

Министерство образования РФ  
Воронежский государственный университет

Математические модели неньютоновских жидкостей  
Учебное пособие  
по специальности "Математика"(010100)

Воронеж 2004

Утверждено учебно-методическим советом математического факультета ВГУ, протокол № 6 от 15.01.2004

Авторы: Звягин В.Г., Воротников Д.А.

Учебное пособие подготовлено на кафедре алгебры и топологических методов анализа математического факультета ВГУ

Рекомендуется для студентов 5-6 курсов математического факультета

## Введение

Хорошо известно, что многие проблемы гидродинамики являются объектом пристального исследования математиков. На пути решения этих проблем были созданы многие математические методы исследования линейных и нелинейных задач для дифференциальных уравнений. Однако, как правило, традиционным объектом исследования математиков является ньютоновская гидродинамика. На наш взгляд, это связано с тем фактом, что объекты неньютоновской гидродинамики недостаточно хорошо известны в математической среде и их исследование в настоящее время связано в основном с усилиями механиков.

Настоящее учебное пособие направлено на исправление этого положения. Оно представляет собой введение в неньютоновскую гидродинамику для математиков. При написании пособия нашей задачей было привлечь внимание математиков к этой теории с целью дальнейших математических исследований объектов этой науки.

Эта разработка написана на основе спецкурсов "Математические модели гидродинамики" и "Математические модели движения нелинейно-вязкой жидкости", читавшихся студентам математического факультета в Научно-образовательном центре "Волновые процессы в неоднородных и нелинейных средах".

# 1 Жидкость в гидромеханике

## 1.1 Основные характеристики течения жидкости

Для математического описания поведения реальных жидкостей в различных ситуациях в гидромеханике обычно полагают, что частицы жидкости бесконечно малы и находятся в точках некоторой области трехмерного пространства. Эта область соответствует сосуду, заполненному жидкостью. С течением времени частицы движутся и описывают некоторые траектории в пространстве. "Сосуд" тоже может двигаться с течением времени, иметь эластичную границу, которая изменяет форму под действием потока жидкости, иметь отверстия, в которые втекает или вытекает жидкость и т.п.

Задача описания движения жидкости сводится к описанию движения каждой материальной точки - частицы жидкости. Рассмотрим какую-нибудь такую частицу. Ее положение в зависимости от времени описывается функцией  $x(t)$  времени со значениями в точках пространства.

Предположим, что в пространстве зафиксированы начало координат и базис. В этом случае координаты точки (или вектора) будем обозначать как  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Скорость частицы с траекторией  $x(t)$  в момент времени  $t$  есть

$$v(t) = x'(t) \quad (1.1.1)$$

(Здесь и далее мы считаем все функции достаточно гладкими, чтобы все требуемые производные существовали).

Тензором будем называть линейный оператор, переводящий (трехмерные) векторы в векторы. При выбранном базисе его можно отождествить с матрицей  $3 \times 3$ , элементы которой называются компонентами тензора.

Обозначим через  $v(t, x)$  скорость частицы, находящейся в момент времени  $t$  в точке пространства  $x$ . Рассмотрим градиент этой величины - тензор с компонентами

$$(\nabla v)_{ij}(t, x) = \frac{\partial v_i(t, x)}{\partial x_j}. \quad (1.1.2)$$

Его симметрическая составляющая

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T) \quad (1.1.3)$$

называется тензором скоростей деформации, а кососимметрическая

$$W = \frac{1}{2}(\nabla v - \nabla v^T) \quad (1.1.4)$$

тензором завихренности.

Рассмотрим теперь некоторую частицу внутри жидкости. Можно считать, что она ограничена воображаемой поверхностью произвольной формы. Остальная часть жидкости действует на частицу через эту поверхность. Рассмотрим малую плоскую площадку на этой поверхности площадью  $\Delta S$  с вектором внешней нормали  $n$ . Обозначим через  $P_n$  силу, с которой остальная часть жидкости действует на частицу через рассмотренную площадку.

Векторная величина

$$p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{P_n}{\Delta S}$$

называется напряжением.

Оказывается, существует симметричный тензор  $T_H(t, x)$  такой, что напряжение в момент  $t$  в точке  $x$  в направлении  $n$  равно

$$p_n(t, x) = T_H(t, x)n.$$

Этот тензор называется тензором напряжений.

Тензор

$$\sigma = T_H - \frac{1}{3} \text{Tr} T_H I, \quad (1.1.5)$$

где  $I$  - единичный тензор, называется тензором касательных напряжений. Он характеризует силы внутреннего трения в жидкости.

## 1.2 Ньютоновская жидкость

Наука о деформации и течении материалов называется реологией. Реологическое поведение конкретного материала зависит от соотношений между напряжениями, деформациями, растяжениями в нем. Наиболее важным из таких соотношений является уравнение формоизменения, называемое также определяющим соотношением (constitutive law), задающее связь между тензором  $\sigma$  касательных напряжений и различными характеристиками деформации.

Наиболее простая зависимость такого сорта, описывающая жидкость, имеет вид

$$\sigma = 2\eta \mathcal{E}, \quad (1.2.1)$$

где  $\eta$  - числовой параметр, называемый вязкостью.

При  $\eta = 0$  жидкость называется идеальной. При  $\eta > 0$  получается классическая ньютоновская жидкость. Это основной объект исследования классической гидродинамики. Однако в этом пособии нас как раз интересуют модели, отличные от ньютоновской.

## 1.3 Уравнение движения

Предположим, что нам известно поле скоростей  $v(t, x)$  во всех геометрических точках  $x$  области пространства, где находится жидкость в каждый момент времени  $t$  из некоторого

временного промежутка. Тогда, чтобы описать движение частицы, находящейся в начальный момент времени  $t_0$  в точке  $x_0$ , достаточно решить задачу Коши

$$x'(t) = v(t, x(t)), \quad (1.3.1)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.3.2)$$

При достаточно регулярном поле скоростей  $v$  эта задача имеет единственное решение.

Исходя из этого, основным вопросом при описании движения жидкости является нахождение поля скоростей  $v(t, x)$ . Поле скоростей и тензор напряжений связаны следующим соотношением, называемым уравнением движения:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - Div T_H = \rho f. \quad (1.3.3)$$

Здесь  $f(t, x)$  - поле внешних сил, действующих на частицы тела (например, гравитационных сил),  $\rho(t, x)$  - плотность жидкости, а дивергенцией тензора  $Div T_H(t, x)$  называется вектор

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{H1j}(t, x)}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{H2j}(t, x)}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{H3j}(t, x)}{\partial x_j} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial T_{H1j}(t, x)}{\partial x_j}, \frac{\partial T_{H2j}(t, x)}{\partial x_j}, \frac{\partial T_{H3j}(t, x)}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Для несжимаемой жидкости имеется несколько больше информации. Во-первых, для нее

$$div v(t, x) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j(t, x)}{\partial x_j} = 0. \quad (1.3.5)$$

Во-вторых, след тензора напряжений считается полностью независимым от характеристик деформации, и вводят еще одну неизвестную скалярную функцию  $p(t, x) = -\frac{1}{3}TrT_H$ , называемую давлением.

В-третьих, плотность постоянна, и можно считать ее равной единице.

Заметим, что  $Div(pI) = \nabla p$ . Поэтому (1.3.3) с учетом (1.1.5) дает

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - Div\sigma + \nabla p = f. \quad (1.3.6)$$

Это уравнение движения несжимаемой жидкости.

Напомним, что оператор Лапласа действует следующим образом:  $\Delta v = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$ .

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} 2Div \mathcal{E} &= 2 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \mathcal{E}_{1j}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathcal{E}_{2j}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathcal{E}_{3j}}{\partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_j^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_j^2}, \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_j^2} \right) + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_1}, \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_2}, \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_3} \right) \end{aligned}$$

Из (1.3.5) следует, что вторая сумма равна нулю. Поэтому

$$2Div \mathcal{E} = \Delta v \quad (1.3.7)$$

Тогда из определяющего соотношения ньютоновской жидкости (1.2.1) и уравнения движения (1.3.6) получим уравнение движения ньютоновской жидкости,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta \Delta v + \nabla p = f, \quad (1.3.8)$$

которое обычно называют уравнением Навье-Стокса.



## 2 Одномерные модели вязкоупругих жидкостей

### 2.1 Метод механических моделей

Для построения определяющих соотношений, описывающих тела с более сложными свойствами, чем ньютоновская жидкость, в реологии часто применяется метод механических моделей. Опишем сущность этого метода.

Основные свойства для реологии — упругость, вязкость и пластичность. Для представления упругости используется спиральная пружина. Для нее имеет место закон Гука: удлинение пружины прямо пропорционально приложенной к ее концам силе. Эту модель будем обозначать буквой  $H$ . Для представления вязкости используется модель в виде пробирки, заполненной вязким маслом, в которой свободно перемещается поршень. Скорость поршня (относительно масла) прямо пропорциональна приложенной силе. Эта модель обозначается  $N$ . Модель для пластичности нам не потребуется.

Для построения моделей тел со сложными реологическими свойствами можно соединить эти элементы параллельно (обозначается  $|$ ) или последовательно (обозначается  $-$ ). При параллельном соединении нагрузки, воспринимаемые каждым элементом, складываются, а скорости удлинения каждого элемента одинаковы. При последовательном соединении складываются скорости удлинения элементов, и каждый из них подвергается одинаковой нагрузке.

Для реологических соотношений нужны не силы и скорости, а напряжение и скорости деформации. Здесь нужно вспомнить, что нашей целью является моделирование реальных вязкоупругих жидкостей. Грубо говоря, эти жидкости предполагаются состоящими из микрокомплексов из маленьких пружинок и про-

бирок с поршнями. Поэтому мы должны понимать напряжение и скорость деформации так, чтобы это согласовалось с определениями из п.1.1. Исходя из этого, определим напряжение  $\sigma$  (в пружине или в пробирке с поршнем) как отношение силы сопротивления (которая равна по модулю приложенной силе) к площади поперечного сечения (пружины или поршня), а скорость деформации  $\mathcal{E}$  как половину отношения скорости (поршня в масле или изменения длины пружины) к характерной (средней) продольной длине пробирки с поршнем или пружины. "Половина" здесь появилась в соответствии с (1.1.3), но скоро она будет "погашена" появляющимися двойками в коэффициентах пропорциональности. Это странное на первый взгляд умножение или деление на 2, которое можно заметить и в формуле (1.2.2), объясняется как историческими соображениями, так и некоторым удобством при переходе к уравнениям движения: например в (1.3.8) двойка исчезла.

Теперь необходимо записать соотношения между напряжением и скоростью деформации для пружины и пробирки с поршнем. Для пробирки с поршнем это совсем просто: так как сила пропорциональна скорости, то напряжение пропорционально скорости деформации

$$\sigma_N = 2\eta\mathcal{E}_N \quad (2.1.1)$$

Отметим, что (2.1.1) совпадает по форме с (1.2.1), и  $\eta$  имеет физический смысл вязкости.

Условимся только для механических моделей обозначать производную по времени точкой. Продифференцировав по времени закон Гука для пружины, получим, что производная от силы пропорциональна скорости изменения длины пружины. Поэтому производная от напряжения пропорциональна скорости де-

формации

$$\dot{\sigma}_H = 2\mu\mathcal{E}_H \quad (2.1.2)$$

Коэффициенты пропорциональности  $\mu$  и  $\eta$  обычно положительны.

## 2.2 Тело Максвелла

Наиболее простой конструкцией модели вязкоупругой жидкости является тело Максвелла (с символьной записью  $M = H - N$ ): последовательно соединенные пружина и поршень. Выведем уравнение формоизменения для этого тела. Для этого вспомним, что при последовательном соединении напряжение постоянно

$$\sigma_M = \sigma_N = \sigma_H, \quad (2.2.1)$$

а скорости деформации складываются

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_H + \mathcal{E}_N \quad (2.2.2)$$

Из равенств (2.1.1) - (2.2.2) следует, что

$$\mathcal{E}_M = \frac{\dot{\sigma}_M}{2\mu} + \frac{\sigma_M}{2\eta} \quad (2.2.3)$$

Это определяющее соотношение для тела Максвелла. Оно имеет вид линейного дифференциального уравнения относительно  $\sigma_M$ . Умножим обе части этого уравнения на  $e^{\frac{\mu}{\eta}t}$ . Имеем:

$$e^{\frac{\mu}{\eta}t}\mathcal{E}_M = e^{\frac{\mu}{\eta}t}\frac{\dot{\sigma}_M}{2\mu} + e^{\frac{\mu}{\eta}t}\frac{\sigma_M}{2\eta}$$

$$e^{\frac{\mu}{\eta}t}\mathcal{E}_M = \frac{(e^{\frac{\mu}{\eta}t}\dot{\sigma}_M)}{2\mu}$$

Отсюда

$$e^{\frac{\mu}{\eta}t}\sigma_M = \sigma_{M_0} + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta}s}\mathcal{E}_M(s) ds,$$

где  $\sigma_{M_0}$  есть напряжение в начальный момент времени (здесь и ниже будем считать, что это момент  $t = 0$ ). Получаем, что решение уравнения (2.2.3) имеет следующий вид:

$$\sigma_M = e^{-\frac{\mu}{\eta}t} \left( \sigma_{M_0} + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta}s} \mathcal{E}_M(s) ds \right) \quad (2.2.4)$$

### 2.3 Тело Джеффриса

Типичным представителем моделей вязкоупругих жидкостей является модель Джеффриса  $J = M|N$ : параллельно соединяются модель Максвелла, состоящая из последовательно соединенных пружины и поршня, и еще один поршень, причем вязкости среды в двух разных пробирках могут различаться; мы обозначим их  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Итак, имеем для максвелловской составляющей тела Джеффриса:

$$\sigma_M = e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} \left( \sigma_{M_0} + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta_1}s} \mathcal{E}_M(s) ds \right), \quad (2.3.1)$$

а для ньютоновской составляющей

$$\sigma_N = 2\eta_2 \mathcal{E}_N \quad (2.3.2)$$

Но при параллельном соединении получаем:

$$\sigma_J = \sigma_M + \sigma_N \quad (2.3.3)$$

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_M = \mathcal{E}_N \quad (2.3.4)$$

Равенства (2.3.1)-(2.3.4) влекут

$$\sigma_J = e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} \left( \sigma_{M_0} + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta_1}s} \mathcal{E}_J(s) ds \right) + 2\eta_2 \mathcal{E}_J \quad (2.3.5)$$

Обозначим напряжение и скорость деформации тела Джеффриса в нулевой момент времени через  $\sigma_{J_0}$  и  $\mathcal{E}_{J_0}$ . Положив в (2.3.5)  $t = 0$ , получим равенство:

$$\sigma_{J_0} = \sigma_{M_0} + 2\eta_2\mathcal{E}_{J_0} \quad (2.3.6)$$

Из (2.3.5) и (2.3.6) следует

$$\sigma_J = e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} \left( \sigma_{J_0} - 2\eta_2\mathcal{E}_{J_0} + 2\mu \int_0^t \mathcal{E}_J(s) e^{\frac{\mu}{\eta_1}s} ds \right) + 2\eta_2\mathcal{E}_J \quad (2.3.7)$$

Это определяющее соотношение для тела Джеффриса с явно выраженным напряжением. Более традиционна другая форма определяющего соотношения, которую мы сейчас выведем. Продифференцируем по  $t$  выражение (2.3.5):

$$\dot{\sigma}_J = e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} 2\mu e^{\frac{\mu}{\eta_1}t} \mathcal{E}_J(t) - \frac{\mu}{\eta_1} e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} \left( \sigma_{M_0} + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta_1}s} \mathcal{E}_J(s) ds \right) + 2\eta_2\dot{\mathcal{E}}_J \quad (2.3.8)$$

С другой стороны, из (2.3.5) следует:

$$e^{-\frac{\mu}{\eta_1}t} \left( \sigma_{M_0} + 2\mu \int_0^t e^{\frac{\mu}{\eta_1}s} \mathcal{E}_J(s) ds \right) = \sigma_J - 2\eta_2\mathcal{E}_J \quad (2.3.9)$$

Равенства (2.3.8) и (2.3.9) влекут

$$\dot{\sigma}_J = 2\mu\mathcal{E}_J - \frac{\mu}{\eta_1}(\sigma_J - 2\eta_2\mathcal{E}_J) + 2\eta_2\dot{\mathcal{E}}_J$$

Умножим это на  $\frac{\eta_1}{\mu}$  и перенесем член  $\sigma_J$  в левую часть:

$$\sigma_J + \frac{\eta_1}{\mu}\dot{\sigma}_J = 2(\eta_1 + \eta_2)\mathcal{E}_J + 2\frac{\eta_1\eta_2}{\mu}\dot{\mathcal{E}}_J \quad (2.3.10)$$

Обозначим  $\lambda_1 = \frac{\eta_1}{\mu}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\eta_1\eta_2}{\mu(\eta_1+\eta_2)}$ ,  $\eta_J = \eta_1 + \eta_2$ . Тогда (2.3.10) переписывается в виде

$$\sigma_J + \lambda_1 \dot{\sigma}_J = 2\eta_J(\mathcal{E}_J + \lambda_2 \dot{\mathcal{E}}_J) \quad (2.3.11)$$

Это и есть другая форма уравнения формоизменения для тела Джеффриса. Параметр  $\eta_J$  называется вязкостью тела Джеффриса. Параметр  $\lambda_1$  называется временем релаксации, а параметр  $\lambda_2$  — временем последействия. Так как вязкости положительны, а  $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$ , то  $\lambda_2 < \lambda_1$ . Параметры  $\lambda_1, \lambda_2, \eta_J$  отличаются от параметров  $\mu_1, \eta_1, \eta_2$  тем, что они не только являются параметрами механической модели, но могут быть также измерены для конкретных жидкостей, обладающих вязкоупругими свойствами модели Джеффриса.

Предположим, что скорость деформации постоянна и равна  $\mathcal{E}_{J_0}$ . Тогда  $\dot{\mathcal{E}}_J = 0$ , и уравнение (2.3.11) можно преобразовать следующим образом:

$$\sigma_J - 2\eta_J \mathcal{E}_{J_0} + \lambda_1 (\sigma_J - 2\eta_J \mathcal{E}_{J_0})' = 0$$

Решая это дифференциальное уравнение, получим:

$$\sigma_J - 2\eta_J \mathcal{E}_{J_0} = (\sigma_{J_0} - 2\eta_J \mathcal{E}_{J_0}) e^{-\frac{t}{\lambda_1}}$$

И мы имеем следующее выражение для напряжения:

$$\sigma_J = 2\eta_J \mathcal{E}_{J_0} + (\sigma_{J_0} - 2\eta_J \mathcal{E}_{J_0}) e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \quad (2.3.12)$$

Если  $\sigma_{J_0} = 2\eta_J \mathcal{E}_{J_0}$ , то  $\sigma_J = 2\eta_J \mathcal{E}_{J_0}$ , и напряжение не будет зависеть от времени. Если же в теле возникла некоторая деформация, которая остается постоянной, то скорость деформации  $\mathcal{E}_{J_0}$  равна нулю, и напряжение убывает по экспоненциальному закону:

$$\sigma_J = \sigma_{J_0} e^{-\frac{t}{\lambda_1}}$$

Итак, время релаксации  $\lambda_1$  — это время, за которое напряжение при постоянной деформации убывает (релаксирует) в  $e$  раз.

При отсутствии напряжения ( $\sigma_J = 0$ ) из (2.3.11) получаем

$$\mathcal{E}_J + \lambda_2 \dot{\mathcal{E}}_J = 0$$

и

$$\mathcal{E}_J = e^{-\frac{t}{\lambda_2}} \mathcal{E}_{J_0} \quad (2.3.13)$$

т.е. скорость деформации убывает по экспоненциальному закону, и за время последствия  $\lambda_2$  скорость деформации уменьшится в  $e$  раз.

Выразим теперь "механические" параметры через вязкость тела Джеффриса и времена релаксации и последствия:

$$\eta_2 = \eta_J \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \eta_1 = \eta_J \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right), \quad \mu = \eta_J \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2}.$$

Таким образом, (2.3.7) переписется как

$$\begin{aligned} \sigma_J = e^{-\frac{t}{\lambda_1}} & \left( \sigma_{J_0} - 2\eta_J \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_{J_0} + 2\eta_J \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda_1}} \mathcal{E}_J(s) ds \right) + \\ & + 2\eta_J \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_J \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Это еще одна форма определяющего соотношения для тела Джеффриса.

Уравнения (2.3.11) и (2.3.14) являются определяющими соотношениями также для тела Летерзиха с символьной записью  $(N|H) - N$ , где опять же вязкости двух поршней  $N$  могут различаться.

При  $\lambda_2 = \eta_2 = 0$  из тела Джеффриса получается тело, эквивалентное телу Максвелла. Чтобы заметить это, достаточно сравнить (2.3.5) и (2.2.4). Далее мы будем работать с телом Джеффриса ( $\lambda_1, \lambda_2, \eta_J > 0$ ), хотя практически все полученные

выводы будут верны и для тела Максвелла, если положить в получаемых уравнениях  $\lambda_2 = \eta_2 = 0$ . Вместе с тем следует отметить, что, вообще говоря, материалы с нулевым временем запаздывания, в том числе тело Максвелла, обладают множеством специфических свойств, но они останутся за рамками нашего рассмотрения.



## 3 Многомерные модели вязкоупругих жидкостей

### 3.1 Переход к многомерным моделям

Отметим, что применение полученных нами моделей для описания жидкостей, которые находятся в реальном трехмерном пространстве, требует обобщения полученных уравнений, и, в первую очередь, уравнения формоизменения, на трехмерный случай. Это является последним шагом метода механических моделей. Отметим, что все обсуждаемые ниже уравнения могут рассматриваться в пространствах произвольной размерности и тот факт, что мы до этого момента и ниже говорим о трехмерном пространстве, объясняется лишь тем, что именно эта ситуация имеет физический смысл (хотя при исследовании плоскопараллельных течений или течений в узкой области часто бывает полезно прибегать к двумерным моделям).

Проблема состоит в том, как понимать составляющие полученных нами определяющих соотношений, например (2.3.11), в трехмерном случае. Ответ таков: времена релаксации и запаздывания, а также вязкость тела Джеффриса остаются скалярными величинами, и их можно даже измерить для конкретных материалов; напряжение и скорость деформации естественно понимать как тензор касательных напряжений и тензор скоростей деформации. Остается лишь вопрос о том, как понимать производную по времени, обозначавшуюся точкой. Однозначного ответа на этот вопрос нет, возможны варианты (из которых, впрочем, почти все можно подвергнуть критике), и от выбора такого варианта зависит получаемая модель. Следующие несколько пунктов будут посвящены анализу основных вариантов.

### 3.2 Частная производная

Самым простым выходом из положения, при котором возникает минимум математических трудностей, является выбор частной производной по времени  $t$  в качестве замены производной, обозначавшейся точкой.

Так как мы теперь будем разбирать все варианты на примере модели Джеффриса, индексы  $J$  у вязкости и тензоров напряжения и скоростей деформации будем для краткости опускать. Определяющее соотношение (2.3.11) принимает вид

$$\sigma + \lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\eta(\mathcal{E} + \lambda_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}), \quad (3.2.1)$$

а эквивалентное ему определяющее соотношение (2.3.14) — вид

$$\sigma = e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \left( \sigma_0 - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_0 + 2\eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda_1}} \mathcal{E}(s) ds \right) + 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E} \quad (3.2.2)$$

В случае несжимаемой жидкости получаем отсюда, воспользовавшись (1.3.7):

$$\begin{aligned} Div \sigma = e^{-\frac{t}{\lambda_1}} \left( Div \sigma_0 - \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Delta v|_{t=0} + \eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda_1}} \Delta v(s) ds \right) + \\ + \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Delta v \end{aligned}$$

Подставляя это в уравнение движения (1.3.6), получим следующее уравнение движения несжимаемой вязкоупругой жидкости

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Delta v - \eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda_1}} \Delta v(s) ds + \nabla p =$$

$$= f + e^{-\frac{t}{\lambda_1}} (\text{Div} \sigma_0 - \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Delta v|_{t=0}) \quad (3.2.3)$$

### 3.3 Субстанциональная производная

Уравнение (3.2.1) связывает тензоры напряжения и деформации и их частные производные по времени, т.е. скорости их изменения в каждой конкретной геометрической точке пространства. Более естественным с различных точек зрения представляется подход, когда реологическое соотношение связывает эти тензоры со скоростями их изменения для каждой конкретной частицы. Для его реализации нам понадобится функция  $z(t, \tau, x)$ , обозначающая точку в пространстве, в которой находится в момент  $t$  та частица, которая в момент времени  $\tau$  находится в точке  $x$ .

Из этого определения видно, что

$$\frac{\partial z(t, \tau, x)}{\partial t} = v(t, z(t, \tau, x)) \quad (3.3.1)$$

$$z(t, t, x) = x \quad (3.3.2)$$

$$z(s, t, z(t, \tau, x)) = z(s, \tau, x) \quad (3.3.3)$$

Пусть  $A(t, x)$  - некоторая достаточно гладкая функция точки и времени. Скорость изменения  $A$  для конкретной частицы равна

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t, z(t + \Delta t, t, x)) - A(t, x)}{\Delta t} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} A(t, z(t, \tau, x)) \right|_{\tau=t} = \\ &= \frac{\partial A(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A(t, x)}{\partial x_i} \frac{\partial z_i(t, \tau, x)}{\partial t} \Big|_{\tau=t} = \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial A}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Эта величина называется субстанциональной производной  $A$  и обозначается  $\frac{d}{dt}A$ . Заметим, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial x}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 v_i e_i = v,$$

где  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – базисные векторы в пространстве. Итак, мы имеем следующее свойство субстанциональной производной:

$$v(t, x) = \frac{dx}{dt} \quad (3.3.5)$$

Чтобы получить аналог (2.3.14), нам потребуется использовать операцию, обратную новому дифференцированию  $\frac{d}{dt}$ , — интегрирование. Такой обратной операцией является интегрирование по траекториям частиц. Изучим этот вопрос более формально.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\frac{d}{dt}U(t, x) = A(t, x), \quad (3.3.6)$$

$$U(0, x) = U_0(x),$$

где  $A$  и  $U_0$  произвольные достаточно гладкие известные функции.

Покажем, что

$$\frac{d}{dt} \int_0^t A(s, z(s, t, x)) ds = A(t, x) \quad (3.3.7)$$

В самом деле, цепочка равенств (3.3.4) дает

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} A(t, z(t, \tau, x)) \Big|_{\tau=t} \quad (3.3.8)$$

С учетом (3.3.3) и (3.3.8) получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t A(s, z(s, t, x)) ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t A(s, z(s, t, z(t, \tau, x))) ds \Big|_{\tau=t} =$$

=

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t A(s, z(s, \tau, x)) ds \Big|_{\tau=t} = A(t, z(t, \tau, x)) \Big|_{\tau=t} = A(t, x)$$

Теперь заметим, что функция  $U_0(z(0, t, x))$  принимает значение  $U_0(x)$  при  $t = 0$ . Кроме того, пользуясь (3.3.3) и (3.3.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_0(z(0, t, x)) &= \frac{\partial}{\partial t} U_0(z(0, t, z(t, \tau, x))) \Big|_{\tau=t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} U_0(z(0, \tau, x)) \Big|_{\tau=t} = 0 \end{aligned}$$

Итак, решение задачи (3.3.6) имеет следующий вид:

$$U_0(z(0, t, x)) + \int_0^t A(s, z(s, t, x)) ds$$

Покажем, что эта задача не может иметь более одного решения. Действительно, пусть  $U_1$  и  $U_2$  – два решения задачи (3.3.6) и  $w = U_1 - U_2$ . Тогда имеем:

$$\frac{d}{dt} w(t, x) = 0, w(0, x) = 0$$

Равенство (3.3.8) дает

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t, z(t, \tau, x)) \Big|_{\tau=t} = 0$$

Положим здесь  $x = z(\tau, 0, y)$ , где  $y$  - произвольная точка. Получим

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} w(t, z(t, \tau, z(\tau, 0, y))) \Big|_{\tau=t} = \frac{\partial}{\partial t} w(t, z(t, 0, y))$$

Пусть  $w_1(t, y) = w(t, z(t, 0, y))$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} w_1(t, y) = 0, w_1(0, y) = 0$$

Следовательно,  $w_1 \equiv 0$ . Тогда

$$0 = w_1(t, z(0, t, x)) = w(t, z(t, 0, z(0, t, x))) = w(t, x)$$

для любого  $x$ . Итак,  $w \equiv 0$ , и единственность решения задачи (3.3.6) доказана.

Теперь мы можем вернуться к получению определяющих соотношений. Используя субстанциональную производную, перепишем уравнение формоизменения (2.3.11) в виде

$$\sigma + \lambda_1 \frac{d}{dt} \sigma = 2\eta(\mathcal{E} + \lambda_2 \frac{d}{dt} \mathcal{E}) \quad (3.3.9)$$

Выведем отсюда явное выражение для  $\sigma$ , т.е. аналог (2.3.14). Проведем ряд преобразований уравнения (3.3.9):

$$\begin{aligned} \sigma - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E} + \lambda_1 \frac{d}{dt} (\sigma - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}) &= 2\eta \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E} \right) \\ \frac{e^{\frac{t}{\lambda_1}}}{\lambda_1} (\sigma - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}) + e^{\frac{t}{\lambda_1}} \frac{d}{dt} (\sigma - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}) &= 2\eta e^{\frac{t}{\lambda_1}} \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \mathcal{E} \right) \\ \frac{d}{dt} (e^{\frac{t}{\lambda_1}} (\sigma - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E})) &= 2\eta e^{\frac{t}{\lambda_1}} \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \mathcal{E} \right) \end{aligned}$$

Как мы показали при исследовании задачи (3.3.6), решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{\lambda_1}} (\sigma - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}) &= \sigma_0(z(0, t, x)) - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_0(z(0, t, x)) + \\ &+ 2\eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda_1}} \mathcal{E}(s, z(s, t, x)) ds \end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение для  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \sigma(t, x) = & e^{-\frac{t}{\lambda_1}} [\sigma_0(z(0, t, x)) - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_0(z(0, t, x))] + \\ & + 2\eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s}{\lambda_1}} \mathcal{E}(s, z(s, t, x)) ds] + 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}(t, x) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

В случае несжимаемой жидкости (3.3.10) и (1.3.7) влекут

$$\begin{aligned} Div \sigma(t, x) = & e^{-\frac{t}{\lambda_1}} Div[\sigma_0(z(0, t, x)) - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_0(z(0, t, x))] + \\ & + 2\eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda_1}} Div[\mathcal{E}(s, z(s, t, x))] ds + \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Delta v \end{aligned}$$

Для получения уравнения движения несжимаемой вязкоупругой жидкости Джеффриса подставим это в (1.3.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Delta v - 2\eta \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\lambda_1}} Div[\mathcal{E}(s, z(s, t, x))] ds + \\ + \nabla p = f + e^{-\frac{t}{\lambda_1}} Div[\sigma_0(z(0, t, x)) - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}_0(z(0, t, x))] \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

### 3.4 Принцип объективности поведения материала

Прежде чем перейти к описанию других объектов, могущих заменить в трехмерной ситуации производную по времени, обозначавшуюся точкой, необходимо рассказать вкратце о принципе объективности поведения материала. Это один из основных принципов рациональной механики, который выражает тот факт, что свойства материала не зависят от выбора наблюдателя.

Наблюдателя в рациональной механике отождествляют с системой отсчета, т.е. неким правилом, сопоставляющим каждой точке пространства элемент  $x$  пространства  $R^3$ , а каждому моменту времени элемент  $t$  числовой оси. При изменении наблюдателя считается, что сохраняется метрика в  $R^3$  и на числовой оси, и сохраняется направление времени. Тогда самое общее изменение координат каждой точки имеет вид

$$t^* = t + a \quad (3.4.1)$$

$$x^* = x_0^*(t) + Q(t)(x - x_0), \quad (3.4.2)$$

где  $a$  - некоторое значение времени,  $x_0$  - некоторая точка в пространстве,  $x_0^*(t)$  - некоторая функция времени со значениями в точках пространства,  $Q$  - функция времени, значениями которой являются ортогональные тензоры.

Замена наблюдателя индуцирует некоторое преобразование векторов и тензоров. Принцип объективности утверждает, что формулы, выражающие физические свойства тела и содержащие время  $t$ , точку  $x$  и их различные функции не должны меняться при преобразованиях (3.4.1)-(3.4.2).

Пусть имеется вектор, являющийся геометрическим, т.е. представляющим из себя направленный отрезок, существующий независимо от наблюдателя. Пусть в первой системе отсчета он имеет вид  $w = \overrightarrow{x_1x_2}$ . Тогда в новой системе отсчета  $w^* = \overrightarrow{x_1^*x_2^*} = \overrightarrow{x_0^*(t) + Q(t)(x_1 - x_0), x_0^*(t) + Q(t)(x_2 - x_0)} = Q(t)\overrightarrow{x_1x_2} = Q(t)w$

Если же  $T$  - тензор, переводящий геометрические векторы в геометрические, то имеем в первой системе отсчета:

$$w_1 = Tw_2,$$

где  $w_1$  и  $w_2$  - два пробных геометрических вектора. Так как для ортогонального тензора  $Q(t)^T Q(t) = I$ , получаем

$$w_1^* = Q(t)w_1 = Q(t)Tw_2 = T^*w_2^*,$$



где  $T^* = Q(t)TQ(t)^T$ .

Исходя из полученного, будем называть векторнозначную функцию  $w$  времени и точки не зависящей от наблюдателя, если ее координаты при изменении системы отсчета (3.4.1)-(3.4.2) преобразуются как

$$w^*(t^*, x^*) = Q(t)w(t, x), \quad (3.4.3)$$

а тензорнозначную функцию  $T$  не зависящей от наблюдателя, если

$$T^*(t^*, x^*) = Q(t)T(t, x)Q(t)^T \quad (3.4.4)$$

Из механики известно, что тензор напряжений  $T_H$  является таковым.

Скалярная функция  $A$  времени и точки называется не зависящей от наблюдателя, если при изменении системы отсчета

$$A^*(t^*, x^*) = A(t, x) \quad (3.4.5)$$

Примером такой функции является плотность  $\rho(t, x)$ .

### 3.5 Теорема Зарембы-Зоравского

Для проверки реологических соотношений на объективность нам потребуется следующее утверждение о преобразовании при изменении наблюдателя тензоров скоростей деформации и завихренности, носящее имя теоремы Зарембы-Зоравского.

**Теорема.** При изменении системы отсчета (3.4.1)-(3.4.2) имеют место следующие преобразования:

$$\mathcal{E}^*(t^*, x^*) = Q(t)\mathcal{E}(t, x)Q(t)^T, \quad (3.5.1)$$

т.е. тензор скоростей деформации не зависит от наблюдателя;

$$W^*(t^*, x^*) = Q(t)W(t, x)Q(t)^T + Q'(t)Q(t)^T, \quad (3.5.2)$$

т.е. тензор завихренности зависит от наблюдателя.

**Доказательство.** По определению  $z(t, \tau, x)$  при фиксированных аргументах есть точка в пространстве. Поэтому в силу (3.4.2):

$$z^*(t^*, \tau^*, x^*) = x_0^*(t) + Q(t)(z(t, \tau, x) - x_0) \quad (3.5.3)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^*(t^*, \tau^*, x^*)}{\partial t^*} &= \frac{\partial [x_0^*(t) + Q(t)(z(t, \tau, x) - x_0)]}{\partial(t+a)} = \\ &= x_0^{*'}(t) + Q'(t)(z(t, \tau, x) - x_0) + Q(t) \frac{\partial z(t, \tau, x)}{\partial t} = \\ &= x_0^{*'}(t) + Q'(t)Q(t)^T(z^*(t^*, \tau^*, x^*) - x_0^*(t)) + Q(t) \frac{\partial z(t, \tau, x)}{\partial t} \end{aligned}$$

Положив в этом равенстве  $t = \tau$ ,  $t^* = \tau^*$  и, используя (3.3.1) и (3.3.2), получим:

$$\begin{aligned} v^*(t^*, x^*) &= \left. \frac{\partial z^*(t^*, \tau^*, x^*)}{\partial t^*} \right|_{t^*=\tau^*} = \\ &= x_0^{*'}(t) + Q'(t)Q(t)^T(x^* - x_0^*(t)) + Q(t)v(t, x) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\nabla v)^* &= \frac{\partial v^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} = \\ &= \frac{\partial (x_0^{*'}(t) + Q'(t)Q(t)^T(x^* - x_0^*(t)) + Q(t)v(t, x))}{\partial x^*} = \\ &= Q'(t)Q(t)^T + \frac{\partial [Q(t)v(t, x)]}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^*} = \\ &= Q'(t)Q(t)^T + Q(t)(\nabla v) \frac{\partial (x_0 + Q(t)^T(x^* - x_0^*(t)))}{\partial x^*} = \\ &= Q'(t)Q(t)^T + Q(t)(\nabla v)Q(t)^T \end{aligned}$$

Итак,

$$(\nabla v)^* = Q(t)(\nabla v)Q(t)^T + Q'(t)Q(t)^T \quad (3.5.5)$$

Транспонируем это равенство:

$$[(\nabla v)^*]^T = Q(t)(\nabla v)^T Q(t)^T + Q(t)Q'(t)^T \quad (3.5.6)$$

Продифференцировав тождество  $Q(t)Q(t)^T = I$ , получим

$$Q'(t)Q(t)^T + Q(t)Q'(t)^T = 0 \quad (3.5.7)$$

Возьмем полусумму равенств (3.5.5) и (3.5.6) с учетом (3.5.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^* &= \frac{1}{2}((\nabla v)^* + [(\nabla v)^*]^T) = \frac{1}{2}[Q(t)(\nabla v)Q(t)^T + Q'(t)Q(t)^T + \\ &\quad + Q(t)(\nabla v)^T Q(t)^T + Q(t)Q'(t)^T] = Q(t)\mathcal{E}Q(t)^T \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим полуразность (3.5.5) и (3.5.6):

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{1}{2}((\nabla v)^* - [(\nabla v)^*]^T) = \frac{1}{2}[Q(t)(\nabla v)Q(t)^T + Q'(t)Q(t)^T - \\ &\quad - Q(t)(\nabla v)^T Q(t)^T - Q(t)Q'(t)^T] = Q(t)WQ(t)^T + Q'(t)Q(t)^T \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### 3.6 Объективные производные

Уравнение формоизменения как выражение физических свойств жидкости, согласно принципу объективности, не должно менять свою форму при изменении системы отсчета. Проверим, имеет ли место это утверждение для определяющих соотношений (3.2.1) и (3.3.9).

Как мы уже отмечали, тензор напряжений  $T_H$  не зависит от наблюдателя. Покажем, что тензор касательных напряжений также не зависит от наблюдателя. Имеем:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= T_H^* - \frac{1}{3}Tr T_H^* I = \\ &= Q(t)T_H Q(t)^T - \frac{1}{3}Tr(Q(t)T_H Q(t)^T)I = Q(t)T_H Q(t)^T - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3} \sum_{i,j,k=1}^3 q_{ij} T_{Hjk} q_{ik} I &= Q(t) T_H Q(t)^T - \frac{1}{3} \sum_{j,k=1}^3 [Q(t)^T Q(t)]_{jk} T_{Hjk} I = \\
&= Q(t) T_H Q(t)^T - \frac{1}{3} \sum_{j,k=1}^3 I_{jk} T_{Hjk} I = \\
&= Q(t) T_H Q(t)^T - \frac{1}{3} \text{Tr} T_H I = Q(t) \sigma Q(t)^T \quad (3.6.1)
\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, имеем представление

$$\sigma = Q(t)^T \sigma^* Q(t) \quad (3.6.2)$$

А из (3.5.1) следует, что

$$\mathcal{E} = Q(t)^T \mathcal{E}^* Q(t) \quad (3.6.3)$$

Подставим эти представления в (3.2.1):

$$\begin{aligned}
&Q(t)^T \sigma^* Q(t) + \lambda_1 \frac{\partial Q(t)^T \sigma^* Q(t)}{\partial t} = \\
&= 2\eta(Q(t)^T \mathcal{E}^* Q(t) + \lambda_2 \frac{\partial Q(t)^T \mathcal{E}^* Q(t)}{\partial t})
\end{aligned}$$

Применив слева  $Q(t)$ , а справа  $Q(t)^T$ , получим

$$\begin{aligned}
&\sigma^* + \lambda_1 \frac{\partial \sigma^*}{\partial t^*} + \lambda_1 Q(t) Q'(t)^T \sigma^* Q(t) Q(t)^T + \lambda_1 Q(t) Q(t)^T \sigma^* Q'(t) Q(t)^T \\
&= 2\eta(\mathcal{E}^* + \lambda_2 \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial t^*} + \lambda_2 Q(t) Q'(t)^T \mathcal{E}^* Q(t) Q(t)^T + \\
&\quad + \lambda_2 Q(t) Q(t)^T \mathcal{E}^* Q'(t) Q(t)^T)
\end{aligned}$$

Теперь используем (3.5.7) и (3.4.1):

$$\begin{aligned}
&\sigma^* + \lambda_1 \frac{\partial \sigma^*}{\partial t^*} + \lambda_1 Q(t^* - a) Q'(t^* - a)^T \sigma^* - \lambda_1 \sigma^* Q(t^* - a) Q'(t^* - a)^T = \\
&2\eta(\mathcal{E}^* + \lambda_2 \frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial t^*} + \lambda_2 Q(t^* - a) Q'(t^* - a)^T \mathcal{E}^* - \lambda_2 \mathcal{E}^* Q(t^* - a) Q'(t^* - a)^T)
\end{aligned}$$

Итак, при замене наблюдателя в определяющем соотношении (3.2.1) появляются дополнительные слагаемые. Аналогично можно показать, что и в (3.3.9) появляются дополнительные слагаемые. Оказывается, эти слагаемые могут дать в сумме тождественный нуль, если усложнить объект, которым мы заменяем производную по времени, обозначавшуюся точкой.

**Определение.** Пусть  $T(t, x)$  – произвольная тензорнозначная функция, не зависящая от наблюдателя. Оператор вида

$$\frac{DT(t, x)}{Dt} = \frac{dT(t, x)}{dt} + G(\nabla v(t, x), T(t, x)), \quad (3.6.4)$$

где  $G$  – некоторая матричнозначная функция двух матричных аргументов, называется объективной производной, если при любом изменении системы отсчета (3.4.1)-(3.4.2) выполнено равенство

$$\frac{D^*T^*}{Dt^*} = Q(t) \frac{DT}{Dt} Q(t)^T \quad (3.6.5)$$

для всех возможных функций  $T$ .

**Замечание.** Символ  $\frac{D^*}{Dt^*}$  обозначает представление оператора  $\frac{D}{Dt}$  в новой системе координат, т.е. выражение вида

$$\frac{d^*T^*}{dt^*} + G((\nabla v)^*, T^*) = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \sum_{i=1}^3 v_i^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} + G((\nabla v)^*, T^*)$$

Выбор функции  $G$  осуществляется на основе различных механических и опытных соображений.

Имея некоторую объективную производную  $\frac{D}{Dt}$ , можно от (2.3.11) перейти к определяющему соотношению

$$\sigma + \lambda_1 \frac{D\sigma}{Dt} = 2\eta(\mathcal{E} + \lambda_2 \frac{D\mathcal{E}}{Dt}) \quad (3.6.6)$$

Такое определяющее соотношение уже удовлетворяет принципу объективности. Действительно, подставляя в (3.6.6) пред-

ставления (3.6.2) и (3.6.3) и пользуясь свойством (3.6.5) объективной производной, получаем:

$$\begin{aligned} Q(t)^T \sigma^* Q(t) + \lambda_1 Q(t)^T \frac{D^* \sigma^*}{Dt^*} Q(t) = \\ 2\eta(Q(t)^T \mathcal{E}^* Q(t) + \lambda_2 Q(t)^T \frac{D^* \mathcal{E}^*}{Dt^*} Q(t)), \end{aligned}$$

что влечет

$$\sigma^* + \lambda_1 \frac{D^* \sigma^*}{Dt^*} = 2\eta \left( \mathcal{E}^* + \lambda_2 \frac{D^* \mathcal{E}^*}{Dt^*} \right) \quad (3.6.7)$$

Для различных объективных производных может оказаться очень сложным или невозможным выразить явно из (3.6.6) тензор  $\sigma$  через характеристики деформации. Поэтому для описания движения, например, несжимаемой вязкоупругой жидкости приходится рассматривать систему (1.3.5), (1.3.6), (3.6.6) с большим числом неизвестных функций.

### 3.7 Примеры объективных производных

Самый простой пример объективной производной тензора это производная Яуманна:

$$\frac{D_0 T(t, x)}{Dt} = \frac{dT(t, x)}{dt} + T(t, x)W(t, x) - W(t, x)T(t, x) \quad (3.7.1)$$

Она также называется коротационной. Покажем, что она действительно удовлетворяет условию (3.6.5). Имеем, пользуясь (3.3.8), (3.5.2) и (3.5.7):

$$\begin{aligned} \frac{D_0^* T^*}{Dt^*} &= \frac{\partial}{\partial t^*} T^*(t^*, z^*(t^*, \tau^*, x^*)) \Big|_{\tau^*=t^*} + T^* W^* - W^* T^* = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [Q(t)T(t, z(t, \tau, x))Q(t)^T] \Big|_{\tau=t} + Q(t)TQ(t)^T (Q(t)WQ(t)^T + \\ &+ Q'(t)Q(t)^T) - (Q(t)WQ(t)^T + Q'(t)Q(t)^T)Q(t)TQ(t)^T = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Q'(t)TQ(t)^T + Q(t)\frac{dT}{dt}Q(t)^T + Q(t)TQ'(t)^T + Q(t)TWQ(t)^T + \\
&Q(t)TQ^T(t)Q'(t)Q(t)^T - Q(t)WTQ(t)^T - Q'(t)Q(t)^TQ(t)TQ(t)^T = \\
&= Q(t)\frac{D_0T}{Dt}Q(t)^T + Q'(t)TQ(t)^T + Q(t)TQ'(t)^T - \\
&-Q'(t)TQ'(t)^TQ(t)Q(t)^T - Q'(t)Q(t)^TQ(t)TQ(t)^T = Q(t)\frac{D_0T}{Dt}Q(t)^T
\end{aligned}$$

Можно показать (см. замечание в пункте 4.2), что всякая объективная производная может быть представлена в виде

$$\frac{DT(t, x)}{Dt} = \frac{D_0T(t, x)}{Dt} + G_1(\mathcal{E}(t, x), T(t, x)), \quad (3.7.2)$$

где  $G_1$  - матричнозначная функция двух матричных аргументов. Смысл этого представления заключается в том, что любая объективная производная есть сумма производной Яуманна и выражения, не зависящего от тензора завихренности  $W$ .

Простейшее обобщение производной Яуманна - производная Олдройда, зависящая от параметра  $a \in [-1, 1]$ :

$$\frac{D_aT}{Dt} = \frac{D_0T}{Dt} - a(\mathcal{E}T + T\mathcal{E}) \quad (3.7.3)$$

При  $a = 0$  это производная Яуманна. При  $a = 1$  производная (3.7.3) называется верхней конвекционной, а при  $a = -1$  нижней конвекционной.

### 3.8 Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения модели вязкоупругой жидкости с производной Олдройда

Математическое исследование уравнений движения неньютоновских жидкостей, особенно вязкоупругих жидкостей, является довольно сложным. К настоящему моменту известно не очень много серьезных результатов в этой области. Это может

объясняться следующими факторами: во-первых, даже математическая теория ньютоновских жидкостей и уравнений Навье-Стокса совсем не полна и содержит ряд крупных нерешенных проблем; во-вторых, многие системы уравнений движения неньютоновских жидкостей, в частности вязкоупругих, существенно сложнее уравнений Навье-Стокса и не всегда могут быть исследованы теми же методами; в-третьих, определяющие соотношения для многих неньютоновских жидкостей появились сравнительно недавно и мало известны в среде математиков.

В этом пункте мы приведем один из наиболее сильных известных результатов – теорему о существовании и единственности локального по времени решения начально-краевой задачи для системы уравнений движения несжимаемой вязкоупругой жидкости с объективной производной Олдройда в определяющем соотношении, принадлежащую Гильопе и Со [4].

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область (т.е. открытое множество) в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим начально-краевую задачу, состоящую из уравнения движения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i(t, x) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x_i} - \text{Div} \sigma(t, x) + \nabla p(t, x) = f, \\ (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \quad (3.8.1)$$

определяющего соотношения

$$\sigma(t, x) + \lambda_1 \frac{D_a \sigma(t, x)}{Dt} = 2\eta(\mathcal{E}(t, x) + \lambda_2 \frac{D_a \mathcal{E}(t, x)}{Dt}), \\ (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \quad (3.8.2)$$

условия несжимаемости жидкости

$$\text{div} v(t, x) = 0, (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \quad (3.8.3)$$

условия прилипания жидкости к стенкам сосуда

$$v(t, x) = 0, (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (3.8.4)$$



и начального условия

$$v(0, x) = a(x), \sigma(0, x) = \sigma_0(x), x \in \Omega. \quad (3.8.5)$$

Давление  $p$  может быть определено с точностью до константы. Поэтому к задаче (3.8.1)-(3.8.5) обычно для определенности добавляется условие

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx \equiv 0 \quad (3.8.6)$$

Введем необходимые функциональные пространства.

Символом  $L_2$  будем обозначать пространство суммируемых с квадратом на области  $\Omega$  функций со значениями в  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^3$  или пространстве симметричных матриц  $3 \times 3$ . Символом  $H^s$ , где  $s$  – натуральное число, обозначим соболевское пространство функций (со значениями в  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^3$  или пространстве симметричных матриц  $3 \times 3$ ), суммируемых с квадратом на области  $\Omega$  вместе со своими производными до порядка  $s$  включительно; символом  $H_0^s$  – замыкание в  $H^s$  множества бесконечно гладких функций с компактным в  $\Omega$  носителем; символом  $H^{-s}$  – пространство, сопряженное к  $H_0^s$ .

Символами  $C([0, T]; X)$  и  $L_2(0, T; X)$  будем обозначать банаховы пространства соответственно непрерывных и суммируемых с квадратом функций на промежутке  $[0, T]$  со значениями в некотором банаховом функциональном пространстве  $X$ .

В случае, когда  $X$  есть  $L_2$  или  $H^s$ , любой элемент  $u$  пространств  $C([0, T]; X)$  и  $L_2(0, T; X)$  можно отождествить с функцией  $u(t, x)$ , заданной на  $[0, T] \times \Omega$ , следующим образом:

$$u(t)(x) \mapsto u(t, x) \quad (3.8.7)$$

Исходя из этого, тройка  $(v, \sigma, p)$  из подобных пространств называется решением задачи (3.8.1)-(3.8.6), если соответствующим образом

щая тройка функций  $(v(t, x), \sigma(t, x), p(t, x))$  является решением этой задачи.

Теперь мы можем сформулировать результат Гильоппе и Со.

**Теорема.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область с  $C^3$  - гладкой границей. Пусть  $f \in L_2(0, T; H^1)$ ,  $f'_t \in L_2(0, T; H^{-1})$ ,  $a \in H^2 \cap H_0^1$ ,  $\operatorname{div} a = 0$ ,  $\sigma_0 \in H^1$ ,  $\sigma_0 - \frac{2\eta\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}(a) \in H^2$ . Тогда существует  $t_0 > 0$  и тройка  $(v, \sigma, p)$  из класса

$$v \in L_2(0, t_0; H^3) \cap C([0, t_0]; H^2 \cap H_0^1)$$

$$v'_t \in L_2(0, t_0; H_0^1) \cap C([0, t_0]; L_2)$$

$$p \in L_2(0, t_0; H^2)$$

$$\sigma \in L_2(0, t_0; H^2) \cap C([0, t_0]; H^1),$$

которая является решением задачи (3.8.1)-(3.8.6). Это решение единственно в указанном классе.

## 4 Нелинейно-вязкие жидкости

### 4.1 Нелинейная вязкость и вязкоупругость

Концепция вязкоупругой жидкости не является единственной концепцией, предлагаемой для объяснения и описания неньютоновского поведения реальных жидкостей. Существует другой класс моделей, называемых нелинейно-вязкими жидкостями. Здесь предполагается, что тензор напряжений в момент времени  $t$  в точке  $x$  есть функция от других характеристик жидкости в этой же точке в этот же момент:

$$T_H(t, x) = g_1(t, x, v(t, x), \nabla v(t, x), \rho(t, x)) \quad (4.1.1)$$

Из (1.1.5) следует, что тогда и  $\sigma$  есть функция этих характеристик:

$$\sigma(t, x) = g_2(t, x, v(t, x), \nabla v(t, x), \rho(t, x)) \quad (4.1.2)$$

**Замечание.** Очевидно, определяющие соотношения (3.2.2) и (3.3.10), и тем более (3.6.6) не сводятся к (4.1.2). Тензор касательных напряжений  $\sigma(t, x)$  у них оказывается зависящим от характеристик жидкости в других точках в другие моменты времени. Это свойство является специфическим свойством вязкоупругих моделей. Под вязкоупругой жидкостью в широком смысле слова можно понимать все модели жидкостей, не сводимые к (4.1.2).

Существует множество сложных моделей вязкоупругих жидкостей. Это, например, модели, построенные методом механических моделей с использованием в пробирках с поршнями масла с неньютоновскими свойствами; модели, в которых времена релаксации и запаздывания также являются функциями характеристик жидкости; модели, имеющие интегральный вид и несводимые к методу механических моделей и др.

## 4.2 Теорема Нолла и гипотеза Стокса.

Соотношение (4.1.2) есть определяющее соотношение для нелинейно-вязкой жидкости. Согласно принципу объективности его форма не должна зависеть от наблюдателя. Оказывается, это позволяет упростить и уточнить форму определяющего соотношения (4.1.2). Первым шагом на этом пути является теорема Нолла.

**Теорема.** Если соотношение (4.1.2) удовлетворяет принципу объективности, то  $g_2$  сводится к функции только  $\mathcal{E}$  и  $\rho$ :

$$g_2(t, x, v, \nabla v, \rho) = g_3(\mathcal{E}, \rho) \quad (4.2.1)$$

**Доказательство.** В силу принципа объективности для любой замены наблюдателя (3.4.1) - (3.4.2) форма определяющего соотношения (4.1.2) остается неизменной. Отметим, что плотность  $\rho$  не зависит от наблюдателя. Тогда с учетом представлений (3.5.1), (3.5.2), (3.5.4) и (3.6.2) получим

$$\begin{aligned} g_2(t, x, v, \nabla v, \rho) &= Q^T g_2(t^*, x^*, v^*, (\nabla v)^*, \rho^*) Q = \\ &= Q^T g_2(t + a, x_0^* + Q(x - x_0), x_0^{*'} + Q'Q^T(x^* - x_0^*) + Qv, \\ &\quad Q\mathcal{E}Q^T + QWQ^T + Q'Q^T, \rho) Q \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Пусть  $x_1$  и  $t_1$  произвольные фиксированные точка и момент времени. Рассмотрим тензорнозначную функцию

$$Q(t) = e^{(t_1-t)W(t_1, x_1)}, \quad (4.2.3)$$

где  $W(t_1, x_1)$  – тензор завихренности в точке  $(t_1, x_1)$ .

Покажем, что значениями  $Q(t)$  являются ортогональные тензоры. По свойству экспоненты  $Q'(t) = -Q(t)W(t_1, x_1)$ . Имеем

$$\begin{aligned} Q(t_1)Q(t_1)^T &= I \\ (Q(t)Q(t)^T)' &= Q'(t)Q(t)^T + Q(t)Q'(t)^T = \end{aligned}$$

$$= -Q(t)WQ(t)^T - Q(t)W^TQ(t)^T = 0$$

в силу кососимметричности  $W$ .

Это влечет

$$Q(t)Q(t)^T \equiv I.$$

Отметим, что  $Q(t_1) = I, Q'(t_1) = -W(t_1, x_1)$ .

Положим в (4.2.2)  $t = t_1, x = x_1, Q$  как в (4.2.3), а также

$$x_0 = 0 \quad (4.2.4)$$

$$x_0^*(t) = -x_1 - (t - t_1)(v(t_1, x_1) - W(t_1, x_1)x_1) \quad (4.2.5)$$

$$a = -t_1 \quad (4.2.6)$$

Получим:

$$\begin{aligned} & g_2(t_1, x_1, v(t_1, x_1), \nabla v(t_1, x_1), \rho(t_1, x_1)) = \\ & = g_2(-a + a, -x_1 + x_1, -(v(t_1, x_1) - W(t_1, x_1)x_1) + W(t_1, x_1)x_1 + \\ & \quad + v(t_1, x_1), \mathcal{E}(t_1, x_1) + W(t_1, x_1) - W(t_1, x_1), \rho(t_1, x_1)) = \\ & = g_2(0, 0, 0, \mathcal{E}(t_1, x_1), \rho(t_1, x_1)) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

В силу произвольности  $t_1$  и  $x_1$  это влечет утверждение теоремы.

**Замечание.** Пусть  $\frac{D}{Dt}$  - произвольная объективная производная. Тогда в силу (3.6.5)  $\frac{DT}{Dt}$  не зависит от наблюдателя для любого независящего от наблюдателя тензора  $T(t, x)$ . Так как производная Яуманна объективна, то  $\frac{DT}{Dt} - \frac{D_0T}{Dt}$  также не зависит от наблюдателя. Но в силу (3.6.4) и (3.7.1) это выражение равно  $G(\nabla v, T) - TW + WT$ . Обозначим его через  $G_1(\nabla v, T)$ . Возьмем произвольные  $t_1$  и  $x_1$  и определим  $Q$  по формуле (4.2.3). Так как  $G_1(\nabla v, T)$  не зависит от наблюдателя, то так же, как в доказательстве теоремы Нолла, получаем:

$$\begin{aligned} G_1(\nabla v, T) &= Q^T G_1((\nabla v)^*, T^*) Q = \\ &= Q^T G_1(Q\mathcal{E}Q^T + QWQ^T + Q'Q^T, QTQ^T) Q \end{aligned}$$

В момент  $t_1$  в точке  $x_1$  получается:

$$G_1(\nabla v(t_1, x_1), T(t_1, x_1)) = G_1(\mathcal{E}(t_1, x_1), T(t_1, x_1)),$$

что влечет представление (3.7.2).

Итак, по теореме Нолла соотношение (4.1.2) можно переписать в виде:

$$\sigma(t, x) = g_3(\mathcal{E}(t, x), \rho(t, x)) \quad (4.2.8)$$

В случае, когда тензор касательных напряжений не зависит от плотности (например, жидкость несжимаемая), имеем просто:

$$\sigma(t, x) = g_3(\mathcal{E}(t, x)) \quad (4.2.9)$$

Это соотношение называют гипотезой Стокса.

### 4.3 Теорема Ривлина-Эриксона

Принцип объективности дает возможность получить информацию о функции  $g_3$  из (4.2.9). Сначала заметим, что из (4.2.1) и (4.2.2) следует:

$$g_3(\mathcal{E}) = Q^T g_3(\mathcal{E}^*) Q$$

Тогда (3.5.1) дает

$$g_3(\mathcal{E}) = Q^T g_3(Q\mathcal{E}Q^T) Q \quad (4.3.1)$$

для любого ортогонального тензора  $Q$ . Оказывается, имеет место следующее утверждение - частный случай знаменитой теоремы Ривлина-Эриксона о представлении.

**Теорема.** Если функция  $g_3$  удовлетворяет условию (4.3.1), то она представима в виде

$$g_3(\mathcal{E}) = \varphi_0(I_1, I_2, I_3)I + \varphi_1(I_1, I_2, I_3)\mathcal{E} + \varphi_2(I_1, I_2, I_3)\mathcal{E}^2, \quad (4.3.2)$$

где

$$I_1 = Tr\mathcal{E} = div v, I_2 = Tr\mathcal{E}^2 = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{E}_{ij}^2, I_3 = \det \mathcal{E},$$

а  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  - скалярные функции трех скалярных аргументов.

Для несжимаемой жидкости  $I_1 = div v = 0$ . Поэтому для этого случая (4.3.2) упрощается:

$$g_3(\mathcal{E}) = \varphi_0(I_2, I_3)I + \varphi_1(I_2, I_3)\mathcal{E} + \varphi_2(I_2, I_3)\mathcal{E}^2 \quad (4.3.3)$$

Отсюда

$$Div \sigma = Div(\varphi_0 I + \varphi_1 \mathcal{E} + \varphi_2 \mathcal{E}^2) = \nabla \varphi_0 + Div(\varphi_1 \mathcal{E} + \varphi_2 \mathcal{E}^2)$$

Чтобы получить уравнение движения, подставим это в (1.3.6):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nabla \varphi_0 - Div(\varphi_1 \mathcal{E} + \varphi_2 \mathcal{E}^2) + \nabla p = f \quad (4.3.4)$$

Обозначим  $\tilde{p}(t, x) = p(t, x) - \varphi_0(I_2(t, x), I_3(t, x))$ . Получаем общее уравнение движения несжимаемой нелинейно-вязкой жидкости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - Div(\varphi_1(I_2, I_3)\mathcal{E} + \varphi_2(I_2, I_3)\mathcal{E}^2) + \nabla \tilde{p} = f \quad (4.3.5)$$

**Замечание.** Функции  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  определяются опытным путем. Для упрощения построения этих функций можно применять метод типа метода механических моделей, т.е. сведения к одномерному случаю. Например, Олдройд предложил следующую процедуру. Исходя из простых течений, определяется одномерная зависимость между напряжением  $\sigma_1$  и скоростью деформации  $\mathcal{E}_1$  в некотором направлении, например, в продольном направлении при течении в трубе:

$$\sigma_1 = \psi(\mathcal{E}_1) \quad (4.3.6)$$

Обозначим  $\psi_1(\mathcal{E}_1) = \frac{\psi(\mathcal{E}_1)}{\mathcal{E}_1}$ . Имеем:

$$\sigma_1 = \psi_1(\mathcal{E}_1)\mathcal{E}_1 \quad (4.3.7)$$

При переходе к трехмерной ситуации заменяем  $\sigma_1$  на  $\sigma$ ,  $\mathcal{E}_1$  на  $\mathcal{E}$ . Но так как  $\psi_1$  есть функция скалярного аргумента, необходимо поставить ее аргументом некоторый скаляр, характеризующий скорость деформации. Простейший вариант — это евклидова

норма тензора скоростей деформации  $\sqrt{\sum_{i,j=1}^3 \mathcal{E}_{ij}^2} = \sqrt{I_2}$ .

Мы получаем следующее определяющее соотношение

$$\sigma = \psi_1(\sqrt{I_2})\mathcal{E} \quad (4.3.8)$$

Чтобы это совпало по форме с (4.3.3), следует положить

$$\varphi_0 \equiv \varphi_2 \equiv 0, \varphi_1(I_2, I_3) = \psi_1(\sqrt{I_2}) \quad (4.3.9)$$



# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Жидкость в гидромеханике</b>	<b>4</b>
1.1 Основные характеристики течения жидкости . . .	4
1.2 Ньютоновская жидкость . . . . .	6
1.3 Уравнение движения . . . . .	6
<b>2 Одномерные модели вязкоупругих жидкостей</b>	<b>9</b>
2.1 Метод механических моделей . . . . .	9
2.2 Тело Максвелла . . . . .	11
2.3 Тело Джеффриса . . . . .	12
<b>3 Многомерные модели вязкоупругих жидкостей</b>	<b>17</b>
3.1 Переход к многомерным моделям . . . . .	17
3.2 Частная производная . . . . .	18
3.3 Субстанциональная производная . . . . .	19
3.4 Принцип объективности поведения материала . .	23
3.5 Теорема Зарембы-Зоравского . . . . .	25
3.6 Объективные производные . . . . .	27
3.7 Примеры объективных производных . . . . .	30
3.8 Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения модели вязкоупругой жидкости с производной Олдройда . . . . .	31
<b>4 Нелинейно-вязкие жидкости</b>	<b>35</b>
4.1 Нелинейная вязкость и вязкоупругость . . . . .	35
4.2 Теорема Нолла и гипотеза Стокса. . . . .	36
4.3 Теорема Ривлина-Эриксона . . . . .	38
<b>Список литературы</b>	<b>42</b>

## Список литературы

- [1] Олдройд Дж.Г. Неньютоновское течение жидкостей и твердых тел/ Дж.Г. Олдройд// Реология: теория и приложения.- М., 1962.- с. 757-793.
- [2] Рейнер М. Реология/ М. Рейнер.- М.: Физматгиз, 1965. - 224 с.
- [3] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред/ К. Трусделл. - М.: Мир, 1975. -592с.
- [4] Guillopé C. Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law/ C.Guillopé, J.C. Saut// Nonl. Anal. TMA.- 1990.- V.15, № 9.- pp. 849-869.

Авторы: Звягин Виктор Григорьевич, Воротников Дмитрий  
Александрович

Редактор Тихомирова О.А.