МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

И.П. ВАСИЛЕГО

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2004

ББК 22.161.1 я7
В 19
УДК 517.3 (07)

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент, зав.кафедрой математического анализа Невоструев Л.М.

Василего И.П.
В19 **Вычисление интегралов с помощью вычетов: Методические указания. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. – 20с.**

Методические указания предназначены для студентов экономических специальностей и инженерно-технических специальностей. На базе основной теоремы теории вычетов, получены алгоритмы вычисления, определенных интегралов от тригонометрических функций и несобственных интегралов двух видов.

ББК 22.161.1 я7

Введение

Решение многих задач физики, механики и некоторых разделов математики связано с вычислением определенных или несобственных интегралов. В работе рассмотрены способы вычисления таких интегралов с помощью теории вычетов. В разделе 1 приводятся основные сведения из теории вычетов. В разделе 2,3 на примерах разобраны способы вычисления определенных и несобственных интегралов и приведены варианты примеров для самостоятельной работы.

1 Основные факты теории вычетов

I Обязательно по книгам (1) и (2) читатель должен ознакомиться с основными понятиями теории функций комплексного переменного: аналитическая функция, интеграл от функции комплексной переменной по кривой и его свойства, ряды Тейлора и Лорана и т.д.

***Определение* 1.** Нулем аналитической функции $f(z)$ называется точка z_0, для которой $f(z_0)=0$.

Если $f(z)$ не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки z_0, то можно описать окружность достаточно малого радиуса с центром в точке z_0 внутри которой не будет других нулей, кроме центра z_0.

Если $f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(k-1)}(z_0)=0$, а $f^{(k)}(z_0)\neq 0$, то точка z_0 называется нулем порядка k для функции $f(z)$. Если $k=1$, то нуль называется простым, при $k>1$ k - кратным.

***Определение* 2.** Точки в которых функция $f(z)$ перестает быть аналитической называются особыми точками функции $f(z)$.

***Определение* 3.** Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности (кольце) $\{z\in C \mid 0<|z-z_0|<r\}$, а в самой точке z_0 или не определена, или определена, но не дифференцируема.

***Определение* 4.** Ряд вида

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$

где $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ - последовательность комплексных чисел, называется рядом Лорана с центром в точке z_0.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, сходящемся в круге $|z-z_0|<r$, называется правильной частью ряда Лорана.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{1} a_n (z-z_0)^n$, сходящийся в области $|z-z_0|>0$, называется главной частью ряда Лорана.

По определению ряд Лорана сходится, если сходятся одновременно его правильная и главная части. Следовательно, ряд Лорана сходится в кольце: $0<|z-z_0|<r$.

Изолированные особые точки бывают трех типов: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка.

***Определение* 5.** Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется устранимой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\neq f(z_0)$.

Тогда z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть её ряда Лорана с центром в точке z_0 отсутствует.

***Определение* 6.** Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется полюсом, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Тогда z_0 является полюсом функции $f(z)$, тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана с центром в точке z_0 состоит из m (конечного числа) членов:

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+..+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\ a_{-m}\neq 0,\ m\geq 1.$$

Число m называют порядком полюса. Если $m=1$, то полюс называется простым.

Если для функции $f(z)$ точка $z=z_0$ есть полюс порядка m, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z=z_0$ есть нуль порядка m.

***Определение* 7.** Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует. Точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана с центром в точке z_0 содержит бесконечное число членов.

Например, точка $z=0$ - существенно особая точка функции $e^{\frac{1}{z}}$. Действительно, $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+.....$.

Заметим, что изолированная особая точка функции $f(z)$ является полюсом порядка $k\geq 1$ тогда и только тогда, когда в некоторой проколотой окрестности точки z_0: $0<|z-z_0|<r$, $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$ причем $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<r$ и $\varphi(z_0)\neq 0$.

II Вычет функции и правила вычисления его

***Определение* 8.** Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 (в том числе $z_0=\infty$) называется значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

где интегрирование ведется по γ-замкнутому кусочно-гладкому контуру Жордана, содержащему внутри себя точку z_0 и не содержащему других особых точек функции $f(z)$. При этом интегрирование ведётся в положительном направлении относительно области, содержащей точку z_0.

Если $z_0 \neq \infty$, то $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$ - коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в ряде Лорана. Если $z_0 = \infty$, то $\operatorname*{Res}_{z=z_0=\infty} f(z) = a_1$, где a_1 - коэффициент при z^{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$.

Вычет $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$ находят, в основном, непосредственно по определению, причем за контур γ принимают окружность $|z| = R$ достаточно большого радиуса.

Правила вычисления вычетов в точке $z_0 \neq \infty$.

1) Если точка z_0 является устранимой особой точкой для функции $f(z)$, то $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

2) Пусть точка $z = z_0$ - полюс первого порядка (простой полюс) для $f(z)$. Тогда $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} ((z - z_0) f(z))$.

В частности, если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в окрестности точки z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

3) Если точка z_0 - полюс порядка $m > 1$ функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m \cdot f(z)\right)^{(m-1)}$$

Для вычисления интегралов будем использовать основную теорему 1 теории вычетов:

Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{G}$, ограниченной замкнутой спрямляемой жордановой кривой С, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, находящихся внутри С, то справедлива формула

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

2 Вычисление интегралов от тригонометрических функций

Интегралы вида $I=\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi$, где $R(u,v)$ - рациональная функция, а функция $g(\varphi)=R(\cos\varphi,\sin\varphi)$ непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$, сводится к интегралом по единичной окружности от функций комплексного переменного.

Пусть $z=e^{i\varphi}$. Тогда с помощью формул Эйлера: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ получим

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i},\ \cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \text{ или } \sin\varphi=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\ \cos\varphi=\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \qquad (1)$$

Отсюда $dz=e^{i\varphi}\cdot id\varphi$ или $d\varphi=-i\frac{dz}{z}=\frac{1}{i}\cdot\frac{dz}{z}$.

При изменении φ от 0 до 2π переменная z пробегает окружность $|z|=1$, поэтому $I=\frac{1}{i}\int\tilde{R}(z)dz$ (где $\tilde{R}(z)=\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$. Так как рациональная функция $\tilde{R}(z)\neq\infty$ на окружности $|z|=1$, то существует такое $r>1$, что в круге $|z|<r$ функция $\tilde{R}(z)$ определена и аналитична всюду за исключением быть может конечного числа изолированных особых точек, находящихся в круге $|z|<1$. Взяв в качестве контура C окружность $|z|=1$ и применяя теорему 1, получим

$$I=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Re}s_{z=a_k}\tilde{R}(z), \qquad (2)$$

где $a_1,a_2,...,a_k$ - полюсы функции $\tilde{R}(z)$, лежащие в круге $|z|<1$.

Таким образом, алгоритм вычисления интеграла $I=\int\limits_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi$ таков:

1) надо доказать, что функция $R(\cos\varphi,\sin\varphi)$ рациональна относительно $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$ и непрерывна на $[0;2\pi]$;

2) делаем замену $z=e^{i\varphi}$ при которой отрезок $[0;2\pi]$ переводится в множество $M=\{z\in C \mid |z|=1\}$; $\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $d\varphi=\frac{dz}{iz}$ и

$$I=\frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}\widetilde{R}(z)dz;$$

3) проверяем условие теоремы 1. Для этого находим изолированные особые точки $z_1, z_2, ..., z_k$ функции $\widetilde{R}(z)$ принадлежащие множеству $\{z\in C\,|\,|z|<1\}$. Теперь функция $\widetilde{R}(z)$аналитична на замкнутом множестве $\{z\in C\,|\,|z|\le 1\}=\overline{G}$ ограниченном окружностью $|z|=1$за исключением точек $z_1, z_2, ..., z_k$;

4) вычисляем I ориентируясь на следующие возможные случаи:

а) $\widetilde{R}(z)=P(z)$ многочлен относительно z. Так как изолированных особых точек нет, то $I=0$;

б) $\widetilde{R}(z)=\dfrac{a}{z-z_0}+P(z)$ ($P(z)$ - многочлен). Тогда точка $z=z_0$ простой полюс функции $\widetilde{R}(z)$ и $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0}\widetilde{R}(z)=a$ (по определению вычета), поэтому $I=2\pi i\cdot\dfrac{a}{i}=2\pi a$;

в) $\widetilde{R}(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ причем $\psi(z_0)=0,\ \varphi(z_0),\ \psi'(z_0)\neq 0$. Тогда по правилу 2 $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0}\widetilde{R}(z)=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ и по формуле (2) $I=2\pi\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$;

г) $\widetilde{R}(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ - многочлены.

Особые точки $z_1,...,z_k$ ищутся среди корней (нулей) многочлена $Q(z)$. Точки $z_1,...,z_k$ могут быть только полюсами (простыми или порядка m). Вычет функции $\widetilde{R}(z)$ точек $z_1, z_2, ..., z_k$ находят по правилу 2 или по правилу 3. Тогда $I=2\pi i\sum\limits_{n=1}^{k}\operatorname*{Res}\limits_{z=z_n}\widetilde{R}(z)$.

Рассмотрим примеры:

1 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\cos t\right)^2}$

Решение. Функция $f(t)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{5}+\cos t\right)^2}$ является рациональной функцией $\cos t$ и непрерывной на $[0;2\pi]$. Полагая $z=e^{it}$ имеем $\cos t=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\ dt=\dfrac{dz}{iz}$.

Теперь

$$I=\frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}-\frac{dz}{z\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2z}\right)^2}=\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z\left(2\sqrt{5}+z+\frac{1}{z}\right)^2}=\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(z^2+2\sqrt{5}z+1\right)^2}$$

$$=\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(z-\left(-\sqrt{5}+2\right)\right)^2\left(z-\left(-\sqrt{5}-2\right)\right)^2}.$$

Подынтегральная функция $g(z)=\dfrac{z}{\left(z-\left(-\sqrt{5}+2\right)^2\right)\left(z-\left(-\sqrt{5}-2\right)^2\right)}$ имеет особые точки $z_1=-\sqrt{5}-2, z_2=-\sqrt{5}+2$, которые являются полюсами второго порядка. Функция $g(z)$ (подынтегральная) аналитична на окружности $|z|=1$ и в круге $|z|<1$ за исключением точки $z_2=-\sqrt{5}+2$. Следовательно, по теореме 1 имеем:

$$\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(z-\left(-\sqrt{5}+2\right)\right)^2\cdot\left(z-\left(-\sqrt{5}-2\right)\right)^2}=\frac{4}{i}\cdot 2ni\cdot\operatorname*{Res}_{z=z_2}g(z)=8\pi\operatorname*{Res}_{z=z_2}g(z).$$

Пользуясь формулой правила 3 вычисления вычета имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}g(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to z_2}\left(\frac{z\cdot(z-z_2)^2}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)'=\lim_{z\to z_2}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2}\right)'=\lim_{z\to z_2}\frac{1(z-z_1)^2-2z(z-z_1)}{(z-z_1)^4}=$$

$$=\lim_{z\to z^2}\frac{z-z_1-2z}{(z-z_1)^3}=\lim_{z\to z_2}\frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3}=\frac{-z_2-z_1}{(z_2-z_1)^3}=\frac{\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2}{\left(-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}+2\right)^3}=\frac{2\sqrt{5}}{4^3}=\frac{\sqrt{5}}{32}.$$

Таким образом $I=8\pi\dfrac{\sqrt{5}}{32}=\dfrac{\pi\sqrt{5}}{4}$.

2 Вычислить $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos^4\varphi}{1+\sin^2\varphi}d\varphi$.

Решение. Используя формулы понижения степени: $\cos^2\varphi=\dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}, \sin^2\varphi=\dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$ получим, что $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{3-\cos 2\varphi}d\varphi$.

Сделаем замену $t=2\varphi$, тогда $I=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos t)^2}{3-\cos t}dt$. Функция $\dfrac{(1+\cos t)^2}{3-\cos t}$ является рациональной функцией относительно $\cos t$ и непрерывной на $[0;2\pi]$.

Теперь после замены $z=e^{it}$ имеем $I=\dfrac{1}{i}\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{-(z+1)^4}{8z^2\left(z^2-6z+1\right)}dz$.

Функция $\widetilde{R}(z)=\dfrac{-(z+1)^4}{8z^2\left(z^2-6z+1\right)}$ имеет особые точки $z_1=0, z_2=3-2\sqrt{2},\ z_3=3+2\sqrt{2}$, точки $z_1=0, z_2=3-2\sqrt{2}$ лежат внутри окружности $|z|=1$. Причем $z_1=0$ - полюс второго порядка, вычет его найдем по правилу 3

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\widetilde{R}(z)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{-(z+1)^4}{8\left(z^2-6z+1\right)}\right)'=-\lim_{z\to 0}\frac{4(z+1)^3(z^2-6z+1)-(z+1)^4(2z-6)}{8(z^2-6z+1)^2}=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}$$

Точка $z_2=3-2\sqrt{2}$ - простой полюс. Вычет $\operatorname*{Res}_{z=z_2}\widetilde{R}(z)$ найдем по правилу 2

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}\widetilde{R}(z)=\lim_{z\to 3-2\sqrt{2}}\frac{-(z+1)^4}{8\cdot z^2\left(z-(3+2\sqrt{2})\right)}=-\frac{(4-2\sqrt{2})^4}{8(3-2\sqrt{2})^2(-4\sqrt{2})}=\frac{8\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})^2}{8(3-2\sqrt{2})^2}=\frac{8\sqrt{2}}{8}=\sqrt{2}$$

По формуле (2) имеем $I=2\pi\left(-\dfrac{5}{4}+\sqrt{2}\right)$.

3 Вычислить $I_1=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi$ при условии, что $-1<a<1$ и $n\in R, n>0$.

Решение. Рассмотрим интеграл $I_2=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin n\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi.$ $I_2=0$ поскольку подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны. Тогда $I_1=I_1+iI_2=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{in\varphi}}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,d\varphi.$

После замены $z=e^{i\varphi}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $d\varphi=\dfrac{dz}{iz}$ будем иметь

$$I_1=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{-z^n\,dz}{\left(z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right)\cdot a}=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{-z^n\,dz}{a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}.$$

Подынтегральная функция $\widetilde{R}(z)$ аналитична на множестве $|z|\le 1$ кроме нуля знаменателя $z_1=a$, который является простым полюсом функции $\widetilde{R}(z)$. Особая точка $z_2=\dfrac{1}{a}$ не принадлежит множеству $|z|\le 1$. По формуле (2) и правилу 2 имеем, что $I_1=2\pi\cdot\operatorname*{Res}_{z=a}\widetilde{R}(z)=2\pi\lim\limits_{z\to a}\dfrac{-z^n}{a\left(z-\frac{1}{a}\right)}=2\pi\dfrac{-a^n}{a\left(a-\frac{1}{a}\right)}=\dfrac{2\pi a^n}{1-a^2}.$

4 Вычислить $I_n = (-1)^n \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin\alpha + \sin\varphi)^n \cdot e^{in\varphi} d\varphi$.

Решение. Сделаем замену $z = e^{i\varphi}$. Тогда $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), d\varphi = \frac{dz}{iz}$ и

$$I_n = (-1)^n \oint\limits_{|z|=1} \left(\sin\alpha + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^n \cdot z^n \frac{dz}{iz} = \frac{(-1)^n}{i} \oint\limits_{|z|=1} \left(z\sin\alpha + \frac{1}{2i}\left(z^2 - 1\right)\right)^n \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{i(2i)^n} \oint\limits_{|z|=1} \left(z^2 + 2iz\sin\alpha - 1\right)^n \frac{dz}{z}.$$

Подынтегральная функция аналитична на множестве $|z| \le 1$ кроме нуля знаменателя z=0, который является простым полюсом подынтегральной функции. По формуле (2) и правилу 2 получаем, что

$$I_n = \frac{(-1)^n}{i \cdot (2i)^n} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\left(z^2 + 2iz\sin\alpha - 1\right)^n}{z} = \frac{2\pi(-1)^n}{(2i)^n} \lim_{z \to 0}\left(z^2 + 2iz\sin\alpha - 1\right)^n =$$

$$= \frac{2\pi(-1)^n(-1)^n}{2^n \cdot i^n} = \frac{\pi}{2^{n-1} i^n} = \frac{\pi i^n}{2^{n-1} \cdot i^{2n}} = \frac{\pi i^n}{2^{n-1}(-1)^n} = \frac{\pi i^n (-1)^n}{2^{n-1}}.$$

Примеры для самостоятельного решения. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}$;

2) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4 + \sqrt{15}\sin t}$;

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{5 - 4\cos\varphi} d\varphi$;

4) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi}, a > 1$;

5) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{1 - a\sin^2\varphi} d\varphi, 0 < a < 1$;

6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi d\varphi}{1 - 2a\sin\varphi + a^2}, \underset{n=0,1,2,3...}{-1 < a < 1}$;

7) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 + 2\cos\varphi)^n \cos n\varphi}{5 + 4\cos\varphi} d\varphi, n = 0,1,2,...$;

8) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, a > 1$;

9) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2\varphi d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, |a| < 1$;

10) $\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(a + b\cos\varphi)^2}, a > b > 0.$

3 Вычисление несобственных интегралов

1 *При вычислении некоторых типов несобственных интегралов будем использовать следующие две леммы Жордана.*

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в области $D=\{z\in C \| z| \ge R_0, \operatorname{Im} z \ge 0\}$ при некотором $R_0>0$ и $\lim\limits_{R\to\infty} R\cdot M(R)=0$, где $M(R)=\max\limits_{z\in C_R}|f(z)|$, $C_R=\{z\in C \| z|=R, \operatorname{Im} z\ge 0\}$. Тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz=0$.

Лемма 2. Пусть $m>0$ и для функции $f(z)$ выполнены условия:

1) $f(z)$ непрерывна в области D для некоторого $R_0>0$;

2) $\lim\limits_{R\to\infty} M(R)=0$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)e^{imz}dz=0$.

2 *Интегралы первого типа*.

Интеграл вида $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$, где $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - рациональная функция, причем многочлен $Q(x)$ не обращается в нуль на действительной оси и его степень, по крайней мере, на две единицы больше степени полинома $P(x)$, назовем интегралом первого типа. В силу условий наложенных выше на $R(x)$, выполняется неравенство $|R(x)|\le \dfrac{c}{1+x^2}$ с некоторой константой С>0 и поэтому интеграл I сходится.

Выведем формулу для вычисления этого интеграла с помощью вычетов. Для этого рассмотрим замкнутый контур K_τ, состоящий из полуокружности $C_\tau=\{z\in C \| z|=\tau, \operatorname{Im} z\ge 0\}$ и отрезка $[-\tau,\tau]$ действительной оси (см. рисунок 1).

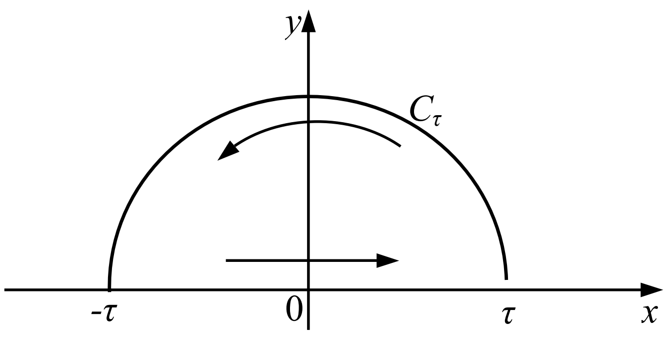

Рисунок 1

Направление обхода контура K_τ показано на рисунке 1. Рассмотрим функцию комплексной переменной $R(z)$ и пусть $z_1, z_2, ..., z_n$ - полюсы этой функции, лежащие в верхней полуплоскости. Число τ возьмем настолько большим, чтобы все точки $z_1, z_2, ..., z_n$ оказались внутри K_τ. Так как $Q(x) \neq 0$ на действительной оси, то существует область G, содержащая замкнутую верхнюю полуплоскость $\{z \in C | I_m z \geq 0\}$ и такая, что функция $R(z)$ аналитична в G за исключением только лишь точек $z_1, z_2, ..., z_n$. Область G, контур K_τ и функция $R(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому

$$\oint_{K_\tau} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Re}_{z=z_k} s R(z)$$

или

$$\int_{-\tau}^{\tau} R(x)dx + \int_{C_R} R(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Re}_{z=z_k} s R(z).$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $\tau \to \infty$. Заметим, что при этом его правая часть не меняется, а в левой части $\int_{C_R} R(z)dz \to 0$ по первой лемме Жордана, а интеграл $\int_{-\tau}^{\tau} R(x)dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$. Таким образом, получили формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Re}_{z=z_k} s\, R(z), \tag{3}$$

Таким образом, алгоритм решения несобственных интегралов первого типа таков:

1) показываем, что знаменатель $Q(x)$ не обращается в нуль на действительной оси и что его степень по крайней мере на две единицы больше степени многочлена $P(x)$;

2) переходим к функции комплексной переменной $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$;

3) находим комплексные корни многочлена $Q(z)$, которые являются полюсами функции $R(z)$;

4) из найденных полюсов функции $R(z)$ выбираем только те, которые лежат в верхней полуплоскости, например, $z_1, z_2, ..., z_n$;

5) по правилам (2) или (3) вычисляем вычеты $\operatorname*{Re}_{z=z_k} s\, R(z),\ k = \overline{1, n}$;

6) по формуле (3) вычисляем интеграл.

Иногда пункты 5) и 6) выполняются одновременно.

Рассмотрим примеры.

1 Вычислить $I = \int_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

Решение. Так как подынтегральная функция $\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ является четной, то $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Так как $(x^2 + 1)^2$ не обращается в нуль на действительной оси и степень многочлена $(x^2 + 1)^2$ на четыре больше степени числителя $(1=1\cdot x^0)$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ является интегралом первого типа.

Рассмотрим функция $R(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$. Корнями многочлена $(z^2 + 1)^2$ являются $z_1 = i$, $z_2 = - i$. Точки $z_1 = i$ и $z_2 = - i$ – полюсы второго порядка функции $R(z)$. Полюс $z_1 = i$ попал в верхнюю полуплоскость. По правилу 3 вычисляем вычет относительно $z = i$:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} R(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left(\frac{(z-i)^2\cdot 1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)'=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'=\lim_{z\to i}\frac{-2(z+i)}{(z+i)^4}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{-2}{-8i}=\frac{1}{4i}.$$

По формуле (3) вычисляем интеграл $I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{4}$.

2 Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$.

Решение. Очевидно, что I – интеграл первого типа.

Функция $R(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+9\right)}$ аналитична всюду в плоскости, за исключением точек $z_1=i, z_2=-i, z_3=-3i, z_4=3i$. Эти точки являются простыми полюсами функции $R(z)$. Две из них (z_1 и z_4) лежат в верхней полуплоскости. По формуле (3) имеем $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} R(z)+\operatorname*{Res}_{z=3i} R(z)\right)$.

По правилу 2

$$\operatorname*{Res}_{z=i} R(z)=\lim_{z\to i}\frac{z^2(z-i)}{(z-i)(z+i)\left(z^2+9\right)}=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)\left(z^2+9\right)}=\frac{i^2}{2i\left(i^2+9\right)}=\frac{i}{16},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} R(z)=\lim_{z\to 3i}\frac{z^2(z-3i)}{\left(z^2+1\right)(z-3i)(z+3i)}=\lim_{z\to 3i}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)(z+3i)}=\frac{-9}{(-9+1)6i}=-\frac{3i}{16}.$$

Отсюда $I = 2\pi i\left(\frac{i}{16} - \frac{3i}{16}\right) = \frac{\pi}{4}$.

3 Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$, $a > 0$.

Решение. Так как подынтегральная функция четная, то $I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^3}$.

Очевидно, что I – интеграл первого типа. Рассмотрим функцию $R(z) = \frac{z^2}{\left(z^2 + a^2\right)^3}$. Она аналитична всюду в плоскости за исключением точек $z_1 = ai$ и $z_2 = -ai$. Эти точки являются полюсами третьего порядка функции $R(z)$. Один из них ($z_1 = ai$) попал в верхнюю полуплоскость. По формуле (3) и правилу 3 имеем

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=ai} R(z) = \pi i \lim_{z\to ai} \frac{1}{2!}\left(\frac{z^2 (z - ai)^3}{(z - ai)^3 (z + ai)^3}\right)'' = \frac{\pi i}{2}\lim_{z\to ai}\left(\frac{2aiz - z^2}{(z + ai)^4}\right)' =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\lim_{z\to ai}\frac{2\left(z^2 - a^2 - 4aiz\right)}{(z + ai)^5} = \frac{\pi}{16a^3}.$$

4 Вычислить интеграл $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(a^2 + x^2\right)^n}$, $a > 0$, $n = 1,2,\ldots$

Решение. I_n - интеграл первого типа. Функция $R(z) = \frac{1}{\left(z^2 + a^2\right)^n} = \frac{1}{(z - ai)^n (z + ai)^n}$ имеет полюс $z = ai$ $n^{\text{го}}$ порядка в верхней полуплоскости. Пользуясь правилом 3 и формулой (3), получаем

$$I_n = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=ai} R(z) = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{z\to ai}\left(\frac{(z - ai)^n}{(z - ai)^n (z + ai)^n}\right)^{(n-1)} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{z\to ai}\left(\frac{1}{(z + ai)^n}\right)^{(n-1)} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}\cdot\frac{(-1)^n n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{(2ai)^{2n-1}} = \frac{2\pi}{(2a)^{2n-1}}\cdot\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.$$

Примеры для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\left(x^2 + 4x + 13\right)^2}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$;

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^7}$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{\left(bx^2+a\right)^4}, a,b>0$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}, a,b>0$;

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+4ix-5\right)^2}$;

8) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^6 dx}{\left(x^4+a^4\right)^2}, a>0$;

9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^8}$;

10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-2xi-1-a\right)^3}, a>0.$

3 *Интегралы второго типа*.

Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx$ назовем интегралами второго типа, если $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ - рациональная функция, причем $Q(x)$ не имеет действительных корней и степень $Q(x)$ по крайней мере на единицу больше степени $P(x)$. Покажем, что при этих условиях оба интеграла сходятся. Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)=0$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx = \frac{1}{\alpha}R(x)\cos\alpha x\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R'(x)\cos\alpha x dx = -\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R'(x)\cos\alpha x dx$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R'(x)\cos\alpha x dx$ сходится абсолютно, так как у функции $R'(x)$ степень числителя по крайней мере на две единицы меньше степени знаменателя. Отсюда следует сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx$.

Аналогично доказываем сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx$. Интегрируя вспомогательную функцию $f(z)=R(z)e^{i\alpha z}$ по контуру K_τ (см. рисунок 1) в силу теоремы 1, получим

$\int\limits_{-\tau}^{\tau} R(x)e^{i\alpha x}dx + \int\limits_{C_\tau} R(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\limits_{z=z_k} f(z)$, где τ настолько велико, что все полюсы $R(z)$ лежат внутри K_τ. Переходя к пределу при $\tau\to\infty$ и замечая, что по второй лемме Жордана $\int\limits_{C_\tau} R(z)e^{i\alpha z}dz \to 0$ приходим к равенству

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Re}_{z=z_k}s\, f(z)\,.$$

Приравняв действительные и мнимые части, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname*{Re}_{z=z_k}s\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right] \tag{4}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname*{Re}_{z=z_k}s\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right] \tag{4$^{/}$}$$

где $z_1, z_2, ...z_k$ полюсы функции $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Рассмотрим примеры.

1 Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x+1)\sin 2x dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. Ясно, что I – интеграл второго типа $D = 4-8 = -4 < 0 \Rightarrow x^2+2x+2 \neq 0 \quad \forall x \in R$, и степень знаменателя на 1 меньше степени числителя).

Рассмотрим функцию $R(z) = \dfrac{(z+1)\sin 2z}{z^2+2z+2} = \dfrac{(z+1)\sin 2z}{(z-(-1+i))(z-(-1-i))}$. Функция $R(z)$ имеет в верхней полуплоскости один простой полюс в точке $z_1 = -1+i$. По формуле ($4^{/}$) имеем $I = \mathrm{Im}\left(2\pi i\operatorname*{Re}_{z=z_1}s\left(R(z)e^{i2z}\right)\right)$.

Используя правило 2, получаем

$$\operatorname*{Re}_{z=z_1}s\left(e^{i2z}R(z)\right) = \operatorname*{Re}_{z=-1+i}s\left(\frac{(z+1)e^{i2z}}{z^2+2z+z}\right) = \lim_{z\to -1+i}\frac{(z-(-1+i))(z+1)e^{i2z}}{(z-(-1+i))(z-(-1-i))} =$$

$$= \lim_{z\to -1+i}\frac{(z+1)e^{i2z}}{z+1+i} = \frac{(-1+i+1)}{(-1+i+1+i)}e^{i(-2+2i)} = \frac{1}{2i}e^{-2}\cdot e^{-2i} = \frac{e^{-2}}{2}(\cos 2 - i\sin 2)$$

Таким образом $I = \mathrm{Im}\left(2\pi i\dfrac{e^{-2}}{2}(\cos 2 - i\sin 2)\right) = \pi\cdot e^{-2}\cos 2$.

2 Вычислить интеграл $I = \int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{\cos x dx}{x^2+a^2}, a > 0$.

Решение. Так как под знаком интеграла стоит четная функция, то $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos x dx}{x^2+a^2}$ и $R(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}, \quad \alpha = 1$.

Так как степень числителя (1) меньше степени знаменателя $\left(x^2+a^2\right)$ на две единицы и $x^2+a^2 \neq 0$ для любого действительного *x*, то I – интеграл второго типа. Рассмотрим функцию $R(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}=\dfrac{1}{(z-ai)(z+ai)}$. Функция $R(z)$ имеем в верхней полуплоскости простой полюс $z=ai$. По формуле (4) и правилу 2 имеем

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i\left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=ai}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{2\pi i e^{-a}}{2ai}\right)=\frac{\pi e^{a}}{2a}.$$

Для вычисления вычета здесь мы использовали формулу $\operatorname*{Res}_{z=ai}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\varphi(ai)}{\psi'(ai)}$, так как $\varphi(ai)\neq 0,\ \psi(ai)=0$ и $\psi'(ai)\neq 0$. Таким же способом можно было вычислить вычет и в примере 1.

Примеры для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы.

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)\sin x dx}{\left(x^2+9\right)^2}$; 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x dx}{x^2+2x+10}$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\sin x dx}{x^4+5x^2+4}$; 4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}\ a>0, b>0\ a\neq b$;

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x dx}{x^2+a^2},\ a>0$; 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{\left(x^2+b^2\right)^2}\ a>0$;

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(2x^3+13x\right)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$; 8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^4+x^2+a}dx,\ a>0$;

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3+5x\right)\sin x dx}{x^4+10x^2+9}$; 10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

Список использованных источников

1 Александров и.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984. – 192 с.

2 Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1969. – 240 с.

3 Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1969. – 382 с.

4 Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. – Минск.: Высшая школа, 1976. –256 с.

5 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1987. – 303 с.

6 Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1966. – 388 с.

7 Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 444 с.

8 Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функции комплексного переменного в задачах физики и техники. - М.: Высшая шкала, 1983. –160 с.

9 Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, - 1979. – 320 с.

10 Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1976. – 408 с.

11 Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применение. – М.: Высшая школа. 1988. – 167 с.

12 Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. –М.: Наука, 1976.–380 с.