi-q)=\frac{1}{h}$, $\varphi\in[q-\frac{h}{2},q+\frac{h}{2}]$; $\delta_h(\varphi-q)=0$, $\varphi\notin[q-\frac{h}{2},q+\frac{h}{2}]$, $q\in[0,2\pi]$, т.е. $\lim_{h\to 0}\delta_h(\varphi-q)=\delta(\varphi-q)$.

Теперь рассмотрим уравнение (47) на отрезке. Возьмем в его правой части функцию $f(x_0)=\delta(x_0-q)$, $q\in(-1,1)$, тогда в силу формулы (57) получим, что решением этого уравнения будет функция (C=0)

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{1-q^2}}{x-q}. \qquad (3.72)$$

Подставляя теперь последнюю функцию в уравнение (47) получаем интересное равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(x_0-x)}\left(-\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{1-q^2}}{x-q}\right)dx = \delta(x_0-q),\ x_0 \in (-1,1). \qquad (3.73)$$

Наконец рассмотрим еще частный случай уравнения (51)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\frac{g(x)dx}{(x_0-x)^2} = \frac{1}{x_0-q},\ x_0, q \in (-1,1), \qquad (3.74)$$

который встречается в теории антенн. Оператор, стоящий слева в (74) отображает пространство $S'(L_{2,\rho_2})$ на себя. Поэтому решение этого уравнения и его правую часть рассматриваем как элементы этого пространства. Как и при обращении уравненя (2.45) сведем уравнение (74) к кравнению

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(g^{\bullet}(x))'dx}{x_0-x} = \frac{1}{x_0-q},\ x_0, q \in (-1,1), \qquad (3.75)$$

которое эквивалентно уравнению (74) при выполнении условия

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(g^{\bullet}(x))'dx = 0, \qquad (3.76)$$

где $g^{\bullet}(x) = \sqrt{1-x^2}\,g(x)$. Из формулы обращения (2.48) для уравнения (2.41) получаем, что общее решение уравнения (75) дается формулой

$$(g^{\bullet}(x))' = -\pi\delta(x-q) + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},\ x, q \in (-1,1). \qquad (3.77)$$

В силу равенства (76) получаем, C=1. Поэтому, так как $g^{\bullet}(-1) = 0$, имеем

$$g^{\bullet}(x) = \sqrt{1-x^2}\,g(x) = \arcsin x + \frac{\pi}{2} - \pi F(\delta(x-q)),\ x, q \in (-1,1), \qquad (3.78)$$

где $F(\delta(x-q))=0$, при $0 \le x < q$, $F(\delta(x-q))=\frac{1}{2}$, при x=q, $F(\delta(x-q))=1$, при $q < x \le 1$. Функция $F(\delta(x-q))$ является первообразной для функции $\delta(x-q)$ на отрезке [-1,1], $q \in (-1,1)$. Таким образом, решение уравнения (74) дается формулой

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} - \pi F(\delta(x-q))\right),\ x, q \in (-1,1). \qquad (3.79)$$

П.4. Метод дискретных вихрей численного решения характеристических особых интегральных уравнений.

Вначале рассмотрим **численное решение характеристических особых интегральных уравнений на отрезке**. Потом будем рассматривать эти уравнения в периодическом случае. Поскольку в периодическом случае при рассмотрении метода дискретных вихрей удобно будет ввести в рассмотрение точки комплексной плоскости, которые обычно принято обознать буквой t [2], то и при рассмотрении метода дискретных вихрей для особых интегральных уравнений на отрезке будем использовать вместо переменной x переменную t. В классической теории сингулярных интегральных уравнений уравнения (3.47)-(3.50) записывают единным образом в виде

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{t_0-t}=f(t_0),\ t_0\in(-1,1). \tag{4.1}$$

Теперь используя формулы обращения для уравнений (3.47)-(3.49), соотвтствующие решения уравнения (1) можно записать в виде

$$\varphi(t)=-\frac{1}{\pi^2}R_\kappa(t)\left[\int_{-1}^{1}R_\kappa^{-1}(t_0)\frac{f(t_0)dt_0}{t-t_0}-\nu_\kappa C\pi\right],t\in(-1,1), \tag{4.2}$$

где $\nu_1=1$, $\nu_0=\nu_{-1}=0$,

$$R_0(t)=\rho_3(t)=\sqrt{\frac{1-t}{t+1}},\ R_1(t)=\rho_1(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ R_{-1}(t)=R_1^{-1}(t)=\rho_2(t),$$

и будем называть их соответственно решениями индекса $\kappa=1$ неограниченными на обоих концах отрезка, индекса $\kappa=-1$ ограниченными на обоих концах отрезка и индекса $\kappa=0$ ограниченными в точке 1. Решение индекса $\kappa=0$ с особенностью вида $\sqrt{(t+1)/(1-t)}$ рассматривать не будем, так как из приведенных рассуждений будет видно, что надо изменить в этом случае.

Пусть множества $E=\{t_\kappa,\kappa=1,\dots,n\}$ и $E_0=\{t_{oj},j=0,1,\dots,n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[-1,1]$ с шагом h, т.е. $t_k=-1+kh$, $t_{0j}=t_j+\frac{h}{2}$, $k,j=0,1,...,n$, $h=\frac{2}{n+1}$.Справедлива следующая

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(t)$ принадлежит классу H_α на $[-1,1]$. Тогда между решениями систем линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k}=f(t_{0j}),\ j=1,\dots,n, \tag{4.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k}=f(t_{0j}),\ j=1,\dots,n-1, \tag{4.4}$$

$$\sum\varphi_n(t_k)h=C$$

$$\gamma_{0n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k}=f(t_{0j}),\ j=0,1,\dots,n, \tag{4.5}$$

и решением $\varphi(t)$ индекса $\kappa=0,1,-1$ соответственно в(4.2) уравнения ***Ошибка! Источник ссылки не найден.*** *выполняется неравенство*

$$|\varphi(t_k)-\varphi_n(t_k)|\le\theta_n(t_k),\ k=1,\dots,n, \tag{4.6}$$

в котором величина $\theta_n(t_k)$ удовлетворяет неравенствам:

1) *для всех точек $t_k\in[-1+\delta,1-\delta]$, где $\delta>0$ сколь угодно мало,*
$\theta_n(t_k)\le O_\delta(h^{\lambda_1})$, $\lambda_1>0$; (4.7)

2) *для всех точек $t_k\in[-1,1]$*

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_n(t_k)h \le O\left(h^{\lambda_2}\right), \qquad \lambda_2 > 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Заметим вначале, что в силу результатов о квадратурных формулах для сингулярного интеграла на отрезке [2] системы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** -аппроксимируют уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Для определителей систем **Ошибка! Источник ссылки не найден.** -получим

$$D_\kappa^{(n)} = h^n \Delta_\kappa^{(n)}, \ \kappa = 0,1,-1, \tag{4.9}$$

$$\Delta_0^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_{01}-t_1} & \cdots & \frac{1}{t_{01}-t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{t_{0n}-t_1} & \cdots & \frac{1}{t_{0n}-t_n} \end{vmatrix}, \ \Delta_1^{(n)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_{01}-t_1} & \cdots & \frac{1}{t_{01}-t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{t_{0n-1}-t_1} & \cdots & \frac{1}{t_{0n-1}-t_n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{-1}^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{t_{00}-t_1} & \cdots & \frac{1}{t_{00}-t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{t_{0n}-t_1} & \cdots & \frac{1}{t_{0n}-t_n} \end{vmatrix}.$$

Несложно показать, что

$$\Delta_\kappa^{(n)} = \frac{\prod\limits_{1\le m}\prod\limits_{<p\le n}\left(t_m - t_p\right) \prod\limits_{1-\zeta(-\kappa)\le m<p\le n-\zeta(\kappa)}\left(t_{0p} - t_{0m}\right)}{\prod\limits_{m=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(\kappa)}\prod\limits_{p=1}^{n}\left(t_{0m} - t_p\right)}, \tag{4.10}$$

где $\zeta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\zeta(x) = 0$ при $x \le 0$. Покажем это для $\Delta_0^{(n)}$, так как для остальных будет аналогично, с некоторыми очевидными изменениями.

Вычтем последнюю строчку в определителе $\Delta_0^{(n)}$ из всех предыдущих и из каждого столбца вынесем множитель $1/(t_{0n} - t_k)$, $k = 1,\ldots,n$, а из каждой строчки множитель $t_{0n} - t_{0m}$, $m = 1,\ldots,n-1$. Получим

$$\Delta_0^{(n)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{t_{0n}-t_k}\prod_{m=1}^{n-1}\left(t_{0n} - t_{0m}\right)\begin{vmatrix} \frac{1}{t_{01}-t_1} & \cdots & \frac{1}{t_{01}-t_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{t_{0n-1}-t_1} & \cdots & \frac{1}{t_{0n-1}-t_n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем в последнем определителе последний столбец из всех предыдущих, вынесем множители из каждой строчки и столбца и разложим полученный после этого определитель по последней строчке. Получим

$$\Delta_0^{(n)} = \frac{\prod\limits_{m=1}^{n-1}\left(t_{0n} - t_{0m}\right)\left(t_m - t_n\right)}{\prod\limits_{m,p=1}^{n}\left(t_{0n} - t_p\right)\left(t_{0m} - t_n\right)}\Delta_0^{(n-1)}.$$

Метод математической индукции заканчивает доказательство формулы $\Delta_0^{(n)}$.

Из формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** видно, что $D_\kappa^{(n)} \neq 0$ при любом n. Применяя правило Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений, получим

$$\varphi_n(t_k) = \frac{D_{\kappa,k}^{(n)}}{D_\kappa^{(n)}} = \frac{1}{h} \sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(\kappa)} \frac{(-1)^{j+k} \Delta_{\kappa(j,k)}^{(n)}}{\Delta_\kappa^{(n)}} f(t_{0j}) + \nu_\kappa \frac{(-1)^{n+k}}{h} \frac{\Delta_{1(n,k)}^{(n)}}{\Delta_1^{(n)}} C, \qquad (4.11)$$

где ν_κ определена в **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, а $\zeta(x)$ в **Ошибка! Источник ссылки не найден.**; $D_{\kappa,k}^{(n)}$ и $\Delta_{\kappa,k}^{(n)}$ получаются соответственно из $D_\kappa^{(n)}$ и $\Delta_\kappa^{(n)}$ заменой k-го столбца на столбец из свободных членов правой части системы, а $\Delta_{\kappa(j,k)}^{(n)}$ получается из $\Delta_\kappa^{(n)}$ вычеркиванием j-й строчки и k-го столбца. Для $\Delta_{\kappa(j,k)}^{(n)}$ так же как и для $\Delta_\kappa^{(n)}$, получаем

$$\Delta_{\kappa(j,k)}^{(n)} = \frac{\prod\limits_{\substack{1\le m<p\le n \\ m,\ p\neq k}} \left(t_m - t_p\right) \prod\limits_{\substack{1-\zeta(-\kappa)\le m<p\le n-\zeta(\kappa) \\ m,p\neq j}} \left(t_{0p} - t_{0m}\right)}{\prod\limits_{\substack{m=1-\zeta(-\kappa) \\ m\neq j}}^{n-\zeta(\kappa)} \prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} \left(t_{0m} - t_p\right)} \qquad (4.12)$$

Поэтому формула **Ошибка! Источник ссылки не найден.** получит вид

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{h} I_{\kappa,k}^{(n)} \sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(\kappa)} \frac{1}{h} I_{\kappa,0j}^{(n)} \frac{f(t_{0j})h}{t_k - t_{0j}} + \nu_\kappa \frac{1}{h} I_{1,k}^{(n)} C, \quad k = 1,\ldots,n, \qquad (4.13)$$

где

$$I_{0,k}^{(n)} = \prod_{m=1}^{n} \left(t_{0m} - t_k\right) \Bigg/ \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \left(t_m - t_k\right),$$

$$I_{0,0j}^{(n)} = \prod_{m=1}^{n} \left(t_{0j} - t_m\right) \Bigg/ \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n} \left(t_{0j} - t_{0m}\right),$$

$$I_{1,k}^{(n)} = I_{0,k}^{(n)} \frac{1}{t_{0n} - t_k}, \quad I_{1,0j}^{(n)} = I_{0,0j}^{(n)} \left(t_{0n} - t_{0j}\right),$$

$$I_{-1,k}^{(n)} = I_{0,k}^{(n)} \left(t_k - t_{00}\right), \quad I_{-1,0j}^{(n)} = I_{0,0j}^{(n)} \frac{1}{t_{0j} - t_{00}}.$$

Далее, имеем

$$\frac{1}{h} I_{0,k}^{(n)} = \frac{1}{2} P_{k-1} P_{n-k}, \qquad (4.14)$$

$$P_{k-1} = \prod_{m=1}^{k-1} \left(1 + \frac{t_{0m} - t_m}{t_m - t_k}\right), \quad P_{n-k} = \prod_{m=k+1}^{n} \left(1 + \frac{t_{0m} - t_m}{t_m - t_k}\right), \quad P_0 = 1,$$

$$\frac{1}{h} I_{0,0j}^{(n)} = \frac{1}{2} P_{0,j-1} P_{0,n-j}, \qquad (4.15)$$

$$P_{0,j-1} = \prod_{m=1}^{j-1} \left(1 + \frac{t_{0m} - t_m}{t_{0j} - t_{0m}}\right), \quad P_{0,n-j} = \prod_{m=j+1}^{n} \left(1 + \frac{t_{0m} - t_m}{t_{0j} - t_{0m}}\right), \quad P_{0,0} = 1.$$

Напомним, что в рассматриваемом случае

$$t_k = -1 + kh, \quad t_{0k} - t_k = \frac{h}{2}, \quad h = \frac{2}{n+1},$$

$$t_m - t_k = t_{0m} - t_{0k} = h(m-k)\,. \qquad (4.16)$$

Следовательно, формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** - **Ошибка! Источник ссылки не найден.** дают

$$P_{k-1} = \prod_{m=1}^{k-1}\left(1 - \frac{1/2}{m}\right),\ P_{n-k} = \prod_{m=1}^{n-k}\left(1 + \frac{1/2}{m}\right). \qquad (4.17)$$

В [**Ошибка! Источник ссылки не найден.** из [2]] имеется следующая формула из теории гамма-функции:

$$\frac{(1+\beta)(2+\beta)\ldots(n+\beta)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = \frac{n^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + O(n^{\beta-1})\,, \qquad (4.18)$$

которую можно записать так:

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{\beta}{m}\right) = \frac{n^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + O(n^{\beta-1})\,.$$

Так как нас будет интересовать формула **Ошибка! Источник ссылки не найден.** с точностью до величин порядка n, то можно написать

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{\beta}{m}\right) = \frac{(n+1)^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + O((n+1)^{\beta-1})\,.$$ **Ошибка! Источник ссылки не найден.***

Полагая теперь $\beta = \pm 1/2$, получим

$$P_{k-1} = \frac{k^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + O\left(k^{-3/2}\right),\ P_{n-k} = \frac{(n-k+1)^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + O\left((n-k+1)^{-1/2}\right). \qquad (4.19)$$

Напомним известные по [**Ошибка! Источник ссылки не найден.** из [2]] формулы

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,,\ \Gamma(a+1) = \Gamma(a)a\,,\ \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2\,.$$

Таким образом,

$$P_{k-1}P_{n-k} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{n-k+1}{k}} + O\left(k^{-1/2}(n-k+1)^{-1/2}\right) + O\left(k^{-3/2}(n-k+1)^{1/2}\right). \qquad (4.20)$$

Аналогично имеем

$$P_{0,j-1} = \prod_{m=1}^{j-1}\left(1+\frac{1/2}{m}\right),\ P_{0,n-j} = \prod_{m=1}^{n-j}\left(1-\frac{1/2}{m}\right),$$

$$P_{0,j-1}P_{0,n-j} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{j+1/2}{n-j+1/2}} + O\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\left(n-j+\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\right) + $$
$$+ O\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(n-j+\frac{1}{2}\right)^{-3/2}\right). \qquad (4.21)$$

Отметим, что в силу формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** имеем

$$\sqrt{b-t_k} = \sqrt{h(n-k+1)}\,,\ \sqrt{t_k - a} = \sqrt{kh}\,,$$
$$\sqrt{b-t_{0j}} = \sqrt{h(n-j+1/2)}\,,\ \sqrt{t_{0j}-a} = \sqrt{h(j+1/2)}\,. \qquad (4.22)$$

Из формул **Ошибка! Источник ссылки не найден.** следует, что формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** можно записать в виде

$$P_{k-1}P_{n-k}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{b-t_k}{t_k-a}}+A_{0(n,k)}\,, \tag{4.23}$$

$$A_{0,(n,k)}=O\left(\frac{h}{\sqrt{(b-t_k)(t_k-a)}}\right)+O\left(\frac{h(b-t_k)^{1/2}}{(t_k-a)^{3/2}}\right)$$

$$P_{0,j-1}P_{0,n-j}=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{t_{0j}-a}{b-t_{0j}}}+B_{0(n,j)} \tag{4.24}$$

$$B_{0,(n,j)}=O\left(\frac{h}{\sqrt{(t_{0j}-a)(b-t_{0j})}}\right)+O\left(\frac{h(t_{0j}-a)^{1/2}}{(b-t_{0j})^{3/2}}\right).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что для $\kappa=1,-1$ имеем

$$\frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,k}=\frac{1}{\pi}\left[(1-t_k^2)\right]^{-\kappa/2}+A_{\kappa(n,k)}\,, \tag{4.25}$$

$$A_{\kappa(n,k)}=O\left(\frac{h}{\left[(1-t_k^2)\right]^{3/2-\zeta(-\kappa)}}\right),$$

$$\frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,0j}=\frac{1}{\pi}\left[(1-t_{0j}^2)\right]^{\kappa/2}+B_{\kappa(n,0j)}\,, \tag{4.26}$$

$$B_{\kappa(n,0j)}=O\left(\frac{h}{\left[(1-t_{0j}^2)\right]^{3/2-\zeta(\kappa)}}\right).$$

Подставляя теперь формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** – **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в формулу **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и пользуясь рассуждениями, аналогичными тем, которые были проведены при исследовании квадратурных формул метода дискретных вихрей для сингулярного интеграла на отрезке [2],получим

$$\varphi_n(t_k)=-\frac{1}{\pi^2}R_\kappa(t_k)\int_a^b R_\kappa^{-1}(t_0)\frac{f(t_0)dt_0}{t_k-t_0}+\nu_\kappa R_\kappa(t_k)C+\theta_\kappa(t_k)\,,\ k=1,\ldots,n\,, \tag{4.27}$$

где величина $|\theta_\kappa(t_k)|$ удовлетворяет неравенствам **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Теорема **Ошибка! Источник ссылки не найден.** доказана.

Замечание 4.1. Поясним смысл неизвестной γ_{0n} в системе . Эта система без γ_{0n} переопределена (число уравнений больше числа неизвестных) и, как правило, несовместна. С другой стороны, эта система должна аппроксимировать уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, имеющее единственное решение индекса $\kappa=-1$ при выполнении условия

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(t_0)dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}=0\,. \tag{4.28}$$

Поэтому уровень рассогласованности системы без γ_{0n} должен понижаться, и, следовательно, если эта система с γ_{0n} совместна, то $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{0n}=0$. Но это надо доказать. Таким образом, γ_{0n} делает определенной систему , и поэтому будем называть ее регуляризирующим фактором. Для нахождения γ_{0n} опять воспользуемся правилом Крамера:

$$\gamma_{0n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{h} I_{-1,0j}^{(n)} f(t_{0j})h = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n} \frac{f(t_{0j})h}{\sqrt{1-t_{0j}^2}} + O(h^{1/2}) . \qquad (4.29)$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{0n} = 0$ тогда и только тогда, когда решение индекса $\kappa = -1$ для уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** существует. Следовательно, поведение γ_{0n} при расчетах является индикатором наличия решения индекса $\kappa = -1$.

Замечание 4.2. Во многих приложениях (в аэродинамике, теории упругости и т.д.) часто требуется вычислить не саму функцию $\varphi(t)$, а интеграл $\int_{-1}^{1}\psi(t)\varphi(t)dt$, где $\psi(t)\in H$ на $[-1,1]$. Из неравенств **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** следует, что для вычисления указанного интеграла можно воспользоваться формулой прямоугольников по точкам t_k, $k = 1,\ldots,n$, причем брать в этих точках не функцию $\varphi(t)$, а значение $\varphi_n(t_k)$, т.е. выполняется неравенство

$$\left|\int_{-1}^{1}\psi(t)\varphi(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\psi(t_k)\varphi_n(t_k)h\right| \le O(h^{\lambda_3}),\ \lambda_3 > 0 . \qquad (4.30)$$

Действительно, имеем

$$\left|\int_{-1}^{1}\psi(t)\varphi(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\psi(t_k)\varphi_n(t_k)h\right| \le \left|\int_{-1}^{-1+h}\psi(t)\varphi(t)dt\right| +$$

$$+\left|\int_{-1+h}^{1}\psi(t)\varphi(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\psi(t_k)\varphi(t_k)h\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\psi(t_k)\big(\varphi(t_k)-\varphi_n(t_k)\big)h\right| \le$$

$$\le O(h^{\lambda_4}) + M\sum_{k=1}^{n}\theta_n(t_k)h \le O(h^{\lambda_3}),$$

где $M = \max\limits_{t\in[a,b]}|\psi(t)|$.

Теперь рассмотрим **метод дискретных вихрей для численного решения характеристического интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью на отрезке.** Это уравнение теперь запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t_0 - t|\varphi(t)dt = f(t_0)\,, t_0 \in (-1,1) . \qquad (4.31)$$

Будем предполагать, что $f'(t)\in H_\alpha$ на отрезке [-1,1]. Используя теперь рассуждения п.2 при получении формулы обращения уравнения (2.40) получаем, что уравнение (31) эквивалентно в смысле разыскания решения системе

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{t_0 - t} = f'(t_0)\,,\ t_0 \in (-1,1)\,, \qquad (4.32)$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt = C = -\frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}\,. \tag{4.33}$$

Поэтому для численного решения методом дискретных вихрей уравнения (31) надо рассмотреть следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (см. (4))

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k} = \pi f'(t_{0j}),\ j=1,\ldots,n-1, \tag{4.34}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_n(t_k)h = C = -\frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Справедлива следующая

Теорема 4.2 Пусть $f'(t)\in H_\alpha$ на отрезке [-1,1]. Тогда между решением $\varphi(t)$ уравнения (31) и решением СЛАУ (34) выполняется соотношение (6) в котором величина $\theta_n(t_k)$, $k=1,\ldots,n$, удовлетворяет соотношениям (7) и (8).

Для доказательства теоремы 2 заметим, что левая часть системы (34) совпадает с левой частью системы (4). Поэтому имеем

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{h}I_{1,k}^{(n)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(n)}\frac{\pi f'(t_{0j})h}{t_k-t_{0j}} + \frac{1}{h}I_{1,k}^{(n)}C =$$

$$-\frac{1}{h}I_{1,k}^{(n)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(n)}\frac{\pi f'(t_{0j})h}{t_k-t_{0j}} + \frac{1}{h}I_{1,k}^{(n)}(-\frac{1}{\ln 2}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{4.35}$$

Теперь, как и при получении формулы (27), имеем

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-t_k^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t_0^2}\,f'(t_0)dt_0}{t_k-t_0} - \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t_k^2}}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} + \theta_n(t_k),\ x\in(-1,1), \tag{4.36}$$

где величина $\theta_n(t_k)$, $k=1,\ldots,n$, удовлетворяет соотношениям (7) и (8). Сравнение с формулой (2.61) и доказывает теорему 2, так как из этой формулы следует, что точное решение уравнения (31) в точке t_k получается по формуле

$$\varphi(t_k) = -\frac{1}{\pi\sqrt{1-t_k^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t_0^2}\,f'(t_0)dt_0}{t_k-t_0} - \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t_k^2}}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}},\ k=1,\ldots,n. \tag{4.37}$$

Обратимся теперь к **численному решению характеристического гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода на отрезке.** Запишем это уравнение в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{(t_0-t)^2} = f(t_0),\ t_0\in(-1,1). \tag{4.38}$$

Как видно из формулы (3.62), уравнение (38) имеет единственное решение.

Пусть множества $E=\{t_\kappa,\kappa=1,\ldots,n\}$ и $E_0=\{t_{oj}, j=0,1,\ldots,n\}$ образуют такое разбиение отрезка $[-1,1]$ с шагом h, что $t_k=-1+(k-1)h$, $t_{0j}=t_j+\frac{h}{2}$, $k=1,...,n;\ j=1,...,n-1$, $h=\frac{2}{n-1}$. Теперь заменим уравнение (38) следующей СЛАУ

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_n(t_{0k})\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{(t_{0j}-t)^2}=f(t_{0j}),\quad j=1,...,n-1. \qquad (4.39)$$

Исходя из определения гиперсингулярного интеграла на отрезке, систему (39) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_n(t_{0k})[\frac{1}{t_{0j}-t_{k+1}}-\frac{1}{t_{0j}-t_k}]=f(t_{0j}),\quad j=1,...,n-1. \qquad (4.40)$$

Как следует из результатов [2] для квадратурных формул метода дискретных вихрей для гиперсингулярного интеграла на отрезке, СЛАУ (40) аппроксимирует уравнение (38) так же как СЛАУ (3)-(5) аппроксимируют уравнение (1).

Оказывается справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть функция $f(t)\in H_\alpha$ на отрезке [-1,1]. Тогда между решением системы (40) и решением уравнения (38) выполняется соотношение

$$|\varphi(t_{0k})-\varphi_n(t_{0k})|\le O(h^{\lambda_3}),\ k=1,\dots,n-1, \qquad (4.41)$$

а так же соотношение

$$\left|\varphi'(t_k)-\frac{\varphi_n(t_{0k})-\varphi_n(t_{0k-1})}{h}\right|\le\theta_n(t_k),\ k=2,\dots,n-1, \qquad (4.42)$$

где полагается $\varphi_n(t_{00})=\varphi_n(t_{0n})=0$, а величина $\theta_n(t_k),k=2,\dots,n-1$, удовлетворяет соотношениям (7), (8) для $k=2,\dots,n-1$.

Доказательство. Вначале заметим, что система (40) эквивалентна системе

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_{0k})-\varphi_n(t_{0k-1})}{h}\frac{h}{t_{0j}-t_k}=f(t_{0j}),\ j=1,\dots,n-1, \qquad (4.43)$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_{0k})-\varphi_n(t_{0k-1})}{h}h=0,$$

где, напомним, $\varphi_n(t_{00})=\varphi_n(t_{0n})=0$.

Система (43) совпадает с системой (4) и поэтому имеем

$$\frac{\varphi_n(t_{0k})-\varphi_n(t_{0k-1})}{h}=\frac{1}{h}I_{1,k}^{(n)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(n)}\frac{\pi f(t_{0j})h}{t_k-t_{0j}},\ k=1,...,n. \qquad (4.44)$$

Теперь сравнение формулы (44) с формулой (2.67) и теорема 1 дают доказательство соотношения (42). Далее из формулы (44) следует, что

$$\varphi_n(t_{0k})=\sum_{i=1}^{k}h(\frac{1}{h}I_{1,i}^{(n)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(n)}\frac{\pi f(t_{0j})h}{t_i-t_{0j}}),\ k=1,...,n. \qquad (4.45)$$

Теперь учет формул (2.69) и (25), (26) показывают справедливость соотношения (41).

Теперь **сформулируем метод дискретных вихрей для численного решения полного сингулярного интегрального уравнения первого рода на отрезке**, т.е. для уравнения

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{t_0-t}+\int_{-1}^{1}k(t_0,t)\varphi(t)dt=f(t_0). \qquad (4.46)$$

Будем предполагать пока, что функции $f(t)$ и $k(t_0,t)$ принадлежат классу H на своих областях определения.

Разрешив уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** относительно его характеристической части, получим, что оно эквивалентно в смысле разыскания решений индекса κ уравнению типа Фредгольма второго рода [1]

$$\varphi(t)+\int_{-1}^{1}N_\kappa(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f_{1,\kappa}(t). \tag{4.47}$$

где

$$N_\kappa(t,\tau)=-\frac{1}{\pi^2}R_\kappa(t)\int_{-1}^{1}R_\kappa^{-1}(t_0)\frac{k(t_0,\tau)}{t-t_0}dt_0,$$

$$f_{1,\kappa}(t)=-\frac{1}{\pi^2}R_\kappa(t)\left[\int_{-1}^{1}R_\kappa^{-1}(t_0)\frac{f(t_0)dt_0}{t-t_0}-T_kC\right],$$

причем $T_1=\pi, T_0=T_{-1}=0$ и при $\kappa=-1$ должно выполняться условие

$$\int_{-1}^{1}R_{-1}^{-1}(t)f(t)dt=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}R_{-1}^{-1}(t)k(t,\tau)dt\right)\varphi(\tau)d\tau. \tag{4.48}$$

Отметим, что ядро $N_\kappa(t,\tau)$ имеет вид

$$N_\kappa(t,\tau)=\frac{\Phi(t,\tau)}{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}, \tag{4.49}$$

где α и β равны 0 или 1/2, а функция $\Phi(t,\tau)$ непрерывна на множестве $[-1,1]\times[-1,1]$. Отметим, что к интегральному уравнению второго рода с ядрами вида **Ошибка! Источник ссылки не найден.** применима полностью теория Фредгольма построения приближенного решения и нахождения его решений [35, **Ошибка! Источник ссылки не найден.** из [2]]. Однако уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** можно непосредственно свести к уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром с помощью соответствующей замены переменной. Это замечание позволит систему линейных алгебраических уравнений для уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получаемую в рассматриваемом численном методе, эквивалентным образом преобразовать в систему линейных алгебраических уравнений для уравнения Фредгольма второго рода, эквивалентного уравнению **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в данном классе решений.

Справедлива следующая

Теорема 4.4. *Пусть в уравнении (***Ошибка! Источник ссылки не найден.** *функции $f(t)$ и $k(t_0,t)$ принадлежат классу H на множествах* $[-1,1]$ *и* $[-1,1]\times[-1,1]$ *соответственно и это уравнение имеет единственное решение в соответствующем данному индексу κ классе функций (для $\kappa=1$ считаем заданным значение интеграла от решения). Тогда между решениями систем линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k}+\sum_{k=1}^{n}k(t_{0j},t_k)\varphi_n(t_k)h=f(t_{0j}),\quad j=1,\ldots,n, \tag{4.50}$$

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k}+\sum_{k=1}^{n}k(t_{0j},t_k)\varphi_n(t_k)h=f(t_{0j}), \quad j=1,\dots,n-1,\\ \sum_{k=1}^{n}\varphi_n(t_k)h=C,\end{cases} \tag{4.51}$$

$$\gamma_{0n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k}+\sum_{k=1}^{n}k(t_{0j},t_k)\varphi_n(t_k)h=f(t_{0j}), \quad j=0,1,\dots,n, \tag{4.52}$$

и соответствующими решениями уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** *выполняется соотношение* **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, *в котором величина* $\theta(t_k)$ *удовлетворяет неравенствам* **Ошибка! Источник ссылки не найден.** *и* **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. *Здесь множества* $E=\{t_k, k=1,\dots,n\}$ *и* $E_0=\{t_{0j}, j=0,1,\dots,n\}$ *образуют каноническое разбиение отрезка* $[-1,1]$.

Доказательство. В системах **Ошибка! Источник ссылки не найден.**-(52) оставим слева слагаемые, соответствующие характеристическому сингулярному интегральному уравнению, а все остальное перенесем вправо. Используя результаты теоремы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** получим, что рассматриваемые системы эквивалентны системам (κ=0,1,–1)

$$\varphi_n(t_k)+\sum_{m=1}^{n}\tilde{N}_k(t_k,t_m)\varphi_n(t_m)h=\tilde{f}_{1,\kappa}(t_k), \quad k=1,\dots,n, \tag{4.53}$$

где

$$\tilde{N}_\kappa(t_k,t_m)=-\frac{1}{h}I_{\kappa,k}^{(n)}\sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(-\kappa)}I_{\kappa,0j}^{(n)}\frac{k(t_{0j},t_m)}{t_k-t_{0j}}h,$$

$$\tilde{f}_{1,\kappa}(t_k)=-\frac{1}{h}I_{\kappa,k}^{(n)}\left[\sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(-\kappa)}I_{\kappa,0j}^{(n)}\frac{f(t_{0j})h}{t_k-t_{0j}}-T_\kappa C\right],$$

определение $\zeta(x)$ см. **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

Дальнейшее доказательство проведем более подробно для $\kappa=0$, так как в остальных случаях оно аналогично. Из формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** видно, что если умножить обе части системы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** на множитель $(1-t_k)^{1/4}(1+t_k)^{3/4}$, потом произведение $\varphi_n(t_k)$ на этот множитель обозначить через $\tilde{\varphi}_n(t_k)$ и рассматривать вновь полученную систему линейных алгебраических уравнений, то она аппроксимирует интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ограниченным ядром

$$\tilde{\varphi}_n(t_k)+\int_0^{\tilde{a}}\tilde{\tilde{N}}_\kappa(t_1,\tau_1)\tilde{\varphi}(\tau_1)d\tau_1=\tilde{\tilde{f}}_{1,\kappa}(t_1), \tag{4.54}$$

где

$$\tilde{\tilde{N}}_\kappa(t_1,\tau_1)=N_\kappa\big(t(t_1),\tau(\tau_1)\big)\big(1-t(t_1)\big)^{1/4}\big(1+t(t_1)\big)^{3/4},$$

$$\tilde{\tilde{f}}_{1,\kappa}(t_1)=f_{1,\kappa}\big(t(t_1)\big)\big(1-t(t_1)\big)^{1/4}\big(1+t(t_1)\big)^{3/4},$$

$$\tilde{\varphi}(\tau_1)=\varphi\big(\tau(\tau_1)\big)\big(1-\tau(\tau_1)\big)^{1/4}\big(1+\tau(\tau_1)\big)^{3/4},$$

$$d\tau_1 = \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1/4}(1+\tau)^{3/4}}, \quad \tau_1 = \int_{-1}^{\tau} \frac{d\tilde{\tau}}{(1-\tilde{\tau})^{1/4}(1+\tilde{\tau})^{3/4}} = \tau_1(\tau),$$

$$\tilde{a} = \int_{-1}^{1} \frac{d\tilde{\tau}}{(1-\tilde{\tau})^{1/4}(1+\tilde{\tau})^{3/4}}.$$

Причем, как следует из формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, порядок аппроксимации будет иметь вид

$$\tilde{\theta}(t_k) \le \left[h^{\lambda}(t_k+1)^{1/4} + \frac{h^{1/2}(1+t_k)^{1/4}}{(1-t_k)^{1/4}} + \frac{h}{(1-t_k)^{3/4}(1+t_k)^{3/4}} \right] O(|\ln h|). \qquad (4.55)$$

Из теории численных методов для интегральных уравнений Фредгольма второго рода [49 из [2]] с непрерывным ядром следует, что порядок аппроксимации $\tilde{\varphi}_n(t_k)$ функции $\tilde{\varphi}(t)$ такой же. Возвращаясь теперь к функциям $\varphi(t)$ и $\varphi_n(t_k)$, получаем справедливость сформулированной теоремы для $\kappa = 0$. Для $\kappa = 1$ и -1 она доказывается аналогично.

Опираясь на теорему 4 рассмотрим теперь **метод дискретных вихрей численного решения характеристического сингулярного интегрального уравнения первого рода на системе отрезков**, т.е. уравнения

$$\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t_0 - t} = f(t_0), \qquad (4.56)$$

где L является совокупностью l штук непересекающихся отрезков $[A_1, B_1], \dots, [A_l, B_l]$.

Идея дальнейших рассуждений будет состоять в представлении уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** как системы сингулярных интегральных уравнений на отрезке [–1,1]. Поэтому, в соответствии с терминологией в теории таких систем [**Ошибка! Источник ссылки не найден.** из [2]], будем говорить, что решение $\varphi(t)$ уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** имеет индекс $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_l), \kappa_m = 1, 0, -1, m = 1, \dots, l$ если оно: не ограничено на обоих концах; не ограничено на одном конце; ограничено на обоих концах отрезка $[A_m, B_m]$. Будем это решение обозначать через $\varphi_k(t)$. Рассмотрим отображение $g_m(\tau)$ отрезка [–1,1] на отрезок $[A_m, B_m]$, где

$$g_m(\tau) = \frac{B_m - A_m}{2}\tau + \frac{B_m + A_m}{2}, \quad m = 1, \dots, l. \qquad (4.57)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \varphi_{\kappa_m}(t) &= \varphi_{\kappa}(t)\big|_{t \in [A_m, B_m]} = \omega_{\kappa_m}(t)\psi_{\kappa,m}(t), \\ f_m(t) &= f(t)\big|_{t \in [A_m, B_m]}, \quad m = 1, \dots, l. \end{aligned} \qquad (4.58)$$

Будем использовать равномерное разбиение на каждом из отрезков $[A_m, B_m], m = 1, \dots, l$. На отрезке $[A_m, B_m]$ выберем каноническое разбиение с шагом h_m множествами $E_m = \{t_{m,k}, k = 1, \dots, n_m\}$ и $E_{m,0} = \{t_{m,0j}, j = 0, 1, \dots, n_m\}, m = 1, \dots, l$. Тогда справедлива

Теорема 4.5. *Пусть функция $f(t) \in H$ на L. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнении*

$$\zeta(-\kappa_m)\gamma_{0n_m}+\sum_{k=1}^{n_m}\frac{\varphi_{\kappa_m,n_m}(t_{m,k})h_m}{t_{m,0j}-t_{m,k}}+\sum_{\substack{p=1\\p\neq m}}^{l}\sum_{k=1}^{n_p}\frac{\varphi_{\kappa_p,n_p}(t_{p,k})h_p}{t_{m,0j}-t_{m,k}}=f_m(t_{m,0j}),$$

$$\sum_{k=1}^{n_m}\zeta(\kappa_m)\varphi_{\kappa_m,n_m}(t_{m,k})h_m=\zeta(\kappa_m)C_m,\quad j=1,\dots,n_m-\kappa_m,\quad m=1,\dots,l, \tag{4.59}$$

и решением $\varphi_\kappa(t)$ *уравнения* **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, *для которого известны значения интегралов по тем отрезкам, составляющим* L, *на которых оно имеет индекс* 1, *выполняется соотношение* **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

Доказательство. С помощью отображений **Ошибка! Источник ссылки не найден.** уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** можно рассматривать как систему l сингулярных интегральных уравнений на $[-1,1]$, которая при соответствующих дополнительных условиях (известно значение интеграла от решения на тех отрезках из L, на которых решение не ограничено на обоих концах, т.е. на которых оно имеет индекс 1) имеет единственное решение. Следовательно, эта система [**Ошибка! Источник ссылки не найден.** из [2]] эквивалентна системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которая также имеет единственное решение. Поэтому, повторив в дискретном виде процесс перехода к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, получим, что система линейных алгебраических уравнений **Ошибка! Источник ссылки не найден.** эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений для этой системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Такой переход возможен в силу того, что разрешимы системы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**– при любом $\kappa=1,0,-1$.

Рассмотрим теперь применение **метода дискретных вихрей для численного решения характеристического сингулярного интегрального уравнения первого рода на отрезке, когда в правой части имеется дельта функция**, т.е. к уравнению

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{t_0-t}=f(t_0)+Q\delta(t_0-q),\ t_0,q\in(-1,1). \tag{4.60}$$

Таким образом, уравнение (60) рассматривается в пространстве обобщенных функций. Используя формулы обращения для уравнений (3.47)-(3.49), соотвтствующие решения уравнения (60) можно записать в виде

$$\varphi(t)=-\frac{1}{\pi^2}R_\kappa(t)\left[\int_{-1}^{1}R_\kappa^{-1}(t_0)\frac{f(t_0)dt_0}{t-t_0}+R_\kappa^{-1}(q)\frac{Q}{t-q}-\nu_\kappa C\pi\right],t,q\in(-1,1), \tag{4.61}$$

где $\nu_1=1$, $\nu_0=\nu_{-1}=0$,

$$R_0(t)=\rho_3(t)=\sqrt{\frac{1-t}{t+1}},\ R_1(t)=\rho_1(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ R_{-1}(t)=R_1^{-1}(t)=\rho_2(t).$$

Напомним, что решение индекса κ=-1 существует при выполнении условия

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(t)+Q\delta(t-q)}{\sqrt{1-t^2}}dt=0. \tag{4.62}$$

Из равенства (62) следует, что если функция $f(t) \in H_\alpha$ на отрезке [-1,1], то решение индекса κ=-1 для уравнения (60) существует при

$$Q = -\sqrt{1-q^2}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\,. \qquad (4.63)$$

Для применения метода дискретных вихрей для численного решения уравнения (60) возьмем на отрезке [-1,1] множества E и E_0, образующие каноническое разбиение этого отрезка, и будем предполагать, что точка $q \in E_0$ при некотором j=j_q, т.е. q= t_{0,j_q}, и введем функцию $\delta_h(t_0 - q)$ по правилу: $\delta_h(t_0-q) = \frac{1}{h}$, $t_0 \in [q-\frac{h}{2}, q+\frac{h}{2}]$, и $\delta_h(t_0-q)$=0, $t_0 \notin [q-\frac{h}{2}, q+\frac{h}{2}]$. Теперь заменим уравнение (61) следующей СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k} = f(t_{0j}) + Q\delta_h(t_{oj}-q)\,,\ j=1,\dots,n\,, \qquad (4.64)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k} = f(t_{0j}) + Q\delta_h(t_{oj}-q)\,,\ j=1,\dots,n-1\,, \qquad (4.65)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_n(t_k)h = C\,,$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k} = f(t_{0j}) + Q\delta_h(t_{oj}-q)\,,\ j=0,1,\dots,n\ . \qquad (4.66)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.6. Пусть функция $f(t) \in H_\alpha$ на отрезке [-1,1]. Тогда между решением $\varphi_n(t_k)$ системы (64), (65) или (66) и решением $\varphi(t)$ уравнения (60) соответственно индекса κ=0,1,-1 выполняется соотношение

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \le \theta_n(t_k)\,,\ k=1,...,n\,, \qquad (4.67)$$

в котором величина $\theta_n(t_k)$ удовлетворяет неравенствам

1) для всех $t_k \in [-1+\delta, q-\delta] \cup [q+\delta, 1-\delta]$, где $\delta > 0$ сколь угодно мало,

$$\theta_n(t_k) \le C_\delta h^{\lambda_1}\,,\ \ \lambda_1 > 0\ , \qquad (4.68)$$

2) для всех точек $t_k \in [-1,1]$

$$\sum_{k=1}^{n}\theta_n(t_k)h \le Ch^{\lambda_2}\,,\ \lambda_2 > 0\,, \qquad (4.69)$$

где C_δ, C - некоторые константы, не зависящие от n.

Доказательство. Так как матрицы систем (64)-(66) такие же как у соответствующих систем (3)-(5), то получаем

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,k}[\sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(\kappa)}\frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,0j}\frac{f(t_{0j})h}{t_k-t_{0j}} + \frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,0j_q}\frac{Q}{t_k - t_{0j_q}}] + \nu_\kappa\frac{1}{h}I^{(n)}_{1,k}C =$$

$$S_{1,n,\kappa}(t_k) + S_{2,n,\kappa}(t_k) + \nu_\kappa\frac{1}{h}I^{(n)}_{1,\kappa}C\,,\ \ k=1,\dots,n\,, \qquad (4.70)$$

где

$$S_{1,n,\kappa}(t_k) = -\frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,k}\sum_{j=1-\zeta(-\kappa)}^{n-\zeta(\kappa)}\frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,0j}\frac{f(t_{0j})h}{t_k-t_{0j}}, S_{2,n,\kappa}(t_k) = -\frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,k}\frac{1}{h}I^{(n)}_{\kappa,0j_q}\frac{Q}{t_k-t_{0j_q}}\,.$$

Запишем теперь решение $\varphi(t)$ в формуле (61) в виде

$$\varphi(t)=\varphi_{1,\kappa}(t)+\varphi_{2,\kappa}(t)+\frac{1}{\pi}R_\kappa(t)\nu_\kappa C\,, \qquad (4.71)$$

где

$$\varphi_{1,\kappa}(t)=-\frac{1}{\pi^2}R_\kappa(t)\left[\int_{-1}^{1}R_\kappa^{-1}(t_0)\frac{f(t_0)dt_0}{t-t_0}\right],\ \varphi_{2,\kappa}(t)=-\frac{1}{\pi^2}R_\kappa(t)R_\kappa^{-1}(q)\frac{Q}{t-q}\,.$$

Теперь рассуждения в теореме 1 показывают, что модуль разности $\varphi_{1,\kappa}(t)$ и $S_{1,n,\kappa}(t_k)$ удовлетворяет соотношению (6), а модуль разности $\varphi_{2,\kappa}(t)$ и $S_{2,n,\kappa}(t_k)$ удовлетворяет соотношению (67). Теорема 6 доказана.

Теперь рассмотрим применение **метода дискретных вихрей для численного решения характеристического гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода на отрезке, когда в правой части имеется дельта функция**, т.е. к уравнению

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{(t_0-t)^2}=f(t_0)+Q\delta(t_0-q)\,,\ t_0,q\in(-1,1)\,. \qquad (4.72)$$

Таким образом, уравнение (72) рассматривается в пространстве обобщенных функций. Используя формулу обращения (3.62) для этого уравнения, получаем

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{t-t_0}{1-tt_0+\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t_0^2}}\right|f(t_0)dt_0+\frac{Q}{\pi}\ln\left|\frac{t-q}{1-tq+\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-q^2}}\right|. \qquad (4.73)$$

Чтобы применить метод дискретных вихрей к численному решению уравнения (72), как и для уравнения (38), пусть множества $E=\{t_\kappa,\kappa=1,\ldots,n\}$ и $E_0=\{t_{oj},j=0,1,\ldots,n\}$ образуют такое разбиение отрезка $[-1,1]$ с шагом h, что $t_k=-1+(k-1)h$, $t_{0j}=t_j+\dfrac{h}{2}$, $k=1,...,n;\ j=1,...,n-1$, $h=\dfrac{2}{n-1}$. и будем предполагать, что точка $q\in E_0$ при некотором j= j_q, т.е. $q=t_{j_q}$, и введем функцию $\delta_h(t_0-q)$ по правилу: $\delta_h(t_0-q)=\dfrac{1}{h}$, $t_0\in[q-\dfrac{h}{2},q+\dfrac{h}{2}]$, и $\delta_h(t_0-q)=0$, $t_0\notin[q-\dfrac{h}{2},q+\dfrac{h}{2}]$. Теперь заменим уравнение (72) следующей СЛАУ

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_n(t_{0k})[\frac{1}{t_{0j}-t_{k+1}}-\frac{1}{t_{0j}-t_k}]=f(t_{0j})+Q\delta_h(t_{0j}-q)\,,\quad j=1,...,n-1\,. \qquad (4.74)$$

Оказывается справедлива следующая теорема.

Теорема 4.7. Пусть функция $f(t)\in H_\alpha$ на отрезке [-1,1]. Тогда между решением системы (74) и решением уравнения (72) выполняется соотношение

$$\left|\varphi(t_{0k})-\varphi_n(t_{0k})\right|\le O(h^{\lambda_3})\,,\ k=1,\ldots,n-1\,,k\ne k_q \qquad (4.75)$$

а так же соотношение

$$\left|\varphi'(t_k)-\frac{\varphi_n(t_{0k})-\varphi_n(t_{0k-1})}{h}\right|\le\theta_n(t_k)\,,\ k=2,\ldots,n-1\,, \qquad (4.76)$$

где полагается $\varphi_n(t_{00})=\varphi_n(t_{0n})=0$, а величина $\theta_n(t_k)\,,k=2,\ldots,n-1$, удовлетворяет соотношению (67) для $k=2,\ldots,n-1$.

Для доказательства теоремы 7 надо воспользоваться доказательством теоремы 3 с учетом специфики правой части уравнения (72) и рассуждениями при доказательстве теоремы 6.

Рассмотрим теперь применение **метода дискретных вихрей для численного решения характеристического сингулярного интегрального уравнения первого рода на отрезке, когда в правой части имеется функция, имеющая в некоторой точке отрезка особенность типа 1/x**. Конкретно рассмотрим уравнение

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{t_0-t}=\frac{1}{t_0-q}\,,\ t_0,q\in(-1,1)\,. \tag{4.77}$$

Ясно, что решением этого уравнения будет функция $\varphi(t)=\delta(t-q)$, $t\in(-1,1)$. Если мы желаем рассматривать для уравнения (77) решения индекса $\kappa=0,1,-1$, то дельта функцию надо рассматривать как произведение $R_\kappa(t)\psi_\kappa(t)$, $R_0(t)=\rho_3(t)=\sqrt{\dfrac{1-t}{t+1}}$, $R_1(t)=\rho_1(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $R_{-1}(t)=R_1^{-1}(t)=\rho_2(t)$, где функция $\psi_\kappa(t)$ является элементом соответствующего пространства $S^{'}(L_{2,R_\kappa})$ обобщенных функций, а правую часть в (77) надо рассматривать как элемент пространства $S^{'}(L_{2,R_\kappa^{-1}})$ обобщенных функций. Заметим, что для уравнения (77) существует решение индекса -1, так как верно равенство

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(t-q)}=0\,,\ q\in(-1,1)\,, \tag{4.78}$$

а общее решение индекса 1 задается формулой

$$\varphi(t)=\delta(t-q)+\frac{C}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,. \tag{4.79}$$

Численное решение уравнения (77) рассмотрим в случае индекса 1 как наиболее интересным с точки зрения приложений. Возьмем на отрезке [-1,1] множества E и E_0, образующие каноническое разбиение этого отрезка, и будем предполагать, что точка $q\in E$ при некотором k=k_q, т.е. q= t_{k_q}. Заменим уравнение (77) следующей системой

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(t_k)h}{t_{0j}-t_k}=\frac{1}{t_{0j}-q}\,,\ j=1,...,n-1\,, \tag{4.80}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_n(t_k)h=1+C\,.$$

Для упрощения рассуждений возьмем С=-1. Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$\varphi_n(t_k)=-\frac{1}{h}I_{1,k}^{(n)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(n)}\,\frac{h}{(t_k-t_{0j})(t_{0j}-q)}\,. \tag{4.81}$$

Запишем последнюю формулу в виде

$$\varphi_n(t_k)=-\frac{1}{h}I_{1,k}^{(n)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(n)}\frac{1}{t_k-q}\left(\frac{h}{t_k-t_{0j}}-\frac{h}{q-t_{0j}}\right),\ k\neq k_q, t_{k_q}=q, \tag{4.82}$$

$$\varphi_n(t_{k_q})=\frac{1}{h}I_{1,k_q}^{(n)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(n)}\frac{h}{(t_{0j}-q)^2}. \tag{4.83}$$

Перепишем формулу (82) в виде

$$\varphi_n(t_k)=-\frac{1}{h}I_{1,k}^{(n)}\frac{1}{t_k-q}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{h}I_{1,0j}^{(n)}\left(\frac{h}{t_k-t_{0j}}-\frac{h}{q-t_{0j}}\right),\ k\neq k_q, t_{k_q}=q.$$

Теперь из формул (25) и (26) и равенства [1]

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{\sqrt{1-t_0^2}\,dt_0}{t-t_0}=t,\ t\in(-1,1), \tag{4.84}$$

Следует, что

$$\varphi_n(t_k)=-\frac{1}{\pi\sqrt{1-t_k^2}}+\theta_n(t_k),\ \ k\neq k_q, t_{k_q}=q, \tag{4.85}$$

где величина $\theta_n(t_k)$ удовлетворяет неравенствам (68) и (69).

Теперь рассмотрим равенство (83). Используя равенство [262 из [2]]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8} \tag{4.86}$$

можно доказать, что

$$\varphi_n(t_{k_q})=\frac{1}{h}+O(1). \tag{4.87}$$

Введем теперь функцию $\varphi_n^{\bullet}(t)$, $t\in(-1,1)$, по правилу $\varphi_n^{\bullet}(t)=\varphi_n(t_{k_q})$, $t\in(q-\frac{h}{2},q+\frac{h}{2})$, $\varphi_n^{\bullet}(t)=\ \varphi_n(t_k)$, $t\in(t_{0k-1},t_{0k})$. Тогда проведенные выше рассуждения показывают, что в смысле обобщенных функций, имеем соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{\bullet}(t)=\varphi(t)=\delta(t-q)-\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}. \tag{4.88}$$

Наконец рассмотрим применение **метода дискретных вихрей для численного решения характеристического гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода на отрезке, когда в правой части имеется функция, имеющая в некоторой точке отрезка особенность типа 1/x**. Конкретно рассмотрим уравнение

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)dt}{(t_0-t)^2}=\frac{1}{t_0-q},\ t_0,q\in(-1,1). \tag{4.89}$$

Используя решение (3.79) для уравнения (3.74), получим, что решение уравнения (89) будет задаваться по формуле

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\arcsin t+\frac{1}{2}-F(\delta(t-q)) \tag{4.90}$$

где $F(\delta(t-q))$=0, при $0\le t<q$, $F(\delta(xt-q))=\frac{1}{2}$, при t=q, $F(\delta(t-q))$=1, при $q<t\le 1$.

Чтобы применить метод дискретных вихрей к численному решению уравнения (89), как и для уравнения (38), пусть множества $E=\{t_\kappa,\kappa=1,\ldots,n\}$ и $E_0=\{t_{oj}, j=0,1,\ldots,n\}$ образуют такое разбиение отрезка $[-1,1]$ с шагом h, что $t_k=-1+(k-1)h$, $t_{0j}=t_j+\frac{h}{2}$, $k=1,...,n; j=1,...,n-1$, $h=\frac{2}{n-1}$, и будем предполагать, что точка $q\in E$ при некотором k=k_q, т.е. $q=$ t_{k_q}. Заменим теперь уравнение (89), как и уравнение (38), системой

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_n(t_{0k})[\frac{1}{t_{0j}-t_{k+1}}-\frac{1}{t_{0j}-t_k}]=\frac{1}{t_{0j}-q},\quad j=1,...,n-1. \tag{4.91}$$

Повторяя теперь в дискретном виде процесс получения решения уравнения (3.74) и доказательство сходимости численного решения к точному для уравнения (77), получим, что, в смысле сходимости обобщенных функций, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\varphi}_n(t)=-\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{t}\varphi_n^\bullet(\tau)d\tau=\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\arcsin t+\frac{1}{2}-F(\delta(t-q)), \tag{4.92}$$

где $\varphi_n^\bullet(t)$ это та функция, которая имеется в формуле (88).

Замечание 4.3. Чтобы говорить о скорости сходимости в пространствах обобщенных функций, надо рассматривать эти уравнения в паре соответствующих пространств H_ρ^λ. Например, если ввести функцию $g(t)=\frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}}$, то уравнение (89) относительно функции $g(t)$ надо рассматривать в паре пространств $H_{\rho_2}^\lambda$ и $H_{\rho_2}^{\lambda-1}$ для $\lambda<\frac{1}{2}$, так как правая часть этого уравнения лежит в любом пространстве $H_{\rho_2}^\lambda$, $\lambda<-\frac{1}{2}$. Действительно, будем рассматривать функцию $f(t)=\frac{1}{t-q}$ как элемент пространства $S'(L_{2,\rho_2})$, тогда

$$f(t)=\frac{1}{t-q}=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n)U_n^\bullet(t),\ \hat{f}(n)=\int_{-1}^{1}\rho_2(t)f(t)U_n^\bullet(t)dt=$$

$$(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}U_n(t)dt}{t-q})\sqrt{2\pi}=-\sqrt{2\pi}T_{n+1}(q)=-\sqrt{2\pi}\cos((n+1)\arccos q),\ \text{n}=0,1,\ldots \tag{4.93}$$

Из формулы (93) следует, что для любого $\lambda<-\frac{1}{2}$ функция

$$f^\bullet(t)=\sum_{n=0}^{\infty}n^\lambda\hat{f}(n)U_n^\bullet(t) \tag{4.94}$$

принадлежит пространству L_{2,ρ_2}.

Обратимся теперь к рассмотрению метода дискретных вихрей для особых интегральных уравнений в периодическом случае.

Вначале рассмотрим **применение метода дискретных вихрей к численному решению характеристического сингулярного интегрального уравнения первого рода на окружности,** т.е. к уравнению

$$\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t_0 - t} = f(t_0), \tag{4.95}$$

в котором L является окружностью радиуса единица с центром в начале координат. Пусть множества $E = \{t_k, k = 1,\dots,n\}$ и $E_0 = \{t_{0j}, j = 1,\dots,n\}$ образуют каноническое разбиение окружности. т.е. точки t_k разбивают окружность на равные части, а точка t_{0j} является серединой дуги между точками t_j и t_{j+1}. Справедлива следующая

Теорема 4.8. *Пусть функция $f(t) \in H$ на L. Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_n(t_k)a_k}{t_{0j} - t_k} = f(t_{0j}), \quad j = 1,\dots,n, \tag{4.96}$$

где $a_k = t_{k+1} - t_k$, $t_{n+1} = t_1$, и решением уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** (см. [1])

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\pi^2}\int_L \frac{f(t_0)dt_0}{t - t_0} \tag{4.97}$$

выполняется соотношение

$$|\varphi(t_k) - \varphi_n(t_k)| \le \theta(t_k), \quad k = 1,\dots,n, \tag{4.98}$$

в котором величина $\theta(t_k)$ удовлетворяет неравенству

$$\theta(t_k) \le O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right), \quad 0 < \lambda \le 1. \tag{4.99}$$

Доказательство. Система **Ошибка! Источник ссылки не найден.** совпадает с системой **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, если в последней заменить *h* на a_k. Поэтому те же рассуждения дадут

$$\varphi_n(t_k) = -\frac{1}{a_k} I_{0,k}^{(n)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b_j} I_{0,0j}^{(n)} \frac{f(t_{0j})b_j}{t_k - t_{0j}}, \tag{4.100}$$

где $b_j = t_{0j+1} - t_{0j}, \quad k = 1,\dots,n, \quad t_{0n+1} = t_{01}$.

Так как теперь *L*– окружность, то к изучению множителей $I_{0,k}^{(n)}$ и $I_{0,0j}^{(n)}$ придется подойти иначе, нежели в теореме **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Напомним, что

$t_k = e^{i\theta_k}, \quad t_{0k} = e^{i(\theta_k + \pi/n)} = e^{i\theta_{0k}}, \quad k = 1,\dots,n$.

Поэтому можно написать

$$I_{0,k}^{(n)} = \frac{\prod_{m=1}^{n}(t_{0m} - t_k)}{\prod_{\substack{m=1\\m\ne k}}^{n}(t_m - t_k)} = -t_k \frac{\prod_{m=1}^{n}[1 - e^{i(\theta_{0m} - \theta_k)}]}{\prod_{\substack{m=1\\m\ne k}}^{n}[1 - e^{i(\theta_m - \theta_k)}]} = -t_k \frac{P_{2,k}^{(n)}}{P_{1,k}^{(n)}}. \tag{4.101}$$

Так как точки $t_k, k = 1,\dots,n$, разбивают окружность L на равные части, а t_{0k} является серединой дуги (t_{k+1}, t_k), то $\theta_m - \theta_k = 2\pi(m-k)/n$, $\theta_{0m} - \theta_k = 2\pi(m-k)/n + \pi/n$. Вводя теперь перенумерацию, с учетом периодичности функции $e^{i\theta}$ можно написать

$$P_{1,k}^{(n)}=\prod_{m=1}^{n-1}(1-e^{im\cdot 2\pi/n}),\quad P_{2,k}^{(n)}=\prod_{m=0}^{n-1}(1-e^{i(\pi/n+m\cdot 2\pi/n})\,.$$

Для вычисления $P_{1,k}^{(n)}$ заметим, что числа $e^{im\cdot 2\pi/n}$, $m=0,1,\ldots,n-1$, являются корнями n-й степени из числа $z=1$, т.е.

$$z^n-1=\prod_{m=0}^{n-1}(z-e^{im\cdot 2\pi/n})=(z-1)\prod_{m=1}^{n-1}(z-e^{im\cdot 2\pi/n})$$

или

$$\frac{z^n-1}{z-1}=z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+1=\prod_{m=1}^{n-1}(z-e^{im\cdot 2\pi/n})\,.$$

Последнее равенство есть тождество. Поэтому, устремляя z к единице, в пределе получим

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^n-1}{z-1}=n=P_{1,k}^{(n)}\,. \tag{4.102}$$

Для вычисления $P_{2,k}^{(n)}$ заметим, что числа $e^{i(\pi/n+m\cdot 2\pi/n)}$, $m=0,1,\ldots,n-1$, являются корнями n-й степени из числа $z=-1$, т.е.

$$z^n+1=\prod_{m=0}^{n-1}(z-e^{i(\pi/n+m\cdot 2\pi/n)})\,.$$

Последнее равенство верно при любом z, поэтому при $z=1$ получаем

$$P_{2,k}^{(n)}=2\,. \tag{4.103}$$

Формулы – **Ошибка! Источник ссылки не найден.** показывают, что

$$I_{0,k}^{(n)}=-t_k\frac{2}{n}\,, \tag{4.104}$$

$$\frac{1}{a_k}I_{0,k}^{(n)}=\frac{1}{t_{k+1}-t_k}(-t_k)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\frac{1}{1-e^{i2\pi/n}}=$$

$$=\frac{1}{n\sin\pi/n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+i\cos\frac{\pi}{n}\right)=i\frac{1}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналогично можно показать, что

$$I_{0,0j}^{(n)}=t_{0j}\frac{2}{n},\quad \frac{1}{b_j}I_{0,0j}^{(n)}=-i\frac{1}{\pi}+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.105}$$

Из формул **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** следует, что

$$\varphi_n(t_k)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(t_{0j})b_j}{t_k-t_{0j}}+\sum_{j=1}^{n}O\left(\frac{1}{n}\right)\frac{f(t_{0j})b_j}{t_k-t_{0j}}\,. \tag{4.106}$$

Учитывая теперь результаты для квадратурных формул метода дискретных вихрей на окружности [1] , видим справедливость теоремы **Ошибка! Источник ссылки не найден.**8.

Используя теперь рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 8, можно рассмотреть **применение метода дискретных вихрей к численному решению характеристического интегрального уравнения с ядром Гильберта первого рода**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ctg\frac{\theta_0-\theta}{2}\varphi(\theta)d\theta=f(\theta_0)\,. \tag{4.107}$$

Выберем на отрезке $[0,2\pi]$ точки $\theta_k, k=1,\dots,n$, которые, интерпретируемые как точки единичной окружности *L*, разбивают ее на *n* равных частей; θ_{0k}, $k=1,\dots,n$, делит пополам дугу (θ_k,θ_{k+1}).

Напомним , что уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** имеет решение только при условии

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0, \tag{4.108}$$

которое и будем считать выполненным. Для выделения единственного решения надо задать значение решения в некоторой точке либо значение интеграла от решения (последнее более часто встречается в приложениях).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.9. *Пусть функция* $f(t)\in H$ *на* $[0,2\pi]$, $f(0)=f(2\pi)$, *и для нее выполняется равенство* **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. *Тогда между решением системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{gathered}\gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} ctg\frac{\theta_{0m}-\theta_k}{2}\varphi_n(\theta_k)\frac{2\pi}{n} = f(\theta_{0m}), \quad m=1,\dots,n,\\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\varphi_n(\theta_k)\frac{2\pi}{n} = C\end{gathered} \tag{4.109}$$

и решением $\varphi(\theta)$ *уравнения* **Ошибка! Источник ссылки не найден.***,* *задаваемым формулой* (см. (1.22))**Ошибка! Источник ссылки не найден.**

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\theta_0-\theta}{2} f(\theta_0)d\theta_0 + C \tag{4.110}$$

при условии

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta = C, \tag{4.111}$$

выполняется соотношение

$$\left|\varphi(\theta_k)-\varphi_n(\theta_k)\right| \le O(n^{-\lambda}\ln n), \tag{4.112}$$

где $\lambda=\alpha\in(0,1]$, *если n произвольно и* $f(\theta)\in H(\alpha)$, $\lambda=r+\alpha$, *если n нечетно и* $f^{(r)}(\theta)\in H(\alpha)$.

Доказательство. Просуммировав первые *n* уравнений в системе **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и учитывая равенство **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получим

$$\gamma_{0n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n} f(\theta_{0m})\frac{2\pi}{n}. \tag{4.113}$$

Отсюда следует, что $\gamma_{0n}\to 0$ при $n\to\infty$ тогда и только тогда, когда уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** имеет решение.

Идея дальнейших рассуждений состоит в сведении системы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** к системе вида **Ошибка! Источник ссылки не найден.** для уравнения на окружности с помощью равенства

$$\frac{it_k}{t_k-t_0} = \frac{1}{2}ctg\frac{\theta_k-\theta_{0m}}{2} + \frac{1}{2}i. \tag{4.114}$$

Умножим последнее равенство в системе **Ошибка! Источник ссылки не найден.** на ($-i$) и прибавим ко всем первым n уравнениям. Учитывая равенство **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получим после умножения обеих частей на π

$$-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_n(\theta_k)\frac{2\pi}{n}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}ctg\frac{\theta_{0m}-\theta_k}{2}\varphi_n(\theta_k)\frac{2\pi}{n}=$$
$$=\left[\pi f(\theta_{0m})-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f(\theta_{0k})\frac{2\pi}{n}\right]-i\pi C,\quad m=1,\ldots,n,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\phi_n(t_k)a_k}{t_{0m}-t_k}=\hat{f}(t_{0m}),\quad m=1,\ldots,n, \qquad (4.115)$$

где $t_k=e^{i\theta_k}$, $t_{0m}=e^{i\theta_{0m}}$,

$\phi_n(t_k)=\varphi_n(\theta_k)$, $a_k=2\pi i t_k/n$, $\hat{f}(t_{0m})=\left[\pi f(\theta_{0m})-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f(\theta_{0k})\frac{2\pi}{n}\right]-i\pi C$.

Система **Ошибка! Источник ссылки не найден.** совпадает с системой **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, и поэтому ее решение дается формулой **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. В силу равенств **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** получаем

$$\phi_n(t_k)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{n}\frac{\hat{f}(t_{0m})b_m}{t_k-t_{0m}}, \qquad (4.116)$$

где $b_m=2\pi i t_{0m}/n$.

Таким образом, опять воспользовавшись равенствами

$$\sum_{m=1}^{n}ctg\frac{\theta_{0m}-\theta_k}{2}=0,\ \text{k=1,…n}$$

и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, имеем

$$\varphi_n(\theta_k)=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{2}ctg\frac{\theta_k-\theta_{0m}}{2}-\frac{i}{2}\right)\left\{\left[\pi f(\theta_{0m})-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}f(\theta_{0k})\frac{2\pi}{n}\right]-i\pi C\right\}\frac{2\pi}{n}=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n}ctg\frac{\theta_k-\theta_{0m}}{2}f(\theta_{0m})\frac{2\pi}{n}+C. \qquad (4.117)$$

Сравнивая формулы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, и учитывая свойства квадратурных формул метода дискретных вихрей интеграла с ядом Гильберта [1], видим справедливость теоремы.

Обсудим еще **вопрос применения метода дискретных вихрей к численному решению характеристического интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью в периодическом случае**, т.е. к уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right|g(\theta)d\varphi\theta=f(\theta_0),\ \theta_0\in[0,2\pi]. \qquad (4.118)$$

Как было показано в п.3, уравнение (118) имеет единственное решение для любой правой части из пространства обобщенных функций $S^{'}(L_2)$ и эквивалентно в смысле разыскания решения системе равенств

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\theta_0-\theta}{2}g(\theta)d\theta = f^{'}(\theta_0),\quad \theta_0\in[0,2\pi], \tag{4.119}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = -\frac{1}{4\pi\ln 2}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta .$$

Теперь в силу теоремы 9 для численного решения уравнения (118) по методу дискретных вихрей надо взять СЛАУ

$$\begin{gathered}\gamma_{0n} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} ctg\frac{\theta_{0m}-\theta_k}{2}g_n(\theta_k)\frac{2\pi}{n} = f^{'}(\theta_{0m}),\quad m=1,\ldots,n,\\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} g_n(\theta_k)\frac{2\pi}{n} = -\frac{1}{4\pi\ln 2}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta\end{gathered} \tag{4.120}$$

Теорема 9 дает оценку близости в точках θ_k между решением уравнения (118) и решением системы (120).

Теорема 9 дает возможность рассмотреть так же **применение метода дискретных вихрей к численному решению характеристического гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода в периодическом случае**, т.е. к уравнению

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\varphi}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_0-\theta}{2}}g(\theta)d\theta = f(\theta_0),\theta_0,q\in[0,2\pi], \tag{4.121}$$

где функция $f(\theta_0)$ принадлежит множеству H_α на отрезке [0,2 π].

Уравнение (121), как и уравнение (107), имеет решение с точностью до константы, а условием существования решения является равенство (108). Поэтому, по аналогии с уравнением (107), для уравнения (121) методе дискретных вихрей применяют следующим образом. На отрезке [0,2 π] берем два множества точек $E=\{\theta_k, k=1,...,n\}$ и $E_0=\{\theta_{0j,}, j=1,...,n\}$, где точки $\theta_k, k=1,\ldots,n$, которые, интерпретируемые как точки единичной окружности *L*, разбивают ее на *n* равных частей; θ_{0k} , $k=1,\ldots,n$, делит пополам дугу (θ_k,θ_{k+1}).

Теперь уравнение (121) заменяем СЛАУ

$$\gamma_{0n} + \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n} g_n(\theta_{0k})\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}\frac{d\theta}{\sin^2\frac{\theta_{0j}-\theta}{2}} = f(\theta_{0j}),\ \text{j=1,…,n}, \tag{4.122}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} g_n(\theta_{0k})h = C ,$$

где $\theta_{n+1}=\theta_1$.

Интегрируя интегралы в системе (122) запишем ее в виде

$$\gamma_{0n}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}g_n(\theta_{0k})(ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_{k+1}}{2}-ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_k}{2})=f(\theta_{0j}),\ \text{j=1,…,n,}\quad(4.123)$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}g_n(\theta_{0k})h=C.$$

Система (123) эквивалентным образом может быть записана в виде

$$\gamma_{0n}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_k}{2}(-g_n^{'}(\theta_k)\frac{2\pi}{n}=f(\theta_{0j}),\ \text{j=1,…,n,}\qquad(4.124)$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}(-g_n^{'}(\theta_k))\frac{2\pi}{n}=0,\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}g_n(\theta_{0k})h=C,$$

где $$g_n^{'}(\theta_k)=\frac{g_n(\theta_{0k})-g_n(\theta_{0k-1})}{2\pi/n},\ g_n(\theta_{00})=g_n(\theta_{0n}).$$

Действительно, первые n+1 уравнений в (124) совпадают с системой (109) относительно переменных $-g_n^{'}(\theta_k)$. Поэтому она имеет единственное решение относительно этих переменных. Следовательно, величины $g_n(\theta_{0k}), k=1,...,n$, представляются в виде $g_n(\theta_{0k})=\lambda_{n,k}+g_n(\theta_{0n}), k=1,...,n$, где $\lambda_{n,k}$ - известные числа, и поэтому из последнего уравнения системы (124) найдем $g_n(\theta_{0n})$, а значит и все остальные величины $g_n(\theta_{0k}), k=1,...,n-1$. Теперь из приведенных рассуждений и теоремы 9 получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 4.10. Пусть в уравнении (121) функция $f(\theta_0)$ принадлежит множеству H_α на отрезке $[0,2\pi]$ и удовлетворяет равенству (108). Тогда между решением уравнения (121), удовлетворяющего равенству (111), и решением системы (123) выполняются неравенства

$$\left|g(\theta_{0k})-g_n(\theta_{0k})\right|\le O_1(\frac{1}{n^{\lambda_1}}),\ k=1,...,n,\qquad(4.125)$$

$$\left|g^{'}(\theta_k)-g_n^{'}(\theta_k)\right|\le O_2(\frac{1}{n^{\lambda_2}}),\ k=1,...,n,\qquad(4.126)$$

где $0<\lambda_1,\lambda_2\le 1$.

Рассмотрим теперь **применение метода дискретных вихрей для особых интегральных уравнений в случае, когда в правой части имеется**

дельта функция. Начнем с уравнения (3.63) **с ядром Гильберта**, т.е с уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\theta_o-\theta}{2}g(\theta)d\theta=\delta(\theta_0-q)-\frac{1}{2\pi},\theta_0,q\in[0,2\pi], \tag{4.127}$$

которое имеет решение

$$g(\theta)=-\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta-q}{2}+\frac{C}{2\pi}. \tag{4.128}$$

Возьмем на отрезке $[0,2\pi]$ два множества точек $E=\{\theta_k,k=1,...,n\}$ и $E_0=\{\theta_{0j,}j=1,...,n\}$, как для уравнения (121), и будем полагать, что $q=\theta_{0j_q}$. Теперь уравнение (127) заменим СЛАУ

$$\gamma_{0n}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_k}{2}g_n(\theta_k)\frac{2\pi}{n}=\delta_h(\theta_{0j})-\frac{1}{2\pi},\ \text{j=1,…,n}, \tag{4.129}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} g_n(\theta_k)h=C,$$

где функция $\delta_h(\theta_{0j})$ определена сразу после формулы (3.71). Поскольку левая часть системы (129) совпадает с левой частью системы (109), то (см. (117))

$$g_n(\theta_k)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} ctg\frac{\theta_k-\theta_{0j}}{2}(\delta_h(\theta_{0j})-\frac{1}{2\pi})\frac{2\pi}{n}+C,k=1,...,n. \tag{4.130}$$

В силу определения функции $\delta_h(\theta_{0j})$ и равенства

$$\sum_{j=1}^{n} ctg\frac{\theta_k-\theta_{0j}}{2}\frac{2\pi}{n}=0,$$

окончательно получаем равенство

$$g_n(\theta_k)=-\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta_k-q}{2}+C. \tag{4.131}$$

Из сравнения формул (128) и (131) видим соотношение между точным и численным решениями.

Рассмотрим еще **гиперсингулярное интегральное уравнение в периодическом случае, когда в правой части имеется дельта функция**

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_0-\theta}{2}}g(\theta)d\theta=\delta(\theta_0-q)-\frac{1}{2\pi},\theta_0,q\in[0,2\pi], \tag{4.132}$$

Используя множества $E=\{\theta_k, k=1,...,n\}$ и $E_0=\{\theta_{0j,} j=1,...,n\}$, как для уравнения (127), для численного решения уравнения (132) надо взять СЛАУ

$$\gamma_{0n}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} g_n(\theta_{0k})(ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_{k+1}}{2}-ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_k}{2})=\delta(\theta_{0j}-q)-\frac{1}{2\pi}, \text{ j=1,…,n,} \qquad (4.133)$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} g_n(\theta_{0k})h=C.$$

Рассмотрим еще **применение метода дискретных вихрей для особых интегральных уравнений в случае, когда в правой части имеется функция** $\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta_0-q}{2}$**.** Начнем с **уравнения ядром Гильберта**

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\theta_o-\theta}{2}g(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta_0-q}{2}, \ \theta_0, q\in[0,2\pi]. \qquad (4.134)$$

Ясно, что решением уравнения (134) является функция

$$g(\theta)=\delta(\theta-q)-\frac{1}{2\pi}+C, \theta, q\in[0,2\pi]. \qquad (4.135)$$

Для численного решения уравнения (134) возьмем на отрезке $[0,2\pi]$ два множества точек $E=\{\theta_k, k=1,...,n\}$ и $E_0=\{\theta_{0j,} j=1,...,n\}$, как для уравнения (121), и будем полагать, что $q=\theta_{k_q}$, т.е. $q\in E$. Нам удобно будет полагать, что $q\in(0,2\pi)$. Теперь заменим уравнение (134) СЛАУ

$$\gamma_{0n}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_k}{2}g_n(\theta_k)\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta_{0j}-q}{2}, \text{ j=1,…,n,} \qquad (4.136)$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} g_n(\theta_k)h=C.$$

В силу симметрии точек $\theta_{0j}, j=1,...,n$, по отношению к любой точке $\theta_k, k=1,...,n$, просуммировав первые n уравнений системы (136), получим равенство

$$\gamma_{0n}=0.$$

Поскольку левая часть системы (136) совпадает с левой частью системы (109), то (см. (117))

$$g_n(\theta_k)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} ctg\frac{\theta_k-\theta_{0j}}{2}(\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta_{0j}-q}{2})\frac{2\pi}{n}+C=S_{n,k}+C, k=1,...,n. \qquad (4.137)$$

Для вычисления суммы $S_{n,k}$ используем формулу

$$ctg\frac{\theta-\theta_0}{2}ctg\frac{\theta_0-q}{2}=-ctg\frac{\theta-q}{2}(ctg\frac{\theta_0-\theta}{2}-ctg\frac{\theta_0-q}{2})+1$$

при $\theta\neq q$, в силу которой имеем

$$S_{n,k}=\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta_k-q}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}(ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_k}{2}-ctg\frac{\theta_{0j}-q}{2})\frac{2\pi}{n}-\frac{1}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi},\ k\neq k_q. \quad (4.138)$$

При $k=k_q$, т.е. $\theta_k=\theta_{k_q}=q$, имеем

$$S_{n,k_q}=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}ctg^2\frac{\theta_{0j}-\theta_{k_q}}{2}\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_{0j}-\theta_{k_q}}{2}}-1)\frac{2\pi}{n}= \quad (4.139)$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_{0j}-\theta_k}{2}}\frac{2\pi}{n}-\frac{1}{2\pi},\ k=k_q.$$

Из выражений (138), (139) следует, что сумму $S_{n,k}$ можно представить в виде

$$S_{n,k}=-\frac{1}{2\pi}+\delta_{n,k},\ k=1,...,n,$$

$$\delta_{n,k}=0,\ k\neq k_q,\ \delta_{n,k_q}=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_{0j}-\theta_{k_q}}{2}}\frac{2\pi}{n},\ k=k_q.$$

Покажем, что последовательность функций $\hat{\delta}_{n,k}(\theta)=\delta_{n,k}$, $\theta\in(\theta_{0k-1},\theta_{0k})$, $k=1,...,n$, где полагаем $\theta_{00}=\theta_{0n}$, сходится к функции $\delta(\theta-q)$. Действительно, имеем

$$\delta_{n,k_q}=\frac{n}{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_{0j}-\theta_{k_q}}{2}}\frac{4\pi^2}{n^2}=nO(1)\to+\infty \text{ при } n\to\infty,$$

где через O(1) обозначена величина порядка 1, т.е. ограниченная величина.

Далее, так как

$$\frac{x^2}{\sin^2 x}-1=\frac{x^2-\sin^2 x}{\sin^2 x}=O(x^2)$$

при $x\to 0$, то, учитывая известное равенство [1, с. 334]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

получаем, что

$$\int_0^{2\pi}\hat{\delta}_{n,k}(\theta)d\theta=\sum_{k=1}^{n}\int_{\theta_{0k-1}}^{\theta_{0k}}\hat{\delta}_{n,k}(\theta)d\theta=\sum_{k=1}^{n}\delta_{n,k}\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_{0j}-\theta_{k_q}}{2}}\frac{4\pi^2}{n^2}=1+O(\frac{1}{n}).$$

Введем теперь функцию $g_n^{\bullet}(\theta)=g_n(\theta_k),\theta\in(\theta_{0k-1},\theta_{0k})$, $k=1,...,n$. Тогда проведенные выше рассуждения показывают справедливость следующей теоремы.

Теорема 4.11. Для решения $g(\theta)$ уравнения (134), определяемого формулой (135), и функции $g_n^{\bullet}(\theta)$, получаемой из решения $g_n(\theta_k)$, $k=1,...,n$, системы (136), выполняются соотношения

$$\left|g(\theta_k)-g_n^{\bullet}(\theta_k)\right|=\left|g(\theta_k)-g_n(\theta_k)\right|=0,\ k=1,...,n,\ k\neq k_q, \tag{4.140}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\theta_{0k-1}}^{\theta_{0k}}g(\theta)d\theta-\int_{\theta_{0k-1}}^{\theta_{0k}}g_n^{\bullet}(\theta)d\theta\right|\le O(\frac{1}{n}). \tag{4.141}$$

Наконец рассмотрим **гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода**

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_0-\theta}{2}}g(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta_0-q}{2},\ \theta_0,q\in[0,2\pi]. \tag{4.142}$$

Для численного решения уравнения (142) надо взять множества E и E_0, как и для системы (136), и взять следующую СЛАУ

$$\gamma_{0n}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}g_n(\theta_{0k})(ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_{k+1}}{2}-ctg\frac{\theta_{0j}-\theta_k}{2})=\frac{1}{2\pi}ctg\frac{\theta_{0j}-q}{2},\ \text{j=1,…,n}, \tag{4.143}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}g_n(\theta_{0k})h=C.$$

Исследовать систему (143) надо так же как систему (123) с учетом особенности правой части.

В заключение рассмотрим **метод дискретных вихрей численного решения задачи обтекания кусочно-гладкого простого контура.** Исторически метод дискретных вихрей был вначале построен для циркуляционного и без циркуляционного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью гладкого разомкнутого контура. Математическое обоснование этого метода, в этом случае, было дано в монографии Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, М., Наука, 1985, 256 с. Однако потребности практики побудили авторов указанной монографии со своими учениками, на основе численного эксперимента и сравнении результатов этих экспериментов с результатами физических экспериментов, распространить этот метод на широкий класс контуров. Однако математического обоснования в этом общем случае пока нет. Решение этой задачи было бы хорошим трамплином для молодого математика в численных методах.

Пусть контур L обтекаемого профиля задается параметрически: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [0,l]$, и он находится в стационарном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Выполняя условие не протекания в точках $M_0(x_0, y_0) = M_0(x(t_0), y(t_0))$ контура L, приходим к уравнению (см. **Ошибка! Источник ссылки не найден.**)

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{x'_{0,t}(x_0 - x) + y'_{0,t}(y_0 - y)}{\sqrt{x'^2_{0,t} + y'^2_{0,t}} \cdot r^2_{MM_0}} \gamma(t)\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt = -\overline{U}_0 \overline{n}_{M_0} = f(t_0)\,. \qquad (4.144)$$

Если *контур L является гладким разомкнутым*, то уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** является сингулярным интегральным уравнением первого рода на отрезке вида **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, и, следовательно, *метод дискретных вихрей* в этом случае *строится следующим образом.* На отрезке $[0,l]$ параметра l берут каноническое разбиение, состоящее из множеств: $E = \{t_k, k = 1,\ldots,n\}$, $t_k = kh, \quad k = 1,\ldots,n, \quad h = l/(n+1)$, и $E_0 = (t_{0m}, m = 0,1,\ldots,n\}$, $t_{0m} = t_m + h/2, \quad m = 0,1,\ldots,n$. В точках $M_k = (x_k, y_k)$, $k = 1,\ldots,n$, $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$ контура L помещаем дискретные вихри интенсивности Γ_k, а точки $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$, $m = 0,1,\ldots,n$, $x_{0m} = x(t_{0m})$, $y_{0m} = y(t_{0m})$ берем расчетными. Теперь также как для тонкого слабоизогнутого профиля, т.е. для уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.**) в зависимости от рассматриваемой задачи: циркуляционной, бесциркуляционной или безударной (если она осуществима), уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** заменяем соответственно системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m = 1,\ldots,n\,, \qquad (4.145)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m = 1,\ldots,n-1, \\ &\sum_{k=1}^{n} \Gamma_k = 0, \quad m = n, \end{aligned}\right. \qquad (4.146)$$

$$\gamma_{0n} + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \omega_k^m = f_m, \quad m = 0,1,\ldots,n\,, \qquad (4.147)$$

где

$$\omega_k^m = -\frac{1}{2\pi}\frac{x'_{0m,t}(x_{0m}-x_k)+y'_{0m,t}(y_{0m}-y_k)}{\sqrt{x'^2_{0m,t}+y'^2_{0m,t}}\cdot r^2_{M_k M_{0m}}},$$

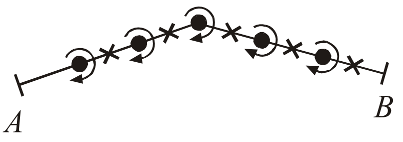
$$r^2_{M_k M_{0m}} = (x_{0m}-x_k)^2+(y_{0m}-y_k)^2, \quad f_m = -\overline{U}(M_{0m})\overline{n}_{M_{0m}}.$$

Система **Ошибка! Источник ссылки не найден.** дает решение уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, неограниченное на кромке профиля, соответствующей значению параметра $t=0$. Признаком существования безударного обтекания является стремление к нулю при $n\to\infty$ регуляризирующей переменной γ_{0n}.

В рассматриваемом случае теорема 1 дает математическое обоснование метода дискретных вихрей для гладкого разомкнутого профиля, описываемого системами **Ошибка! Источник ссылки не найден.**–**Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Эти системы получаются из выполнения условия не протекания от системы дискретных вихрей и набегающего потока в расчетных точках, выбор которых диктуется Б-условием метода дискретных вихрей [1].

Замечание 4.3. После решения систем **Ошибка! Источник ссылки не найден.**–**Ошибка! Источник ссылки не найден.** можно находить все аэродинамические характеристики обтекаемого профиля, используя в дискретном виде соответствующие формулы гл.9 в [1**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. При этом, если в этих формулах используется функция $\gamma(x)$, то дискретизацию формулы удобнее проводить по точкам M_k и полагать $\gamma_k=\gamma(t_k)=\Gamma_k/\Delta S_k$, где ΔS_k – расстояние на контуре L между точками M_{0k-1} и M_{0k}, а если используется функция $g(t)\,(\gamma=g'_S)$, то дискретизацию формулы удобнее проводить по точкам M_{0k} и полагать $g_{0k}=\sum_{\lambda=1}^{k}\Gamma_\lambda$, так как $g(0)=0$ в циркуляционной задаче и $g(0)=g(l)=0$ в бесциркуляционной.

Замечание 4.4. Если контур L является простым разомкнутым, но кусочно-гладким, то точки M_k расположения дискретных вихрей надо выбирать так, чтобы угловые точки контура L входили в их число (Рис. 4.1).



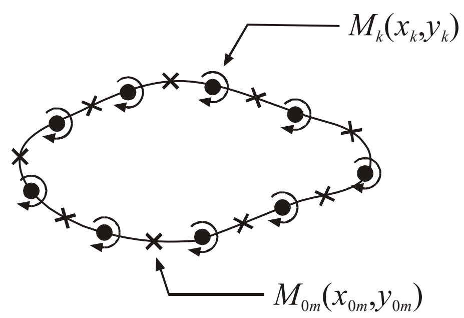


Рис. 4.1 При моделировании тонкого профиля с угловой точкой дискретный вихрь помещается в эту точку

Рис. 4.2 Система дискретных вихрей и расчетных точек на замкнутом гладком профиле

Пусть теперь *контур L является гладким замкнутым* (Рис. 4.2), т.е. $x(0)=x(l)$, $y(0)=y(l)$ и орт касательного вектора непрерывен. Тогда уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** является сингулярным интегральным уравнением с ядром Гильберта вида**Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Его решение определено с точностью до константы, которая определяется тем, что в аэродинамике в этом случае рассматривается бесциркуляционная задача, и поэтому

$$\int\limits_L \gamma ds = 0\,. \qquad (4.148)$$

Поэтому в соответствии с результатами для уравнения с ядром Гильберта *метод дискретных вихрей* в этом случае строится следующим образом. На отрезке [0,*l*] теперь берем следующие два множества точек: $E=\{t_k, k=1,\ldots,n\}$, $t_k=(k-1)h$, $k=1,\ldots,n$, $h=l/n$ и $E_0=(t_{0m}, m=1,\ldots,n\}$, $t_{0m}=t_m+h/2$, $m=1,\ldots,n$. Теперь опять в точках $M_k(x_k,y_k)$ помещаем дискретные вихри интенсивности Γ_k, а точки $M_{0m}(x_{0m},y_{0m})$ берем расчетными точками. Уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** заменяем следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\gamma_{0n}+\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k\omega_k^m=f_m,\quad m=1,\ldots,n,\quad \sum_{k=1}^{n}\Gamma_k=0\,, \qquad (4.149)$$

где ω_k^m – такая же, как в системах **Ошибка! Источник ссылки не найден.**– **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

Оглавление.

Вопросы для сдачи экзамена по спецкурсу.

Литература

1. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент, Москва, ТОО «Янус», 1995.
2. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения, Киев, Наукова Думка, 2002.
3. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения, Москва, «Янус-К», 2001.
4. Вайникко Г.М., Лебедева Н.В., Лифанов И.К. Численное решение сингулярного и гиперсингулярного интегральных уравнений на отрезке и дельта функция, Математический сборник, 2002, т. 193, № 10, с. 3-16.

5. Лифанов И.К., Ненашев А.С. Исследование некоторых вычислительных схем для гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке, Дифференциальные уравнения, 2005, т. 41, № 9, с. 1270-1275.
6. Лифанов И.К. Об одном случае численного решения особых интегральных уравнений в периодическом случае, Дифференциальные уравнения, 2006, т. 42, № 9.
7. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов, Харьков-2001, 92 с.